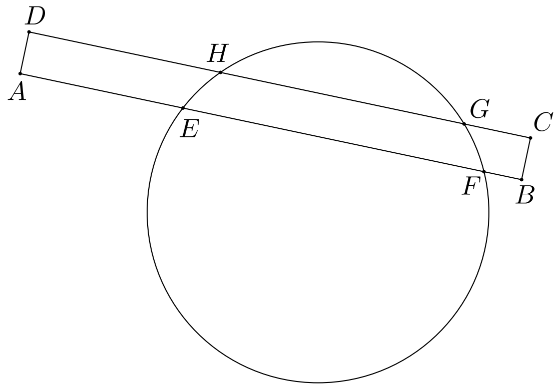
Úloha 1. Čitatel i jmenovatel Kennyho zlomku jsou přirozená čísla se součtem 2011. Hodnota zlomku je přitom menší než $\frac{1}{3}$. Jaká největší může tato hodnota být?

Úloha 2. Obdélník $ABCD$ protíná kružnici v bodech E, F, G, H jako na obrázku. Jestliže platí $|AE| = 3$, $|DH| = 4$ a $|GH| = 5$, určete $|EF|$.

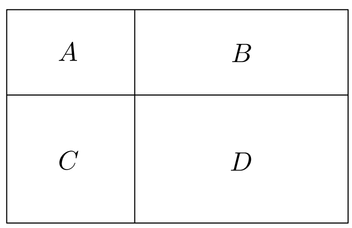


Úloha 3. Čemu je roven ciferný součet čísla $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{50}1$?

Úloha 4. Ve třech sáčcích jsou mandarinky. V prvním sáčku je o 6 mandarinek méně než ve dvou ostatních dohromady, ve druhém sáčku je o 10 mandarinek méně než ve dvou ostatních dohromady. Kolik mandarinek je ve třetím sáčku?

Úloha 5. Na stole leží 33 ořechů v několika (alespoň dvou) hromádkách. V každé hromádce jsou alespoň dva ořechy. Poté, co z každé hromádky odebereme jeden ořech a dáme ho na první hromádku, bude na každé hromádce ořechů stejně. Kolik hromádek bylo původně na stole? Nalezněte všechny možnosti.

Úloha 6. Obdélník je dvěma úsečkami rovnoběžnými se svými stranami rozdělen na čtyři menší obdélníky. Označme je A, B, C, D jako na obrázku. Víme, že obvody obdélníků A, B, C jsou po řadě rovny 2 cm, 4 cm a 7 cm. Jaké jsou všechny možné hodnoty obvodu obdélníka D?



Úloha 7. Najděte navzájem různé cifry A, B, C tak, aby platilo následující písemné sčítání:

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ \underline{ABC} \\ BCB \end{array}$$

Úloha 8. Určete obsah obdélníka, víte-li, že jeho obvod je 10 cm a jeho úhlopříčka má délku $\sqrt{15}$ cm.

Úloha 9. Mišo si vzal N^3 stejně velkých krychliček a sestavil z nich jednu velkou krychli o rozměrech $N \times N \times N$. Celý její povrch obarvil a pak ji znovu rozložil na původní krychličky. Určete N, víte-li, že je nyní obarvena jedna desetina povrchu všech krychliček.

Úloha 10. Kolik nejméně členů má matematický klub, v němž je zastoupení dívek větší než 48,5%, ale menší než 50%?

Úloha 11. Zvětšíte-li číslo úlohy, kterou nyní držíte v ruce, o číslo n, získáte číslo úlohy s nejvíce šokujícím zadáním. Zvětšíte-li jej místo toho o dvojciferné číslo k, získáte číslo nejhravější úlohy. Navíc platí, že $n^3 = k^2$. Určete n a k, víte-li, že vám nyní zbývá spočítat už jen 44 úloh (včetně této).

Úloha 12. Najděte přirozené n splňující $6666^2 + 8888^2 = n^2$.

Úloha 13. Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které končí na 17, je dělitelné 17 a má ciferný součet 17.

Úloha 14. Každá dvojice po sobě jdoucích cifer jistého 2011ciferného čísla je násobkem 17 nebo 23. Jeho poslední číslice je přitom 1. Určete jeho první číslici.

Úloha 15. Přirozené číslo nazveme *luxusní*, jestliže každé jiné přirozené číslo se stejným ciferným součtem je větší. Zjistěte, kolik luxusních čísel je trojciferných.

Úloha 16. Pepova reálná čísla x, y, z splňují $\frac{x-y}{z-y} = -10$. Jakých hodnot může nabývat výraz $\frac{x-z}{y-z}$? Najděte všechny možnosti.

Úloha 17. Číslice $1, 2, \ldots, 9$ napíšeme za sebe v nějakém pořadí tak, aby vzniklo devíticiferné číslo. Uvážíme všechny trojice po sobě jdoucích cifer tohoto čísla a odpovídajících sedm trojciferných čísel sečteme. Jaký největší můžeme dostat výsledek?

Úloha 18. V každém políčku tabulky 10×10 je napsáno číslo. Mirek si všiml, že mezi součiny všech možných dvojic čísel z různých políček tabulky je přesně 1000 čísel záporných. Kolik čísel v tabulce může být nulových? Určete všechny možnosti.

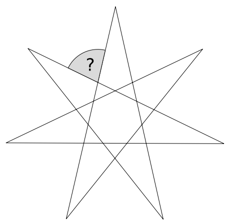
Úloha 19. V království začali razit mince. Celý první den razili mince v hodnotě 1 fufník. Každý další den razili mince v té hodnotě, která se jako první nedá zaplatit pomocí deseti nebo méně již existujících mincí. Mince jaké hodnoty razili během 2011. dne?

Úloha 20. Nechť je číslo p řešením úlohy na tomto papíře. Určete pravděpodobnost (číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$), že náhodně vybraný bod uvnitř čtverce o straně 1 cm je od všech jeho stran vzdálen alespoň p cm.

Úloha 21. Tabulka 3×3 je vyplněna celými čísly tak, že součty v jednotlivých řádcích postupně shora dolů rostou o 2 a součty v jednotlivých sloupcích se postupně zleva doprava zdvojnásobují. Pokud je součet v jednom z řádků roven 2011, určete součet čísel v levém sloupci.

Úloha 22. Dva trajekty vyrazily v jeden okamžik proti sobě přes zátoku. Pluly oba konstantní (ale každý jinou) rychlostí a minuly se ve vzdálenosti 100 m od jednoho břehu. Když každý z nich doplul k protějšímu břehu, rovnou se otočil a vracel se zpět. Podruhé se trajekty minuly 70 m od druhého břehu. Jak široká je zátoka?

Úloha 23. Hvězda má vrcholy ve vrcholech pravidelného sedmiúhelníku. Jaká je velikost vyznačeného úhlu?



Úloha 24. Najděte x splňující $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$.
Poznámka: patrové mocniny se vyhodnocují odshora, tj. $4^{3^2} = 4^9$.

Úloha 25. Kolik existuje uspořádaných trojic přirozených čísel (a, b, c) takových, že

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

a $a + b + c \leq 30$?

Úloha 26. V rovině je dána kružnice s poloměrem 1, se středem O a průměrem AC. Na kolmici k AC procházející bodem O je vně kružnice zvolen bod U tak, že označíme-li druhý průsečík kružnice s přímkou AU jako B, platí $|BU| = 1$. Určete $|OU|$.

Úloha 27. Bitvy armád A a B se zúčastnilo dohromady 1000 vojáků. Armády střílejí v salvách. V jedné salvě zastřelí každý živý voják ze střílející armády jednoho vojáka ze soupeřovy armády (pokud možno každý jiného). V naší bitvě střílela nejdřív armáda A, pak armáda B a nakonec opět armáda A. Kolik nejméně vojáků bitvu určitě přežilo?

Úloha 28. Všech šest stran konvexního šestiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je obarveno červeně. Každá z úhlopříček je obarvena červeně nebo modře. Určete počet obarvení takových, že každý trojúhelník $A_iA_jA_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ má alespoň jednu stranu červenou.

Úloha 29. Mirek pověděl Kennymu a Pavlovi každému jedno přirozené číslo a dále jim sdělil, že jejich čísla jsou různá a jejich součtem je dvojciferné číslo. Pak se mezi Kennym a Pavlem odehrála následující konverzace:

Kenny: „Nedovedu určit, kdo z nás má větší číslo.“

Pavel: „Ani já to nedovedu určit, ale prozradím, že moje číslo je dělitelné 17.“

Kenny: „Aha, tak teď už umím jednoznačně určit, jaký je součet našich čísel.“

Čemu se rovnal tento součet, pokud oba po celou dobu uvažovali bezchybně?

Úloha 30. V kavárně je dohromady 55 Indů a Turků, z nichž každý pije buď kávu, nebo čaj. Ind je pravdomluvný, pokud pije čaj, a lže, pokud pije kávu, přičemž u Turků je tomu právě naopak. Na otázky: „Pijete kávu?“, „Jste Turek?“ a „Prší venku?“ byly počty kladných odpovědí postupně 44, 33 a 22. Kolik Indů pije čaj? Nalezněte všechny možnosti.

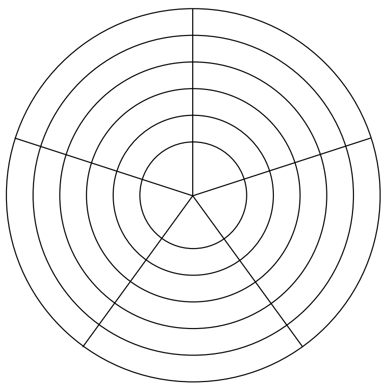
Úloha 31. K přirozenému číslu A byly zprava připsány tři cifry, čímž vzniklo číslo, které je součtem všech přirozených čísel od 1 do A. Nalezněte všechny možné hodnoty A.

Úloha 32. Adéla, Bára, Cilka, Dana a Eliška hrály turnaj ve čtyřhře ve stolním tenise (tj. každá dvojice hrála proti každé další přesně jednou). Adéla vyhrála 12 zápasů a Bára jich vyhrála 6. Kolik zápasů mohla vyhrát Cilka? Nalezněte všechny možnosti.

Úloha 33. Dva hráči hrají na uvedeném plánu sestávajícím ze 30 políček hru podle následujících pravidel:

- hráči se střídají v tazích,
- tahem rozumíme vybarvení právě jednoho políčka,
- v prvním tahu se vybarví políčko sousedící s vnějškem a v každém dalším tahu políčko, které sousedí s posledně vybarveným a není dále od středu,
- vybarvené políčko se nesmí znovu vybarvovat,
- kdo nemůže táhnout, prohrál.

Kolik políček bude vybarveno na konci hry, ve které oba hráči hrají bezchybně a ten, kdo nemůže vyhrát, se snaží hru co nejvíc prodlužovat?



Úloha 34. V trojúhelníku ABC je $|AC| = |BC|$. Uvnitř strany AB blíže bodu B nalezneme bod P ($P \neq B$) tak, že $|\sphericalangle ACP| = 30°$. Dále nalezneme bod Q tak, že $|\sphericalangle CPQ| = 78°$ a body C a Q leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Jestliže jsou vnitřní úhly v trojúhelnících ABC a BQP vyjádřeny ve stupních celočíselně, určete, jakých hodnot může nabývat velikost úhlu BQP.

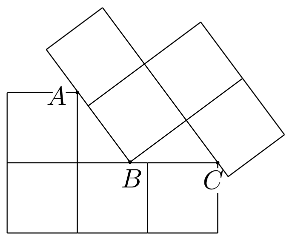
Úloha 35. Deset lidí sedělo vedle sebe v divadle. Po přestávce si sedli tak, že právě dva z nich zůstali na svém původním místě a zbylých osm se posadilo na židli jednoho ze svých sousedů. Kolika způsoby to mohli udělat?

Úloha 36. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Každému vrcholu krychle přiřadíme součin čísel napsaných na třech jeho přilehlých stěnách. Víme, že součet čísel přiřazených vrcholům je 165. Jakých všech hodnot může nabývat součet čísel na stěnách?

Úloha 37. Dva cyklisté závodili na rovné ulici v silničním maratonu. Startovali společně z jednoho konce a pokaždé, když někdo z nich dorazil na (libovolný) konec ulice, otočil se a jel zpět. Do okamžiku, než se poprvé od startu potkali na některém z konců, projel pomalejší z nich ulici 35-krát a rychlejší 47-krát. Kolikrát se během té doby čelně minuli?

Úloha 38. Najděte největší přirozené číslo takové, že všechny jeho cifry kromě první a poslední jsou ostře menší než aritmetický průměr sousedních dvou cifer.

Úloha 39. Dvě tetrisové kostičky sestavené ze čtverců o rozměrech 1×1 dm se dotýkají v bodech A, B, C jako na obrázku. Určete vzdálenost $|AB|$.



Úloha 40. V rovině je dáno 100 různých mřížových bodů. Každé dva z nich spojíme úsečkou. Kolik nejméně z těchto úseček má určitě svůj střed v mřížovém bodě?
Poznámka: bod v rovině nazýváme *mřížový*, jsou-li obě jeho souřadnice celočíselné.

Úloha 41. Pěticiferné číslo nazveme *nerozkládací*, jestliže ho nelze zapsat jako součin dvou trojciferných čísel. Kolik nejvíce nerozkládacích čísel může následovat bezprostředně za sebou?

Úloha 42. Reálná čísla x a y splňují $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$. Nalezněte minimální hodnotu výrazu $x^2 + y^2$.

Úloha 43. Posloupnost má první dva členy $a_1 = 20$ a $a_2 = 11$ a dále je definovaná pomocí vzorce

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

dokud má pravá strana smysl (tj. nedělí se nulou). Určete nejmenší t takové, že $a_t = 0$.

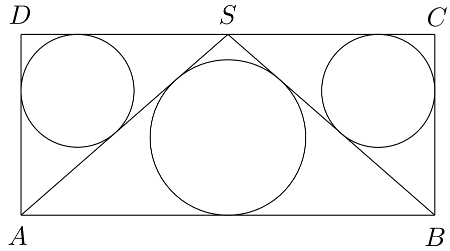
Úloha 44. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AA', BB', CC', které se protínají v bodě H. Navíc platí

$$\frac{|AH|}{|HA'|} = 1, \quad \frac{|BH|}{|HB'|} = 2.$$

Určete $\frac{|CH|}{|HC'|}$.

Úloha 45. Na oslavě zná každý (včetně Pavla) přesně sedm chlapců a přesně deset děvčat („znání se“ je vzájemné, sám sebe nikdo nezná). Kolik nejméně lidí se na oslavě mohlo sejít?

Úloha 46. Bod S je středem strany CD obdélníku $ABCD$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ASD a BSC mají každá poloměr 3 a kružnice vepsaná trojúhelníku ASB má poloměr 4. Určete strany obdélníka.



Úloha 47. Dělitele přirozeného čísla n, kteří jsou menší než n, si vypíšeme od největšího po nejmenší. Pokud je součet druhého a třetího napsaného čísla roven prvnímu napsanému číslu, pak n nazveme *sčítací*. Kolik existuje sčítacích čísel menších než 15000?

Úloha 48. Najděte všechna reálná x splňující

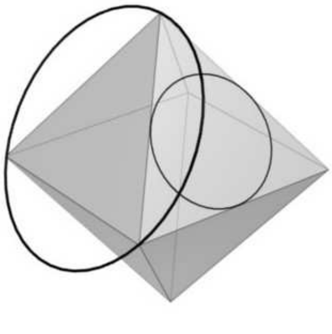
$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{50}{x-49}+\frac{49}{x-50}.$$

Úloha 49. Umístění hodinové a minutové ručičky na ciferníku nazveme *platné*, pokud vyjadřuje skutečný čas v průběhu dne. Zjistěte, kolik existuje platných umístění, která zůstanou platnými i po prohození ručiček.

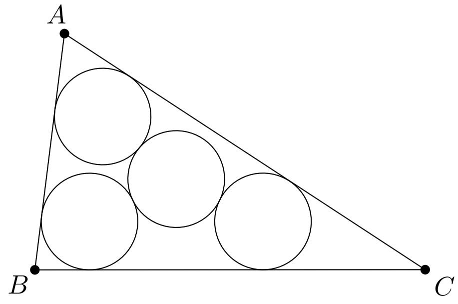
Úloha 50. Nechť a, b, c jsou taková nenulová reálná čísla, že kvadratické trojčleny ax^2+bx+c a bx^2+cx+a mají společný kořen. Určete, jaké všechny reálné hodnoty může tento kořen mít.

Úloha 51. Nalezněte všechna celá čísla n taková, že jak číslo $16n+9$, tak číslo $9n+16$ je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Úloha 52. Je dán pravidelný osmistěn o hraně délky 2. Jedné jeho stěně vepíšeme kružnici a jedné stěně s ní sousedící kružnici opíšeme. Jaká je nejmenší vzdálenost těchto dvou kružnic?



Úloha 53. Je dán trojúhelník ABC s poloměrem kružnice opsané 5 a poloměrem kružnice vepsané 2. Uvnitř trojúhelníka jsou do úhlů BAC, CBA, ACB vepsány shodné kružnice o poloměru r tak, že existuje další kružnice o poloměru r, která s nimi má se všemi vnější dotyk. Určete r.



Úloha 54. Pro reálná čísla a, b, x, y platí

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Určete hodnotu $ax^5 + by^5$.