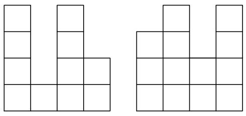
Úloha 1. Kvádr s délkami hran 1, a, $2a$ má povrch 54. Najděte hodnotu čísla a.

Úloha 2. Pomocí právě tří osmiček a libovolných ze symbolů $+, -, *, /, \sqrt{\ }$ vytvořte číslo 3. Jeden symbol můžete použít i víckrát.

Úloha 3. Vejtek měl knihu z teorie množin, jejíž listy byly číslované postupně 0, 1, 2, 3, … Afro mu z ní jeden list vytrhnul. Teď je součet čísel na zbylých listech 2010. List se kterým číslem Afro vytrhnul?

Úloha 4. Alča postavila stavbu z několika jednotkových kostek, která se vejde do větší kostky rozměrů $4 \times 4 \times 4$. Pepovi však nakreslila jen pohledy postupně z jihu a z východu. Najděte největší a nejmenší počet kostek, ze kterých může být stavba postavená, pokud máte stejně jako Pepa k dispozici pouze tento obrázek.



Úloha 5. Blecha skáče po mřížových bodech čtverečkové sítě. Každým skokem se dostane o jeden mřížový bod výš, níž, doprava nebo doleva. Začne skákat z bodu $(0, 0)$. Do kolika mřížových bodů se může dostat přesně po deseti skocích?

Úloha 6. Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$ takových, že součin jejich prvků je dělitelný čtyřmi?

Úloha 7. V aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{47}$ je součet členů s lichými indexy rovný 1272. Zjistěte součet všech členů této posloupnosti.

Úloha 8. V lichoběžníku $ABCD$ (se základnami AB a CD) platí $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Dále víme, že $|CD| = 3$ cm a $|DA| = 5$ cm. Zjistěte velikost úsečky AB.

Úloha 9. Tři planety K, A a G obíhají kolem hvězdy N po soustředných kružnicových drahách (společný střed kružnic je hvězda N). Pohybují se konstantní rychlostí a mají různé periody oběhu: 60, 84 a 140 roků. Jednou se stalo, že tyto tři planety spolu s hvězdou N ležely na jedné přímce. Kolik nejméně roků musí uplynout, aby K, A, G a N znovu ležely na jedné přímce?

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

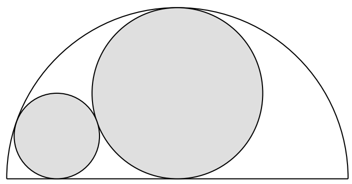
Úloha 10. Monča se v jednom svém snu ocitla v jedné zapadlé rovině. Nacházela se v bodě se souřadnicemi $[-30, 11]$ a vydala sa po přímce až do bodu $[9, -40]$. Kolik mřížových bodů (mřížový bod je takový, který má obě souřadnice celočíselné) cestou navštívila? Započítejte i počáteční a koncový bod.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 11. Miloš má svoje oblíbené přirozené číslo. Víme, že je to nejmenší přirozené číslo m takové, že čísla m, $m + 1$ mají obě ciferný součet dělitelný číslem 14. Najděte Milošovo oblíbené číslo.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 12. Mějme půlkruh s poloměrem 1. Do něho vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, a vybarvíme ho šedě. Potom do nešedého zbytku půlkruhu vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, tak, aby průnik s šedým kruhem byl nanejvýš jednobodový. Jaký poloměr má menší kruh?



1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 13. Kolika způsoby můžeme z 12 různých hráčů sestavit tři týmy po čtyřech hráčích?

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 14. Vyčíslete výraz $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2009^2 - 2010^2$.

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

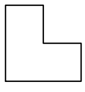
Úloha 15. Auto jede z kopce rychlostí 72 km/h, po rovině rychlostí 63 km/h a do kopce rychlostí 56 km/h. Cesta z města A do města B trvá 4 hodiny. Zpáteční cesta trvá 4 hodiny a 40 minut. Jaká je vzdálenost po cestě mezi městy A a B?

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 16. Na matfyzu máme podivný bankomat. Když k němu Honzík naposledy přišel, byla v něm hotovost 500 korun v korunových mincích a nic jiného. Z bankomatu se dá buď vybrat přesně 300 korun (za předpokladu, že v něm alespoň taková hotovost je) nebo do něj vložit přesně 198 korun. Jakou největší hotovost si mohl Honzík vybrat, pokud u sebe na začátku neměl ani korunu? (Mohl vkládat a vybírat kolikrát chtěl a v libovolném pořadí.)

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 17. Slepíme tři stejně velké čtverce do tvaru L. Rozdělte tento útvar na osm shodných útvarů.



1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 18. Olin dostal na Velikonoce šachovnici 8×8 bez pravého horního a levého dolního rohového políčka. Kolika způsoby na ni může postavit osm veží tak, aby se navzájem neohrožovaly?

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 19. Kvadratická rovnice $x^2 - mx + 2 = 0$ s parametrem m má kořeny a, b. Předpokládejme, že

$$a + \frac{1}{b}, \quad b + \frac{1}{a}$$

jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - px + q = 0$. Určete hodnotu q (v závislosti na m).

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 20. Vejtek si vymyslel čtyři kladná, ne nutně celá čísla a, b, c a d. Potom má šest možností, jak vynásobit právě dvě z nich, konkrétně ab, ac, ad, bc, bd a cd. Frantovi ale Vejtek řekl pouze pět z těchto šesti součinů, konkrétně 2, 3, 4, 5 a 6. Pomozte Frantovi najít šestý součin.

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 21. V klobouku kouzelníka Pokustóna se krčí 8 černých a 4 bílí králíci. Náhodně z klobouku vytáhneme 6 králíků. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený králík bude černý?

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 22. Jaký zbytek dostaneme při dělení čísla $1^1 + 2^2 + \cdots + 2010^{2010}$ dvanácti?

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 23. Kája má kus dřevěné desky tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka se stranami délky 1, 1 a $\sqrt{2}$. Chce ho rozříznout jedním řezem na dva kusy se stejným obsahem. Poraďte Káje, kudy vést nejkratší řez (tj. úsečku), a určete jeho délku.

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 24. Která políčka můžeme ze šachovnice 8×8 vystřihnout, aby se zbytek dal pokrýt 21 kostičkami tvaru 3×1?

1 *Zadání* *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 25. Šavlík s Pepou hrají následující hru. Mají hromádku s n zápalkami a střídají se v tazích. Každý musí ve svém tahu odebrat z hromádky kladný počet zápalek nepřevyšující polovinu zápalek na hromádce. Ten, kdo bude mít na začátku svého tahu jen jednu zápalku (a tedy nebude moci provést svůj tah), vyhraje. Když víte, že Šavlík začíná, najděte n nejblíže k číslu 2010 takové, že Pepa může vyhrát (bez ohledu na to, jak dobře hraje Šavlík).

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 26. Trojúhelník ABC má pravý úhel u vrcholu A. Na straně AB se nachází bod D, přičemž $|CD| = 1$. Dále AE je výška z bodu A na stranu BC. Najděte délku AD, pokud navíc víte, že $|BD| = |BE| = 1$.

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 27. Množina X má n prvků. Nechť A, B jsou dvě náhodné podmnožiny X. Jaká je pravděpodobnost, že A je podmnožina B? Upřesnění: Při náhodném výběru podmnožiny X vybereme každou z 2^n podmnožin se stejnou pravděpodobností (rovnou $1/2^n$). Výběry podmnožin A a B jsou navzájem nezávislé.

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 28. Najděte největší přirozené číslo m takové, že rovnice $2009x + 2011y = m$ má právě jedno řešení v přirozených číslech(tj. v číslech $1, 2, 3, \dots$).

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 29. Najděte alespoň jedno reálné číslo x, pro které platí

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = x.$$

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 30. Najděte všechny dvojice (a, b) přirozených čísel takové, že $a + b$ má (v desítkové soustavě) na místě jednotek cifru 3, $a - b$ je prvočíslo a ab je druhou mocninou přirozeného čísla.

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 31. Na šachovnici $n \times n$ je rozmístěných 1005 dominových kostiček tak, že každá z nich zakrývá dvě políčka šachovnice sousedící stranou. Žádné dvě dominové kostičky se nepřekrývají ani nedotýkají (a to ani rohem). Najděte nejmenší možné n, pro které to může platit.

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 32. Nechť $n = p_1 p_2 \dots p_k$ je rozklad čísla n na prvočísla, ne nutně různá. Číslo n nazveme *zelené*, pokud n dělí $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)$. Nalezněte nejmenší *zelené* číslo větší než 100.

---

1 Zadání *Zadání - Náboj 2010*

Úloha 33. Pro každou uspořádanou dvojici přirozených čísel (m, n) definujeme hodnotu $f(m, n)$. Víme, že pro všechna m, n přirozená platí

$$f(1, 1) = 1, \quad f(m + 1, n) = f(m, n) + m, \quad f(m, n + 1) = f(m, n) - n.$$

Najděte všechna přirozená čísla p, pro která existuje přirozené číslo q takové, že platí $f(p, q) = 2010$.

Úloha 34. Na univerzitě je s studentů. Ví se, že každý učitel učí právě k studentů a pro každou dvojici (různých) studentů existuje právě m učitelů, kteří je učí oba dva. Kolik učitelů je na univerzitě?

Úloha 35. V rovině je nakreslených 9 různých přímek. Když se protnou právě 2 přímky v jednom bodě, nazveme tento průsečík modrý, když právě tři, nazveme ho červený. Našich 9 přímek umíme rozdělit na tři trojice. Každá přímka z první trojice obsahuje 3 červené a 1 modrý bod, přímky z druhé trojice mají 2 červené a 4 modré body a každá přímka z třetí trojice má 2 červené a 3 modré body. Určete, na kolik částí dělí těchto 9 přímek rovinu.

Úloha 36. Najděte nejmenší reálné číslo k takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí $2x + 3y \leq k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Úloha 37. Jsou-li x a y kladná celá čísla splňující $xy = 2010(x + y)$, jaká je potom největší možná hodnota x?

Úloha 38. Mišo chce nakreslit tabulku velikosti 25×25 složenou ze 625 malých čtverečků. Umí ale kreslit jenom čtverce (přesněji jejich obvody) libovolné velikosti. Vždycky kreslí celé čtverce a nemůže používat gumu. Kolik nejméně čtverců musí Mišo nakreslit, aby nakreslil celou tabulku a nic navíc?

Úloha 39. Každé políčko šachovnice 8×8 můžeme obarvit bíle nebo černě. Najděte počet různých obarvení takových, že každý čtverec 2×2 obsahuje dvě bílá a dvě černá políčka.

Poznámka: Na orientaci šachovnice záleží. Dvě obarvení, která se liší jen otočením či překlopením, považujeme za různá.

Úloha 40. Kubická rovnice $x^3 + 2x - 1 = 0$ má právě jeden reálný kořen r. Víme, že $0{,}4 < r < 0{,}5$. Najděte všechny rostoucí posloupnosti přirozených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ takové, že platí

$$\frac{1}{2} = r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \cdots$$

Úloha 41. Konvexní šestiúhelník se stranami délek 2, 2, 7, 7, 11 a 11 je vepsaný do kružnice. Najděte její poloměr.

Úloha 42. V krabici je několik barevných míčků, přičemž od každé barvy jich tam je stejný počet. Pokud do krabice přidáme 20 míčků, které mají všechny stejnou barvu, ale různou od všech, které byly předtím v krabici, nezměníme tím pravděpodobnost, že při tahání dvou míčků bez vracení vytáhneme míčky stejné barvy. Kolik míčků bylo na začátku v krabici?