Úloha 1. V Americe se pro měření teploty používají místo Celsiových stupňů stupně Fahrenheitovy. Přepočet z Celsiových stupňů na Fahrenheitovy lze provést podle vzorce $f = \frac{9}{5}c + 32$ (c jsou stupně Celsiovy, f Farenheitovy). Jakou teplotu vyjádří Evropan i Američan stejnou hodnotou?

Úloha 2. Nalezněte všechny dvojice reálných čísel (a, b) takové, že čísla 10, a, b, ab tvoří v tomto pořadí aritmetickou posloupnost.

Úloha 3. Miloš dostal na zkoušce z Esperanta 10 otázek, na které lze odpovídat pouze ANO nebo NE. Test je připraven natolik fikaně, že odpoví-li Miloš na libovolných pět otázek ANO a na zbylých pět otázek NE, bude mít vždy alespoň čtyři správné odpovědi. Zjistěte, kolika způsoby lze takovýto test připravit.

Úloha 4. Najděte nejmenší možnou hodnotu parametru a tak, aby nerovnice $x \geq 14\sqrt{x} - a$ platila pro všechna nezáporná čísla x.

Úloha 5. Mějme krychli a uvažujme všechny trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech krychle. Kolik různých vnitřních úhlů se v těchto trojúhelnících objeví?

Úloha 6. Kolika způsoby lze seřadit čísla $-7, -6, \ldots, 6, 7$ tak, aby absolutní hodnota čísel v seřazené posloupnosti byla neklesající?

Úloha 7. ABCDEF je pravidelný osmistěn o straně 3 tvořený čtyřbokými jehlany $ABCDE$ a $ABCDF$. Určete obsah čtyřúhelníku $EAFC$.

Úloha 8. Do políček tabulky 5×5 jsou po řádcích (a v rámci řádku zleva doprava) vepsána čísla $1, 2, \ldots, 25$ v tomto pořadí. Vybereme pět políček tak, aby žádná dvě nebyla ve stejném řádku ani ve stejném sloupci, a čísla na těchto políčkách sečteme. Jaké hodnoty součtu můžeme tímto způsobem dostat?

Úloha 9. Vypočítejte $\frac{\tan^2(20^\circ) - \sin^2 20^\circ}{\tan^2(20^\circ)\sin^2 20^\circ}$.

Úloha 10. Káťa našla 2009 po sobě jdoucích přirozených čísel, která měla stejný součet jako 2008 po nich následujících čísel. Které z Kátiných čísel bylo nejmenší?

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 11. Kterému celému číslu je roven součin

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdots\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}?$$

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 12. Buď x reálné číslo a $y \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ splňující rovnice

$$x+\sin y = 2009$$
$$x+2009\cos y = 2008.$$

Určete součet $x+y$.

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 13. Mějme posloupnost čísel, pro kterou platí $a_2 = 5$ a $a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{a_{n-1}} \right\rfloor$ pro $n > 2$. Zjistěte hodnotu a_{999}. Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřesahuje x.

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 14. Pro která přirozená čísla n není $n!$ násobkem n^2?

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 15. Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Sestrojme rovnostranný trojúhelník PAB tak, aby bod P ležel uvnitř pětiúhelníka. Kolik stupňů má úhel PEC?

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 16. Nalezněte všechna reálná řešení rovnice

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\cdots+\sqrt{4^{2009}x+3}}}}}-\sqrt{x}=1.$$

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 17. Nechť a, b jsou takové konstanty, že body prostoru dané souřadnicemi $(1,a,b)$, $(a,2,b)$ a $(a,b,3)$ leží na jedné přímce. Určete $a+b$.

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 18. Najděte největší přirozené číslo n takové, aby číslo $(2004!)!$ bylo dělitelné číslem $((n!)!)!$.

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 19. Funkce f pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ splňuje $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot x$. Je-li $f(x)$ celé číslo, jaká je jeho největší možná dvojciferná hodnota? Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřesahuje x.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 20. Jarda si upekl dokonale kulatou palačinku a z jejího středu vykrojil kruh, takže teď z palačinky zbylo mezikruží. Když se na ni chystal dát kečup, všiml si, že nejdelší rovná čára, kterou umí kečupem nakreslit, aniž by ho vylil na stůl, je dlouhá 12 cm. Jaký obsah má Jardova palačinka?

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 21. Spočtěte součet

$$\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{1}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{3}\right\rfloor+1}+\cdots+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{99}\right\rfloor+1}.$$

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 22. Vojenský pluk dlouhý tři kilometry pochoduje. Jejich nadřízený plukovník podél nich jezdí v autě třikrát rychleji, než vojáci pochodují. Vyjel s posledním vojákem a jede vždy přímo k prvnímu, otočí se a jede zpátky k poslednímu, pak se zase otočí a jede k prvnímu a tak pořád dokola. Jak daleko bude plukovník od posledního vojáka v momentě, kdy budou mít vojáci napochodováno 10 km?

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 23. Mějme trojúhelník ABC s úhly $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 42°$. Nechť k je kružnice se středem K, která protíná stranu AB ve vnitřních bodech P, Q, stranu BC ve vnitřních bodech R, S a stranu CA ve vnitřních bodech T, U. Najděte úhel $|\sphericalangle CKB|$, jestliže víte, že $|PQ| = |RS| = |TU|$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 24. Jaký zbytek dává 2^{9999} po dělení číslem $2^7 - 1$?

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 25. Určete počet podmnožin množiny $\{1, 2 \ldots, 63\}$ takových, že součet jejich prvků je roven 2009.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 26. Najděte největší celé číslo, které dělí výraz $m^5 - 5m^3 + 4m$ pro každé $m \geq 10$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 27. Do kružnice je vepsaný šestiúhelník $ABCDEF$, pro který platí $|AB| = |CD| = |EF| = 2|BC| = 2|DE| = 2|AF|$. Určete obvod $ABCDEF$, víte-li, že $|AD| = 8$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 28. Nechť $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ je libovolná permutace čísel $1, 2, \ldots, n$. Pro kolik z těchto permutací platí, že $s_k \geq k-2$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$?

---

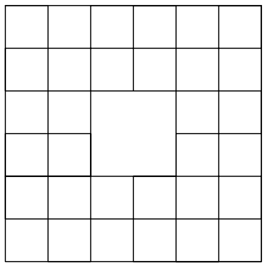
1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 29. Zjednodušte: $2\sqrt{1,5+\sqrt{2}}-(1,5+\sqrt{2})$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 30. Určete počet obdélníků (včetně čtverců) v tomto obrázku.



---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 31. Mřížový bod v rovině je takový, jehož obě souřadnice jsou celočíselné. Předpokládejme, že Pravoslav jde z bodu $(0, 2009)$ přímou cestou (po přímce) do náhodného mřížového bodu se souřadnicemi ve čtverci $(0,0)$, $(0,99)$, $(99,99)$, $(99,0)$ včetně hranic (každý cílový bod má stejnou pravděpodobnost). Jaká je pravděpodobnost, že jeho cesta bude procházet sudým počtem mřížových bodů? Do cesty počítáme i počátek a konec.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 32. Označme si $m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$. Spočtěte

$$((((2009 \circ 2008) \circ 2007) \circ \cdots \circ 2) \circ 1) \circ 0.$$

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 33. Čtyřúhelník $ABCD$ má délky stran $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|CD| = 6$, $|DA| = 7$ a platí $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Prozradíme vám, že tento čtyřúhelník má kružnici vepsanou. Dovedete určit její poloměr?

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 34. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je výraz n^3+2n^2+9n+8 třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 35. Mějme čtverec $ABCD$ se stranou 1 a uvnitř něj bod P tak, že $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCD|$. Navíc víte, že $|AP| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Určete vzdálenost $|BP|$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 36. Určete počet trojic přirozených čísel (a, b, c) splňující následující vztahy

$$abc + 2009 = ab + bc + ca$$
$$a + b + c = 2010.$$

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 37. Mějme deset přirozených čísel uspořádaných do kruhu tak, že každé číslo je o jedna větší než největší společný dělitel jeho dvou sousedů. Najděte největší možný součet takto rozestavených čísel.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 38. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s délkou hrany 2. Rovina ρ rovnoběžná s hranami AB a CD procházející středem AC rozřízne $ABCD$ na dva kusy. Najděte povrch jednoho z těchto kusů.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 39. Všechna políčka tabulky 8×8 vyplníme křížky a kolečky tak, že v každém sloupci i v každém řádku bude lichý počet křížků. Kolika způsoby můžeme tabulku takto vyplnit?

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 40. V PraSátkově je 10 měst. Nově zakládaná společnost Čuňas&spol. chce vytvořit letecké linky mezi městy v PraSátkově. Ví však, že vláda hodlá rozdělit PraSátkov na dva státy, oba po pěti městech. Ale bohužel neví, která města budou ve kterém státě. Při rozdělení státu se všechny linky mezi městy z různých států zruší. Poraďte Čuňasům, jaký nejmenší počet linek jim stačí vytvořit, aby po rozdělení PraSátkova mohli cestující s použitím leteckých linek Čuňas&spol. cestovat mezi libovolnými městy v rámci rozdělených států (klidně i s přestupy).

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 41. Mějme tětivový čtyřúhelník $TUVW$, jehož kružnice opsaná má poloměr 5. Délky stran jsou $|TU| = 6$, $|UV| = 7$, $|VW| = 8$. Určete délku poslední strany.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 42. Buď S množina všech trojic přirozených čísel (a, b, c), pro něž platí $a + b + c = 17$. Určete

$$\sum_{(i,j,k)\in S} ijk$$

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 43. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice vepsaná se středem I. Ta se dotýká strany BC v bodě D. Označme l kružnici nad průměrem AI. Buď Q její druhý průsečík s přímkou BI a P její druhý průsečík s přímkou CI. Víte-li, že $|BI| = 6$, $|CI| = 5$, $|DI| = 3$, určete $\left(\frac{|DP|}{|DQ|}\right)^2$.

---

1 *Zadání - Náboj 2009*

Úloha 44. Je dána tabulka 3x3, v jejímž levém horním rohu je číslo 1 a v pravém dolním je číslo 2009. Rozhodněte, kolika způsoby lze vyplnit zbylá políčka tak, aby každé číslo dělilo číslo v políčku pod ním i číslo vpravo od něj.