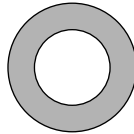


Aufgabe 1J. Wenn man die Seite eines Würfels um 100% vergrößert, um wie viel Prozent wächst dann das Volumen?

Ergebnis: 700%

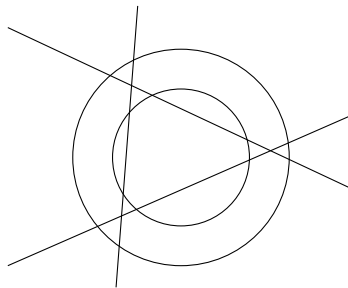
Lösungsweg: Die Verlängerung einer Seite um 100% ist gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit 2. Beträgt das ursprüngliche Volumen des Würfels a^3 , so ist es nach der Verlängerung der Seite $(2a)^3 = 8a^3$. Also ist das Volumen um $7a^3$ gewachsen, was einer Zunahme um 700% entspricht.

Aufgabe 2J. In wie viele Teile kann man einen Ring mit Hilfe von drei Geraden höchstens aufteilen?



Ergebnis: 9

Lösungsweg: Wenn man die Geraden so wählt, dass sich je zwei Geraden in einem Schnittpunkt innerhalb des Ringes schneiden und zugleich alle Geraden Sekanten des inneren Kreises sind, so entstehen neun Teile. Mehr sind nicht möglich.



Aufgabe 3J. Die fünfstellige Zahl $a679b$ ist durch 72 teilbar. Bestimme $a \cdot b$.

Ergebnis: $3 \cdot 2 = 6$

Lösungsweg: Es ist $72 = 8 \cdot 9$. Aus der Teilbarkeit durch 8 folgt $b = 2$. Die Teilbarkeit durch 9 liefert die Bedingung $9 \mid (a + 6 + 7 + 9 + 2)$, woraus $a = 3$ folgt.

Also ist $a \cdot b = 6$.

Aufgabe 4J. Ein Mathematiklehrer entschloss sich, einen Mathematikwettbewerb mit zwei Runden zu organisieren. Jedes Team bestand aus fünf Teilnehmern. In der ersten Runde konnten sich die Schüler selbständig in Mannschaften aufteilen. In der zweiten Runde teilte der Lehrer die Schüler so auf, dass keiner mit einem Schüler, mit dem er schon in der ersten Runde im gleichen Team war, nun wieder in der gleichen Mannschaft war. Bestimme die minimale Anzahl an Schülern, mit denen so eine Aufteilung möglich ist.

Ergebnis: 25

Lösungsweg: Die Anzahl der Schüler ist durch 5 teilbar und größer als 20 (Schubfachprinzip). 25 ist aber bereits ausreichend.

Aufgabe 5J. Die ganze Oberfläche einer quaderförmigen Vanilletorte mit den Seitenlängen 10, 10 und 5 wurde mit einer dünnen Schicht Schokolade überzogen. Nun schneidet man die Torte in Würfel mit der Seitenlänge 1. Wie hoch ist der Prozentsatz an Würfeln, die keine Schokolade an irgendeiner Seitenfläche haben?

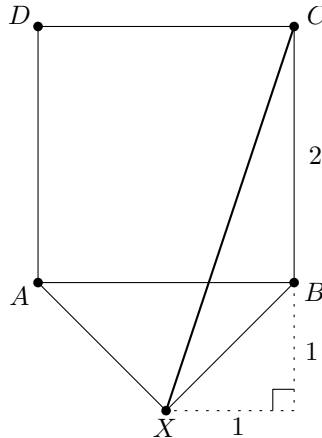
Ergebnis: $38,4\% = 48/125$

Lösungsweg: Man betrachtet das, was übrig bleibt, wenn alle Würfel mit Schokoladenüberzug gegessen wurden. Dies ist ein Quader mit den Seitenlängen 8, 8 und 3, der nur aus Würfeln ohne Schokolade besteht. Insgesamt sind dies 192 Würfel. Von allen $10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$ Würfeln ist dies ein Anteil von $192/500 \cdot 100\% = 38,4\%$.

Aufgabe 6J. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge 2 und ein Punkt X (außerhalb des Quadrats) in der Ebene des Quadrats mit $\overline{AX} = \overline{XB} = \sqrt{2}$. Wie lang ist die längste Diagonale im konvexen Fünfeck $AXBCD$?

Ergebnis: $\sqrt{10}$

Lösungsweg: Die längste Diagonale ist CX (oder auch DX). Sei E der Lotfußpunkt des Lotes von X auf BC . Da das Dreieck AXB nach dem Satz des Pythagoras rechtwinklig ist, ist $\overline{EB} = \overline{EX} = 1$. Das Dreieck ECX ist ebenfalls rechtwinklig und mit dem Satz des Pythagoras folgt $\overline{XC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.



Aufgabe 7J. Jakob hat $5 \cdot 414 = 1121$ an die Tafel geschrieben. Nun überlegt er, wie er jede Ziffer um 1 erhöhen oder verringern muss, so dass ein richtiges Ergebnis entsteht. Wie lautet die rechte Seite nach dieser Änderung?

Ergebnis: 2012

Lösungsweg: Probiert man die 16 Möglichkeiten auf der rechten Seite durch, so sieht man, dass nur $4 \cdot 503 = 2012$ möglich ist. Der Suchprozess kann durch verschiedene Beobachtungen beschleunigt werden, z.B. muss das Ergebnis mit 2 beginnen, weshalb auf der linken Seite die erste Zahl 4 sein muss und die zweite mit 5 beginnen muss.

Aufgabe 8J. Die Summe der zwei ganzen Zahlen x und y ist höchstens 200 und ihre Differenz ist kleiner als 100. Bestimme das Maximum von $2 \cdot \min(x, y) + \max(x, y)$.

Ergebnis: 300

Lösungsweg: O.B.d.A. sei $x \geq y$. Dann ist

$$2 \cdot \min(x, y) + \max(x, y) = 2y + x = y + (x + y) \leq y + 200 \leq \frac{x + y}{2} + 200 = 300.$$

Dies kann durch $x = y = 100$ auch erreicht werden.

Aufgabe 9J. Seien x, y, z reelle Zahlen, so dass das arithmetische Mittel (AM) von x und $2y$ gleich 7 ist und das arithmetische Mittel von x und $2z$ gleich 8 ist. Was ist dann das AM von x, y und z ?

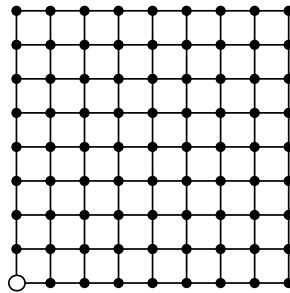
Ergebnis: 5

Lösungsweg: Addiert man die beiden Gleichungen für das jeweilige AM, so erhält man

$$\frac{x + 2y}{2} + \frac{x + 2z}{2} = x + y + z = 15.$$

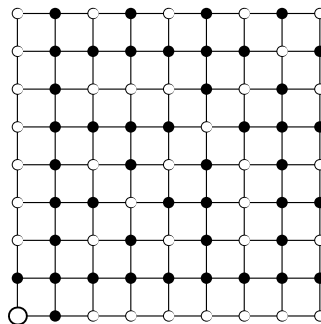
Division durch 3 ergibt das Ergebnis 5.

Aufgabe 10J. In einem 8×8 Gitter wachsen 81 Bäume wie in der Abbildung dargestellt. Der Gärtner fällt einen Eckbaum und betrachtet von dieser Stelle aus die anderen Bäume. Er kann aber nicht alle Bäume sehen, da sie mit anderen Bäumen auf einer Geraden liegen und deshalb verdeckt sind. Wie viele Bäume kann der Gärtner sehen?



Ergebnis: 45

Lösungsweg: Man ordnet die Bäume nach ihrem Abstand zum Gärtner und prüft jeden einzelnen der Reihe nach auf Sichtbarkeit. Wenn ein Baum noch nicht ausgestrichen wurde, kennzeichnet man ihn als sichtbar und streicht alle Bäume, die mit diesem auf einer Geraden liegen. Er kann dann insgesamt 45 Bäume sehen.



Aufgabe 11J / 1S. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Seiten eines Würfels mit zwei Farben so zu färben, dass unterschiedliche Würfel entstehen? Zwei Färbungen werden dabei als identisch betrachtet, wenn sie durch eine Drehung ineinander überführt werden können.

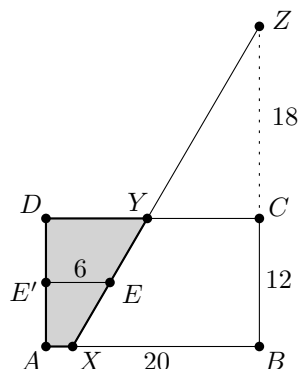
Ergebnis: $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$

Lösungsweg: Wir unterscheiden die Würfel nach der Anzahl der schwarzen Seiten und deren Lage zueinander. Für 0 schwarze Seiten gibt es eine Möglichkeit, ebenso für eine schwarze. Für zwei schwarze Seiten gibt es zwei Möglichkeiten, entweder sie sind benachbart oder nicht, d.h. sie liegen gegenüber. Für drei schwarze Seiten gibt es ebenfalls zwei Möglichkeiten: Die schwarzen Seiten stoßen an einer gemeinsamen Ecke zusammen oder nicht. Für 4, 5 und 6 schwarze Seiten haben wir eine symmetrische Situation zu 2, 1 bzw. 0 schwarze Seiten. Insgesamt gibt es also $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ unterschiedliche Würfel färbungen.

Aufgabe 12J / 2S. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = 20$ und $\overline{BC} = 12$. Auf dem Strahl BC sei ein Punkt Z mit $\overline{CZ} = 18$. Der Punkt E liege innerhalb des Rechtecks $ABCD$ mit Abstand 6 zur Geraden AB . Der Abstand zur Geraden AD sei ebenfalls 6. Die Gerade EZ schneidet AB in X und CD in Y . Bestimme die Fläche des Vierecks $AXYD$.

Ergebnis: 72

Lösungsweg: Im Trapez $AXYD$ ist E der Mittelpunkt der Seite XY . Wenn man den Lotfußpunkt von E auf AD mit E' bezeichnet, so ist EE' Mittellinie im Trapez $AXYD$. Also ist die gesuchte Fläche $\overline{AD} \cdot \overline{EE'} = 72$.



Aufgabe 13J / 3S. Für wie viele natürliche Zahlen a mit $1 \leq a \leq 2012$ ist a^a eine Quadratzahl?

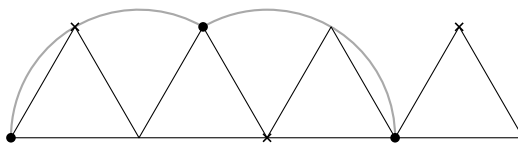
Ergebnis: 1028

Lösungsweg: Für alle geraden Zahlen $a = 2k$ mit $1 \leq k \leq 1006$ ist $a^a = (2k)^{2k} = ((2k)^k)^2$ eine Quadratzahl. Für ungerade Zahlen ist a^a nur dann eine Quadratzahl, wenn a selbst eine Quadratzahl ist. Wegen $44^2 < 2012 < 45^2$ kommen von den ungeraden Zahlen noch 22 Quadratzahlen dazu, so dass es insgesamt $1006 + 22 = 1028$ solche a gibt.

Aufgabe 14J / 4S. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 steht so auf dem Boden, dass eine Höhe senkrecht zum Boden ist. Eine Ecke dieses Dreiecks wird rot gefärbt. Das Dreieck wird nun in der Ebene des Dreiecks dreimal über eine Ecke abgerollt. Wie lang ist die Trajektorie der roten Ecke? (Trajektorie = Weg, den diese Ecke zurücklegt)

Ergebnis: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$

Lösungsweg: Der Weg der roten Ecke beschreibt zwei Kreisbögen, jeweils mit einem $\frac{1}{3}$ einer vollen Umdrehung eines Kreises. Einmal bleibt die Ecke an der Stelle, wo sie gerade ist, wenn um diese Ecke gedreht wird. Also ist der Gesamtweg $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$.



Aufgabe 15J / 5S. Welches ist die kleinste durch 225 teilbare positive Zahl, die nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht?

Ergebnis: 11111111100

Lösungsweg: Aufgrund der Teilbarkeit durch 25 muss die Zahl zwei Nullen am Ende haben. Außerdem muss sie durch 9 ($225 = 9 \cdot 25$) teilbar sein und aufgrund der Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 9 muss die Anzahl der Ziffern 1 durch 9 teilbar sein. Die kleinste Zahl mit diesen Eigenschaften ist 11111111100.

Aufgabe 16J / 6S. Bill ist alt genug, um wählen zu dürfen, aber nicht alt genug, um sein Pensionskonto benutzen zu dürfen (Bill's Alter ist zwischen 18 und 70). Man weiß, dass vor x Jahren das Quadrat seines damaligen Alters gleich seinem Alter, das er in x Jahren haben wird, ist. Sein Alter ist außerdem eine Quadratzahl. Finde x .

Ergebnis: 28

Lösungsweg: Bill's Alter a ist das arithmetische Mittel der natürlichen Zahl $a - x$ und deren Quadrat $a + x$. Deshalb sind alle möglichen Werte für a die Zahlen $\frac{1}{2}(6 + 36) = 21$, $\frac{1}{2}(7 + 49) = 28$, $\frac{1}{2}(8 + 64) = 36$, $\frac{1}{2}(9 + 81) = 45$, $\frac{1}{2}(10 + 100) = 55$ und $\frac{1}{2}(11 + 121) = 66$. Die einzige Quadratzahl darunter ist 36, also ist $x = 36 - 8 = 8^2 - 36 = 28$.

Anmerkung: Der Ansatz $v + x = (v - x)^2$ liefert eine quadratische Gleichung in v mit den Lösungen

$$v_{1,2} = \frac{2x + 1 + \sqrt{8x + 1}}{2}.$$

Über die Ganzzahligkeitsbedingung und die Tatsache, dass v eine Quadratzahl ist, erhält man ebenfalls $v = 36$ und $x = 28$.

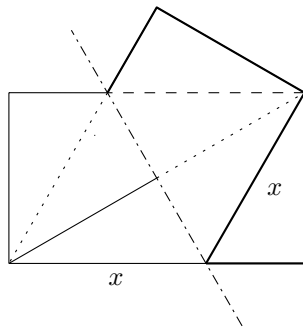
Aufgabe 17J / 7S. Wir falten die linke untere Ecke eines rechteckigen Papiers auf seine rechte obere Ecke. Wir erhalten dadurch drei Dreiecke. Deren Seiten sind die Kanten des Papiers und die Linie, an der gefaltet wurde. Für welches Seitenverhältnis des Papiers ist das Verhältnis der Flächen der Dreiecke $1 : 2 : 1$?

Ergebnis: $\sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$ oder umgekehrt.

Lösungsweg: Damit die zwei Ecken zusammenfallen, muss man an einer Geraden falten, die durch den Mittelpunkt des Rechtecks geht und auf einer Diagonalen senkrecht steht. Das entstehende Fünfeck besteht aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken und einem gleichschenkligen Dreieck dazwischen. Die Diagonale teilt dieses gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Betrachtet man die vorausgesetzten Verhältnisse der Flächen, so sieht man, dass alle vier Dreiecke kongruent sind. Also ist der Winkel an der gemeinsamen Ecke $\frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$. Deshalb ist das mittlere Dreieck sogar gleichseitig. Aus dem Verhältnis aus Höhe und Seite im gleichseitigen Dreieck erhält man das Verhältnis

$$\frac{\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

wobei mit x die Seite des gleichseitigen Dreiecks bezeichnet wurde.



Aufgabe 18J / 8S. Wie viele durch 6 teilbare dreistellige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle größer als 4 sind?

Ergebnis: 16

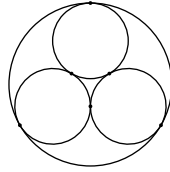
Lösungsweg: Da die Zahl durch 2 teilbar sein muss, muss sie auf 6 oder 8 enden. Da sie auch durch 3 teilbar sein muss, gilt dies auch für die Quersumme. Das bedeutet, dass die Summe der ersten beiden Ziffern Rest 1 lässt, falls die letzte Ziffer 8 ist, und Rest 0, wenn die letzte Ziffer 6 ist. Rest 1 kann erreicht werden durch die Summe von Zahlen mit den Resten $2 + 2$ oder $3 + 1$. Da die Reihenfolge der Ziffern eine Rolle spielt, gibt es also $4 + 4 = 8$ Möglichkeiten. Analog kann der Rest 0 durch $0 + 0$ bzw. $2 + 1$ erhalten werden, was wiederum $4 + 4 = 8$ Kombinationen ergibt. Insgesamt gibt es also 16 Zahlen, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen.

Zweite Lösung: Systematisches Probieren ergibt

558, 576, 588
666, 678, 696
756, 768, 786, 798

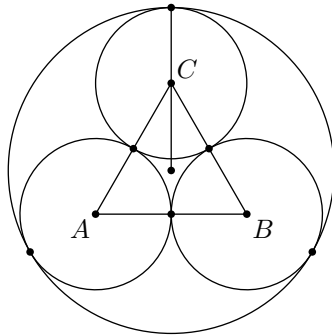
und wegen der erforderlichen Teilbarkeit durch 3 erhalten wir diejenigen, die mit 8 bzw. 9 starten, durch Addition von 300 aus denen, die mit 5 bzw. 6 starten. Also gibt es $3 + 3 + 4 + 3 + 3 = 16$ Möglichkeiten.

Aufgabe 19J / 9S. Drei Kreise mit Radius 1 berühren sich paarweise von außen. Ein größerer Kreis k wird von diesen dreien von innen berührt. Finde den Radius des Kreises k .



Ergebnis: $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Lösungsweg: Mit A, B, C werden die Mittelpunkte der kleinen Kreise bezeichnet und mit S der des großen. A, B, C sind Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Länge 2. Die Höhen schneiden sich in S und haben die Länge $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. In einem gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch zugleich Seitenhalbierende. Deshalb ist $\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$. Der Radius des Kreises k ist also $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Aufgabe 20J / 10S. Sei n eine natürliche Zahl. Wenn n^2 an der Zehnerstelle eine 7 hat, welche Ziffern sind dann auf der Einerstelle möglich?

Ergebnis: 6

Lösungsweg: Sei $n = 10x + y$ für eine nicht negative ganze Zahl x und eine Ziffer y . Dann ist $n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$. Die Zehnerstelle ist genau dann ungerade, wenn die Zehnerstelle von y^2 ungerade ist. Dies ist nur für 16 und 36 der Fall, so dass die Endziffer von n^2 nur 6 sein kann.

Zweite Lösung: Für jede Quadratzahl n^2 gelten die folgenden beiden Gleichungen:

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 5, 6, 9 \pmod{10},$$

$$n^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}.$$

Wenn die Zehnerstelle 7 ist, so erfüllen nur Zahlen, die auf 76 enden, beide Bedingungen.

Aufgabe 21J / 11S. Wenn wir die Zahlen $1, 2, \dots, n$ in irgendeiner Reihenfolge hintereinander schreiben, so erhalten wir eine n -Kette. Z.B. ist

3764581121910

eine n -Kette der Länge 11. Wie lautet das kleinste $n > 1$, für das es eine n -Kette gibt, die eine Palindromzahl ist?

Ergebnis: 19

Lösungsweg: Folgende 19-Kette ist ein Palindrom:

9|18|7|16|5|14|3|12|1|10|11|2|13|4|15|6|17|8|19.

Wir zeigen, dass 19 der kleinste mögliche Wert für n ist. Nur eine Ziffer kann in einer n -Kette, die ein Palindrom ist, mit einer ungeraden Anzahl vorkommen, nämlich die mittlere. Für $n \leq 9$ kann diese Bedingung offensichtlich nicht erfüllt werden. Für $10 \leq n \leq 18$ kommen die Ziffern 0 und 9 jeweils genau einmal vor, so dass eine n -Kette kein Palindrom sein kann.

Aufgabe 22J / 12S. Finde alle Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen, die die Gleichungen

$$(x + y)(x + y + z) = 120, \quad (y + z)(x + y + z) = 96 \quad \text{und} \quad (x + z)(x + y + z) = 72$$

erfüllen.

Ergebnis: $(4, 6, 2)$

Lösungsweg: Addiert man alle drei Gleichungen, so erhält man

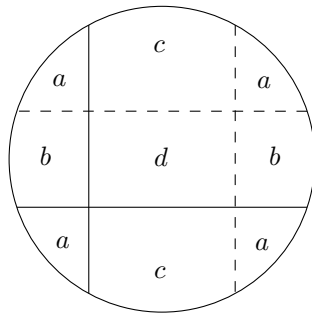
$$\begin{aligned} (x + y + z)(z + y + x + z + x + y) &= 288 \\ \iff 2(x + y + z)^2 &= 288 \\ \iff (x + y + z)^2 &= 144 \\ \iff x + y + z &= 12, \end{aligned}$$

da x, y, z positive Zahlen sind. Rücksubstitution ergibt die Gleichungen $(12 - z) = 10$, $(12 - x) = 8$ und $(12 - y) = 6$, woraus leicht die Lösung $(4, 6, 2)$ folgt.

Aufgabe 23J / 13S. Gegeben ist ein Kreis mit Radius 1 und zwei aufeinander senkrecht stehenden Sehnen, die den Kreis in 4 Teile zerlegen. Wir färben den kleinsten und den größten Teil schwarz und lassen den Rest weiß. Wenn wir wissen, dass die weißen Flächen zusammen genau so groß sind wie die schwarzen, was ist dann der maximale Abstand der längeren Sehne vom Kreismittelpunkt?

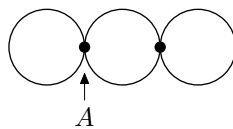
Ergebnis: 0

Lösungsweg: Zeichne zwei Sehnen, die punktsymmetrisch zu den bereits vorhandenen bzgl. des Kreismittelpunktes liegen. Wenn nun die zwei Flächen gleich groß sein sollen, so muss mindestens eine Sehne durch den Mittelpunkt gehen.



Der maximale Abstand der längeren Sehne vom Kreismittelpunkt ist also 0.

Aufgabe 24J / 14S. Ein Wachmann hat drei Objekte, z.B. Gebäude, zu bewachen. Er muss dabei, wie in der Abbildung dargestellt, bestimmten Wegen folgen. Wie viele Kontrollgänge gibt es, wenn jeder in A beginnen muss, jeder Bereich des Weges genau einmal besucht werden muss und der Wachgang wieder in A beendet werden muss? (Die Durchlaufrichtung soll berücksichtigt werden!)



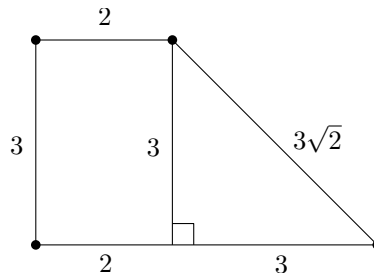
Ergebnis: 16

Lösungsweg: Der Wachmann muss um das erste Gebäude entweder am Anfang oder ganz am Schluß seines Wachganges gehen (in einer der beiden möglichen Richtungen), was vier Möglichkeiten ergibt. Für jedes der beiden verbleibenden Gebäude kann er unabhängig voneinander entscheiden, ob er es im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhzeigersinn umrundet. Diese Entscheidungen legen die Route eindeutig fest, so dass $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ die gesuchte Lösung ist.

Aufgabe 25J / 15S. Ein Trapez hat die Seitenlängen 5 , $3\sqrt{2}$, 2 und 3 . Die parallelen Seiten sind die mit den Längen 5 und 2 . Wie groß ist die Fläche des Trapezes?

Ergebnis: $\frac{21}{2}$

Lösungsweg: Eine Parallele zur kürzeren Seite durch eine weitere Ecke des Trapezes teilt dieses in ein Parallelogramm und ein Dreieck mit den Seiten 3 , $5 - 2 = 3$ und $3\sqrt{2}$, welches deshalb gleichschenkelig und rechtwinklig ist. Die Fläche ist deshalb einfach $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = \frac{21}{2}$.



Aufgabe 26J / 16S. Es stehen 42 Leute in einer Reihe. Sie wollen sich der Größe nach ordnen, so dass der größte vorne steht. In einem Zug dürfen zwei nebeneinander stehende Personen die Plätze tauschen. Wie viele Züge sind höchstens notwendig, damit sich die Leute wie gewünscht aufstellen können?

Ergebnis: $\frac{42 \cdot 41}{2} = 21 \cdot 41 = 861$

Lösungsweg: Sei H die Anzahl der (nicht unbedingt direkt benachbarten) Paare, für die die größere Person hinter der kleineren steht. H kann in einem Zug höchstens um 1 verringert werden. Wenn $H > 0$ ist, dann gibt es einen Zug, der H verringert. Bei n Personen ist H am Anfang höchstens $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$, wenn die Leute genau entgegengesetzt zur geforderten Ordnung stehen. Also braucht man für die gewünschte Anordnung höchstens $42 \cdot 41/2 = 861$ Züge.

Aufgabe 27J / 17S. Peter lebt in Sikinien, wo man nur mit Münzen, die die Werte 7 und 11 haben, bezahlen kann. Wenn Peter genug Münzen beider Sorten hätte, was ist dann der größte Preis, den er nicht damit bezahlen kann?

Ergebnis: 59

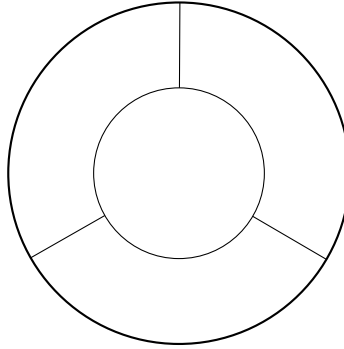
Lösungsweg: Wenn er einen Preis bezahlen kann, dann kann er auch diesen Preis plus ein Vielfaches von 7 bezahlen. Also ist es ausreichend, die Vielfachen von 11 und ihre Reste mod 7 zu untersuchen. Es ist $0 \bmod 7 = 0$, $11 \bmod 7 = 4$, $22 \bmod 7 = 8$, $33 \bmod 7 = 5$, $44 \bmod 7 = 2$, $55 \bmod 7 = 6$ und $66 \bmod 7 = 3$. Ab 66 kann er alle Beträge bezahlen, da sich ab dann die Reste wiederholen. Also ist $66 - 7 = 59$ der größte Preis, den er nicht bezahlen kann.

Allgemein: Haben die Münzen die teilerfremden Werte p und q , so ist $(p - 1) \cdot (q - 1) - 1$ der höchste Preis, der nicht mit diesen Münzen bezahlt werden kann.

Aufgabe 28J / 18S. Ein Kreis mit Radius 1 wird in vier Teile zerlegt. Was ist der kleinste Umfang, den das Teil mit der größten Fläche haben kann? Wenn es mehr als ein Teil mit der größten Fläche gibt, so betrachte man das mit dem kleinsten Umfang.

Ergebnis: π

Lösungsweg: Dasjenige geometrische Objekt, das bei gegebener Fläche den kleinsten Umfang hat, ist ein Kreis. Also muss man nur noch den Kreis in vier gleich große Teile aufteilen, wobei ein Teil wieder ein Kreis mit einem Viertel der ursprünglichen Fläche ist: Also entstehen ein Kreis mit dem halben Radius des gegebenen und drei andere Teile mit gleicher Fläche.



Deshalb ist π der gesuchte Umfang.

Aufgabe 29J / 19S. Finde die Summe aller reellen Zahlen a für die die Gleichungen $x^2 + ax + 1 = 0$ und $x^2 + x + a = 0$ mindestens eine gemeinsame reelle Lösung haben.

Ergebnis: -2

Lösungsweg: Sei x eine gemeinsame Lösung. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $(a-1)(x-1) = 0$. Also ist $x = 1$ oder $a = 1$. Falls $x = 1$ ist, ist $a = -2$. Im anderen Fall haben die Gleichungen keine reelle Lösung.

Aufgabe 30J / 20S. Wie viele 8-stellige Zahlen gibt es, so dass nach dem Streichen der ersten Ziffer (von links) eine Zahl entsteht, die $\frac{1}{35}$ der ursprünglichen beträgt?

Ergebnis: 0

Lösungsweg: Sei m eine Zahl, die man nach dem Streichen der ersten Ziffer erhält, und sei c die gestrichene Ziffer. Die ursprüngliche Zahl ist dann $c \cdot 10^7 + m$ und es muss die Gleichung $m = \frac{1}{35}(c \cdot 10^7 + m)$ gelten. Diese kann vereinfacht werden zu $17m = c \cdot 2^6 \cdot 5^7$. Nun ist aber die linke Seite durch 17 teilbar und die rechte nicht, da c eine Ziffer mit $c \leq 9$ ist. Also gibt es keine solchen Zahlen.

Aufgabe 31J / 21S. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen. Eine der Seiten hat Länge 2012. Welche Fläche kann es maximal haben?

Ergebnis: $1006 \cdot (1006^2 - 1) = 1018107210$

Lösungsweg: Damit die Fläche maximal wird, muss die Seite der Länge 2012 eine Kathete sein. Der Satz des Pythagoras ergibt $b^2 + 2012^2 = c^2 \iff 2012^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$. Die Fläche ist maximal, wenn $2012 \cdot b/2$ maximal ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn die Differenz zwischen Hypotenuse und Kathete b minimal ist. Wählt man $c = b + 1$, so passen in obiger Gleichung die Paritäten nicht. Wählt man $c = b + 2$, so erhalten wir eine einfache Gleichung für b :

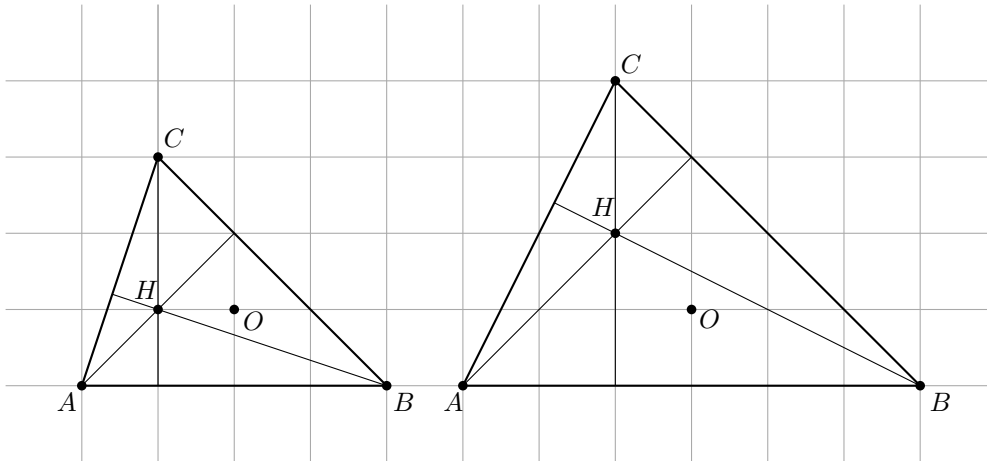
$$\begin{aligned} 2012^2 &= c^2 - b^2 = (c+b)(c-b) \\ &= (2b+2) \cdot 2 \\ \iff b &= 1006^2 - 1 \end{aligned}$$

Deshalb ist die maximale Fläche $1006 \cdot (1006^2 - 1)$.

Aufgabe 32J / 22S. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O und Höhenschnittpunkt H in einem kartesischen Koordinatensystem. Keine zwei dieser fünf Punkte fallen zusammen und alle haben ganzzahlige Koordinaten. Was ist der zweitgrößte mögliche Radius eines Umkreises des Dreiecks ABC ?

Ergebnis: $\sqrt{10}$

Lösungsweg: Wir untersuchen verschiedene Umkreisradien. Für 1 , $\sqrt{2}$, 2 und $2\sqrt{2}$ fällt jeweils eine Ecke mit dem Höhenschnittpunkt zusammen. Für $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ kann man die gewünschten Dreiecke konstruieren. Deshalb ist $\sqrt{10}$ der gesuchte Wert.



Aufgabe 33J / 23S. Finde die größte natürliche Zahl n , so dass $7^{2048} - 1$ durch 2^n teilbar ist.

Ergebnis: 14

Lösungsweg: Wiederholte Anwendung von $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ergibt $7^{2048} - 1 = (7 - 1)(7 + 1)(7^2 + 1)(7^4 + 1) \dots (7^{1024} + 1)$. Bis auf $(7 + 1)$ sind alle Faktoren des Produkts genau einmal durch 2 teilbar, da $7^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ für $n \geq 1$. Also ist 14 die gesuchte Lösung.

Aufgabe 34J / 24S. Wenn man das Querprodukt einer Zahl berechnet, davon wieder das Querprodukt usw., so erhält man nach endlich vielen Schritten eine einstellige Zahl. Diese Anzahl der Schritte wird *Persistenz* der Zahl genannt. Z.B. hat die Zahl 723 Persistenz 2, da $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ und $4 \cdot 2 = 8$ ist. Finde die größte gerade Zahl mit paarweise verschiedenen Ziffern, die Persistenz 3 hat.

Ergebnis: 98764312

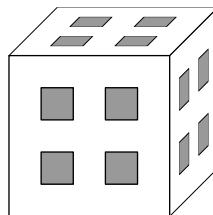
Lösungsweg: Die größte Zahl mit von Null verschiedenen, unterschiedlichen Ziffern ist 987654321. Diese hat aber nur Persistenz 2, da die 5 und gerade Zahlen vorkommen, so dass man im zweiten Schritt 0 erhält. Wir streichen die 5 und vertauschen die letzten beiden Ziffern, um eine gerade Zahl zu erhalten. Dann ist $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 72576$, $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 2940$ und $2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 0 = 0$ und somit die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 35J / 25S. Die Seiten AD und BC eines konvexen Vierecks (ohne parallele Seiten) werden verlängert, so dass sie sich in einem Punkt E scheiden. H und G seien die Mittelpunkte von BD und AC . Finde das Verhältnis zwischen der Fläche des Dreiecks EGH und der Fläche des Vierecks $ABCD$. (Hinweis: Das Verhältnis ist gleich für alle Vierecke mit nicht parallelen Seiten.)

Ergebnis: 1 : 4

Lösungsweg: Betrachtet man ein Viereck, bei dem die Ecken C und D zusammenfallen, so ist GM Mittellinie im Dreieck ABC und das Verhältnis ist offensichtlich $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 36J / 26S. Würfeltermiten bohren von drei Seiten aus jeweils vier quadratische, gerade Tunnel der Seitenlänge 1 (wie in der Abbildung zu sehen) und haben dann den Würfel verlassen. Wenn man den Restkörper mit einer Anti-Termitenfarbe anstreichen will, wie viel cm^2 müssen dann angestrichen werden, wenn der ursprüngliche Würfel Seitenlänge 5 cm hatte?



Ergebnis: 270

Lösungsweg: Angenommen, wir betrachten den Würfel von oben. In Tiefe 0 (also auf der oberen Seitenfläche des Würfels) sind es 21 cm^2 , in Tiefe 2 cm und 4 cm jeweils 12 cm^2 . Die Situation ist in alle sechs Richtungen die gleiche und man erhält insgesamt $(21 + 2 \cdot 12) \cdot 6 \text{ cm}^2 = 270 \text{ cm}^2$.

Aufgabe 37J / 27S. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir stehen am äußersten linken Punkt des Kreises. Man kann nur nach rechts oder nach oben gehen. Wie lang ist die längste Trajektorie, die man so innerhalb des Kreises gehen kann?

Ergebnis: $1 + \sqrt{2}$

Lösungsweg: Zu jeder Trajektorie gibt es eine Trajektorie gleicher Länge, die zuerst nur nach rechts geht und dann nur nach oben. Es genügt also solche Trajektorien zu betrachten. Die längste Trajektorie muss sicherlich durch den Mittelpunkt gehen. Wir bezeichnen mit a die Strecke, die man vom Mittelpunkt aus nach rechts geht, und mit b diejenige, die man nach oben geht. Da der längste Weg an der Kreislinie enden wird, gilt $a^2 + b^2 = 1$, wobei wir $a + b$ maximieren müssen. Dies ist gleichbedeutend mit der Maximierung von $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 + 2ab$. Wegen der Ungleichung $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ergibt sich $2ab \leq a^2 + b^2 = 1$. Gleichheit erhält man für $a = b$, woraus $a = b = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ folgt. Addiert man noch den Abstand vom äußersten linken Punkt zum Mittelpunkt, so erhält man das Ergebnis $1 + \sqrt{2}$.

Aufgabe 38J / 28S. Welches ist der größte Teiler von $15! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15$, der beim Teilen durch 6 Rest 5 lässt?

Ergebnis: $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 175175$

Lösungsweg: Der Rest eines Produktes ist gleich dem Produkt der Reste der einzelnen Faktoren, z.B. $7! \bmod 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Um Rest 5 zu erhalten, darf die Zahl weder durch 2 noch durch 3 teilbar sein, d.h. man muss alle Faktoren 2 und 3 von $15!$ ausschließen. Danach bleibt die Zahl $5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, die aber Rest 1 ergibt. Jeder Faktor ergibt entweder Rest 1 oder 5 mod 6, so dass man noch einen mit Rest 5 eliminieren muss. Der kleinste davon ist 5. Also ist das Ergebnis $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 175175$.

Aufgabe 39J / 29S. Gegeben sei ein Würfel und 27 seiner Punkte: Die Ecken, die Mittelpunkte der Kanten, die Mittelpunkte der Seitenflächen und der Mittelpunkt des Würfels. Wie viele Gerade gehen durch genau drei dieser Punkte?

Ergebnis: 49

Lösungsweg: Man teilt die Geraden in drei Fälle auf: Solche, die durch den Mittelpunkt des Würfels gehen ($9 + 8/2 = 13$), solche, die durch den Mittelpunkt der Seitenfläche, aber nicht durch den Mittelpunkt des Würfels gehen (4 auf jeder Seitenfläche) und solche, die entlang einer Kante verlaufen (12). Dies ergibt insgesamt $13 + 24 + 12 = 49$.

Aufgabe 40J / 30S. Einen Wettbewerb, der k Tage dauerte, haben n Teilnehmer bestritten. An jedem Tag hat jeder Teilnehmer eine ganze Zahl an Punkten zwischen 1 und n erhalten, wobei die Grenzen eingeschlossen waren. Keine zwei Teilnehmer hatten am gleichen Tag eine gleiche Punktzahl. Am Ende des Wettbewerbes (am Abend des k -ten Tages) hatte jeder Teilnehmer 26 Punkte (wenn man alle Punkte des gesamten Wettbewerbes addiert). Bestimme die Summe aller n für die dies möglich ist (egal für welches k).

Ergebnis: $1 + 3 + 12 + 25 = 41$

Lösungsweg: Es ist klar, dass $n < 26$ sein muss. An jedem Tag werden $\frac{n(n+1)}{2}$ Punkte vergeben, insgesamt also $k \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Diese Summe muss aber gleich $26 \cdot n$ sein. Gleichsetzen ergibt $k(n+1) = 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$. Durch Probieren findet man, dass es für $k \in \{2, 4, 13, 26\}$ eine mögliche Punkteverteilung gibt und für $k \in \{1, 52\}$ nicht. Die Summe aller möglichen n ist dann $(26 - 1) + (13 - 1) + (4 - 1) + (2 - 1) = 41$.

Aufgabe 41J / 31S. Eine zylinderförmige Torte wird mit 5 geraden Schnitten aufgeteilt. In wie viele Teile kann die Torte auf diese Weise zerschnitten werden? Bei 3 Schnitten kann man die Torte beispielsweise in 8 Teile zerlegen.

Ergebnis: 26

Lösungsweg: Der Einfachheit halber betrachtet man einen dreidimensionalen Raum, der von Ebenen geschnitten wird. Wenn der Raum irgendwie zerschnitten ist, dann kommen durch die nächste Ebene so viele neue Teile hinzu wie sie durchschnitten hat. Man betrachtet also die Schnittgeraden der alten Ebenen mit der neuen. Die Anzahl der neuen Teile ist gleich der Anzahl Teile, in die die Geraden die neue Ebene zerlegen. Deshalb ist $v_n = v_{n-1} + p_{n-1}$, wobei v_n das Ergebnis für n Schnitte ist und p_n die Anzahl der neuen Teile, in die wir eine Ebene durch n Geraden zerlegen können. Durch einfaches Zeichnen auf Papier kann man die maximalen Werte für p_1, p_2, p_3 und p_4 finden. Sie lauten 2, 4, 7 und 11. Mit $v_1 = 2$ erhalten wir das Ergebnis $2 + 2 + 4 + 7 + 11 = 26$.

Hinweis: Allgemein lautet die Formel

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

Aufgabe 42J / 32S. Der achtfach-verzweigte Stern (Stella octangula) entsteht dadurch, dass man acht reguläre Tetraeder auf die Seiten eines (regulären) Oktaeder setzt. Alle Seiten der Tetraeder und des Oktaeders haben Seitenlänge 1. Wie groß ist das Volumen von Stella octangula?

Ergebnis: $\sqrt{2}$

Lösungsweg: Man hat zwei Arten von Volumenkörper vorliegen: Ein reguläres Tetraeder der Seitenlänge 1 und eine vierseitige Pyramide, bei der ebenfalls alle Seiten die Länge 1 haben. Die Grundfläche der Pyramide ist 1 und die Höhe erhält man mit dem Satz des Pythagoras als

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so dass das Volumen also $\frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}$ ist. Die Grundfläche eines Tetraeders (gleichseitiges Dreieck) ist $\frac{\sqrt{3}}{4}$ und die Höhe

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

so dass sich das Volumen zu $\frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 4}$ ergibt. Durch Aufsummieren erhält man $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \sqrt{2}$.

Aufgabe 43J / 33S. Ein Tramper geht die Straße entlang. Die Wahrscheinlichkeit, dass er in den nächsten 20 Minuten ein Auto sieht, beträgt $\frac{609}{625}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in den nächsten 5 Minuten ein Auto sieht, wenn die Wahrscheinlichkeit ein Auto zu sehen zu jedem Zeitpunkt gleich ist?

Ergebnis: $3/5$

Lösungsweg: Die Wahrscheinlichkeit, dass er in den nächsten 20 Minuten kein Auto sieht, ist $1 - \frac{609}{625} = \frac{16}{625}$. Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass er in den nächsten 5 Minuten kein Auto sieht, p ist, dann ist sie für 20 Minuten p^4 . Also ist $p = \frac{2}{5}$ und die Wahrscheinlichkeit ein Auto zu sehen ist dann $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 44J / 34S. Ein Angreifer und ein Moderator editieren einen Wikipedia-Artikel. Zu Beginn war der Artikel fehlerfrei und der Angreifer fügte jeden Tag einen Fehler ein. Am Ende eines jeden Tages findet der Moderator jeden einzelnen Fehler des Artikels mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Artikel nach drei Tagen fehlerfrei ist?

Ergebnis: $2/3 \cdot 8/9 \cdot 26/27 = \frac{2^5 \cdot 13}{3^6}$

Lösungsweg: Für jeden Fehler bestimmt man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er am Ende nicht mehr da ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler k Tage lang da ist, beträgt $(\frac{1}{3})^k$, und die Wahrscheinlichkeit, dass er nach k Tagen nicht mehr da ist, ist dann $1 - (\frac{1}{3})^k$. Die Ereignisse, einen einzelnen Fehler nicht zu entdecken, sind unabhängig. Deshalb dürfen wir multiplizieren:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{27}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{26}{27} = \frac{2^5 \cdot 13}{3^6}.$$

Aufgabe 45J / 35S. Gegeben sei ein ausreichend großer Stapel roter, blauer und gelber Karten. Wir können folgende Anzahl an Punkten sammeln:

- Für jede rote Karte einen Punkt,
- für jede blaue Karte das Doppelte der Anzahl roter Karten an Punkten,
- für jede gelbe Karte das Dreifache der Anzahl blauer Karten an Punkten.

Was ist die größte Punktzahl, die wir mit 15 Karten erzielen können?

Ergebnis: 168

Lösungsweg: Sei R die Anzahl der roten Karten, B die Anzahl der blauen Karten und G die Anzahl der gelben Karten. Jede rote Karte trägt $1 + 2B$ zum Gesamtergebnis bei, nämlich 1 für sich selbst und 2 für jede blaue Karte. Jede gelbe Karte trägt $3 \cdot B \cdot G$ zum Gesamtergebnis bei. Insgesamt lassen sich also

$$R + 2 \cdot R \cdot B + 3 \cdot B \cdot G = R(1 + 2 \cdot B) + 3 \cdot B \cdot G$$

Punkte erzielen.

Ist $B = 0$, so ist das maximale Ergebnis 15. Ist $B = 1$, so ist das Ergebnis immer

$$R + 2 \cdot R + 3 \cdot G = 3 \cdot (R + G) = 42.$$

Ist $B > 1$, so ist es besser alle roten Karten durch gelbe zu ersetzen. Also ist es in diesem Fall sinnvoll $R = 0$ zu wählen, so dass für $B > 1$ das Gesamtergebnis dann $3 \cdot B \cdot G$ ist. Dann ist aber $B + G = 15$, weshalb das Maximum für $B = 7$ und $G = 8$ erreicht wird, was das Gesamtergebnis 168 ergibt.

Aufgabe 46J / 36S. Matthias hat einen 20-seitigen Würfel und sein Freund Christian hat drei normale (sechseckige) Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Wurf der Würfel von Matthias eine höhere Augenzahl hat als die Summe der Augenzahlen auf Christians Würfeln?

Ergebnis: $\frac{19}{40}$

Lösungsweg: Zunächst erkennt man, dass beide Würfel eine symmetrische Verteilung haben, d.h. die Wahrscheinlichkeit beim 20-seitigen Würfel x zu erhalten ist gleich der Wahrscheinlichkeit $21 - x$ für $1 \leq x \leq 20$ zu erhalten. Analog ist die Wahrscheinlichkeit, bei den drei sechseckigen Würfeln y zu erhalten, gleich der Wahrscheinlichkeit $21 - y$ für $3 \leq y \leq 18$ zu bekommen. Auf gleiche Weise kann man schließen, dass beide mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnen. Deshalb ist die gesuchte Antwort $\frac{1-p}{2}$, wobei p die Wahrscheinlichkeit eines Unentschiedens ist. Und diese ist $\frac{1}{20}$, denn was immer Christian würfelt, Matthias hat immer die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$, das gleiche zu würfeln. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{40}$.

Aufgabe 47J / 37S. Gegeben sei eine Tabelle mit 10 auf 10 Feldern. Die Zeilen bzw. Spalten sind von links nach rechts bzw. von oben bis unten von 1 bis 10 durchnummeriert. In jedes Feld der Tabelle wird das Produkt aus Zeilen- und Spaltennummer geschrieben. Ein Reisender steht an der linken oberen Ecke und will zur rechten unteren Ecke kommen. Er darf nur nach rechts oder unten, aber nicht diagonal gehen. Die *Reisezahl* eines Reisenden ist das Produkt der Felder, die er betreten hat, einschließlich des ersten und des letzten. Wie lautet der größte gemeinsame Teiler aller möglichen Reisezahlen?

Ergebnis: $10 \times 10! \cdot 10! = 2^{17} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^2$

Lösungsweg: Auf jedem Weg sammelt der Reisende jede der Zahlen $2, 3, \dots, 9$ mindestens zweimal, einmal für die Spalte und einmal für die Zeile. Außerdem gibt es für jedes i außer 1 und 10 einen Weg, der die i -te Zeile und die i -te Spalte genau einmal kreuzt. Deshalb können $2, 3, \dots, 9$ jeweils nur genau zweimal im Resultat vorkommen. In jeder Reisezahl muss 10 mindestens dreimal vorkommen (der Reisende muss das Feld rechts unten betreten und vom vorherigen sammelt er ebenfalls eine 10). Es ist leicht zu sehen, dass es einen Weg gibt, der nur dreimal 10 enthält. Deshalb ist das gesuchte Ergebnis $10 \times 10! \cdot 10! = 2^{17} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^2$.

Aufgabe 48J / 38S. Gegeben ist ein Dreieck mit Höhen der Länge 3, 4 und 6. Wie groß ist sein Umfang?

Ergebnis: $\frac{72}{\sqrt{15}} = \frac{24\sqrt{15}}{5}$

Lösungsweg: Aufgrund der Flächenformel $A = \frac{g \cdot h}{2}$ kann man schließen, dass das gegebene Dreieck ähnlich ist zu einem Dreieck mit den Seiten 2, 3 und 4. Das Dreieck habe also die Seitenlängen $2a$, $3a$ und $4a$ und somit die Fläche $A = \frac{2a \cdot 6}{2} = 6a$. Benutzt man die Formel von Heron zur Berechnung der Fläche, so folgt

$$A = \sqrt{s(s-2a)(s-3a)(s-4a)}$$

mit $s = \frac{2a+3a+4a}{2} = \frac{9a}{2}$, also

$$A = \frac{a^2}{4} \sqrt{135}.$$

Gleichsetzen ergibt

$$6a = \frac{a^2}{4} \sqrt{135},$$

also $a = \frac{24}{\sqrt{135}}$. Der Umfang ist dann $9a = \frac{72}{\sqrt{15}}$.

Aufgabe 49J / 39S. Finde die größte natürliche Zahl $n \leq 4\,000\,000$, für die $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}}$ rational ist.

Ergebnis: $1999 \cdot 2000 = 3998000$

Lösungsweg: Sei

$$s = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \dots}}},$$

dann ist $s = \sqrt{n + s}$. Löst man die entsprechende quadratische Gleichung in s , so erhält man

$$s = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4n}}{2},$$

und da s rational sein soll, gibt es eine rationale Zahl a mit $1 + 4n = a^2$. Hieraus erhält man leicht $n = \frac{1}{4}(a^2 - 1)$. Da $n \in \mathbb{N}$ ist, muss auch $a \in \mathbb{N}$ gelten (wäre $a = p/q$ mit teilerfremden p und q , $q \neq 1$, so wäre $n = (p^2 - q^2)/4q^2$ und q müßte p teilen, was einen Widerspruch ergibt). Wegen $n = \frac{a-1}{2} \cdot \frac{a+1}{2}$ muss a ungerade sein. Außerdem folgt aus $n \leq 4\,000\,000$, dass $\frac{a+1}{2} = 2000$ sein muss. Also ist $n = 1999 \cdot 2000$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 50J / 40S. Gegeben sei ein 3×3 Maxi-Quadrat, das in neun kleinere quadratische Fliesen aufgeteilt ist. Jede Fliese ist in vier kleine Quadrate aufgeteilt, in die die Zahlen 1, 2, 3, und 4 je genau einmal geschrieben wurden. Zwei Fliesen können sich nur dann berühren, wenn die berührenden Quadrate die gleichen Zahlen enthalten (wie bei Domino). Wie viele solche Maxi-Quadrate gibt es?

4	3	3	4	4	2
1	2	2	1	1	3

• • •

Ergebnis: $24 \cdot 7 = 168$

Lösungsweg: Als erstes wählt man für die Fliese in der Mitte die Zahlen 1, 2 und 3, 4. Die Koordinaten des Quadrats links oben seien $(1, 1)$. Mit A und B werden die beiden Zahlen bezeichnet, die die Koordinaten $(4, 1)$ und $(4, 6)$ haben. Also muss $A \in \{3, 4\}$ und $B \in \{1, 2\}$ gelten. Wenn das Paar (A, B) eines der Tupel $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(3, 1)$ ist, dann gibt es genau eine Möglichkeit den Rest des Maxi-Quadrats zu füllen. Im Fall $(A, B) = (4, 2)$ gibt es vier Möglichkeiten. Da es $4! = 24$ mögliche Fliesen in der Mitte gibt, ist das Ergebnis $24 \cdot 7 = 168$.

Aufgabe 51J / 41S. Andreas nennt seine Lieblingszahl *Ballon*. Für die Zahl *Ballon* gilt, dass

- die Quersumme doppelt so groß ist wie die Anzahl der Ziffern,
- sie nicht mehr als 12 Ziffern hat,
- die Ziffern abwechselnd gerade und ungerade sind (die erste Ziffer muss nicht gerade sein) und
- die um 1 größere Zahl durch 210 teilbar ist.

Finde die Zahl *Ballon* von Andreas.

Ergebnis: 1010309

Lösungsweg: Aus der Tatsache, dass der Nachfolger von *Ballon* durch $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar ist, folgt sofort, dass die letzte Ziffer von *Ballon* 9 sein muss. Die Quersumme von *Ballon* muss die Form $3k + 2$ haben wegen $210 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Aufgrund der ersten Voraussetzung ist die Quersumme gerade. Also ist sie von der Form $3k + 2$, gerade, größer als 9 und höchstens 24. Also kommen als Quersumme nur noch 14 und 20 in Frage, was 7 bzw. 10 Ziffern entspricht. Da sich gerade und ungerade Ziffern abwechseln, sind die kleinsten Lösungen 1010109 und 2101010109 mit den Quersummen 12 und 15, wenn man die Teilbarkeit durch 7 und den Rest 2 beim Teilen durch 3 unberücksichtigt lässt. Die Quersumme im zweiten Fall ist ungerade, weshalb eine Quersumme 20 nicht erreicht werden kann. Im ersten Fall müssen wir die Quersumme um 2 vergrößern, also eine Ziffer um 2 erhöhen. Nun prüft man leicht, dass 1010309 die einzige Lösung ist, indem man die Teilbarkeitsbedingung für 7 (und 3) wieder berücksichtigt.

Aufgabe 52J / 42S. Finde alle vierstelligen Zahlen n für die gilt, dass n die letzten vier Stellen von n^2 bildet.

Ergebnis: 9376

Lösungsweg: Es muss $n^2 - n = n(n - 1) = 10000x$ für eine natürliche Zahl x gelten. Selbstverständlich sind n und $n - 1$ teilerfremd. Da 5^4 die rechte Seite teilt, muss es auch die linke Seite teilen. Also teilt $5^4 = 625$ entweder n oder $n - 1$. Analog teilt $2^4 = 16$ entweder n oder $n - 1$. Also ist $n = 625k + b$ mit $k \in \{1, 2, \dots, 15\}$ und $b \in \{0, 1\}$. Nun lässt 625 beim Teilen durch 16 Rest 1, also n beim Teilen durch 16 Rest $k + b$. Also muss $k + b \in \{0, 1, 16\}$ gelten. Die Zahl n ist nur für $(k, b) = (15, 1)$ vierstellig, nämlich $n = 9376$, und man kann leicht überprüfen, dass n alle Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 53J / 43S. Bestimme die Summe aller fünfstelligen Palindrome.

Ergebnis: $900 \cdot 55000 = 49500000$.

Lösungsweg: Man kann eine bijektive Zuordnung zwischen fünfstelligen Palindromen und dreistelligen Zahlen herstellen. Zur Zahl abc gehört das Palindrom $abcba$ für eine Ziffer $a \neq 0$ und beliebigen Ziffern b und c . Die Summe aller Palindrome kann nun ziffernweise berechnet werden: Jedes a addiert $a \cdot 10001$, jedes b addiert $b \cdot 1010$ und jedes c addiert $c \cdot 100$ zu der Summe. Jeder mögliche Wert für a kommt 100-mal in der Summe vor, jeder mögliche Wert von b bzw. c 90-mal. Die Gesamtsumme ist also

$$(1 + 2 + \dots + 9)(100)(10001) + (0 + 1 + \dots + 9)(90)(1110) = 45004500 + 4495500 = 49500000.$$

Aufgabe 54J / 44S. Bestimme die Anzahl geordneter Quadrupel (a, b, c, d) ungerader positiver Zahlen, für die $a + b + c + d = 98$ gilt.

Ergebnis: $\binom{50}{3} = 19600$

Lösungsweg: Zunächst formuliert man das Problem neu, um die Bedingung, dass a, b, c, d ungerade sein müssen, zu eliminieren. Sei $a = 2A + 1$ und die restlichen Zahlen b, c, d analog ersetzt. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den Quadrupeln (a, b, c, d) ungerader positiver Zahlen, die $a + b + c + d = 98$ erfüllen, und den Quadrupeln (A, B, C, D) natürlicher Zahlen, die $A + B + C + D = \frac{1}{2}(98 - 4) = 47$ erfüllen. Der Rest ist eine Standardübung in Kombinationen mit Wiederholungen. Das Ergebnis ist $\binom{50}{3} = 19600$ (jedes Quadrupel (A, B, C, D) gehört zu einer Folge von 47 Bällen und 3 Trennlinien).

Aufgabe 55J / 45S. Bestimme die einzige 11-stellige Zahl, die

- mit der Ziffer 1 beginnt und
- eine Quadratzahl ergibt, wenn sie zweimal hintereinander geschrieben wird.

Ergebnis: $(10^{11} + 1) \cdot 16/121 = 16 \cdot 826446281 = 13223140496$

Lösungsweg: Sei n die gesuchte Zahl. Für die Zahl N , die durch zweimaliges Hintereinanderschreiben von n entsteht, gilt $N = n(10^{11} + 1) = n \cdot 11^2 \cdot D$ für eine natürliche Zahl D . Die Zahl D lässt sich berechnen aus

$$10^{11} + 1 = \underbrace{99 \dots 90}_{10} + 11 = 11 \cdot (9090909090 + 1) = 11^2 \cdot 826446281.$$

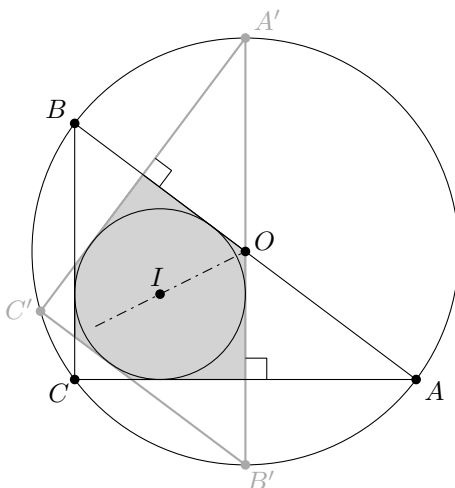
Aufgrund der zweiten Bedingung kann n geschrieben werden als $n = t^2 \cdot D$. Also ist $N = (11 \cdot t \cdot D)^2$. Nun muss t nur noch so gewählt werden, dass n elfstellig ist und mit der Ziffer 1 beginnt. Nur $t = 4$ erfüllt diese Bedingung und $16 \cdot 826446281 = 13223140496$.

Aufgabe 56J / 46S. Zwei verschiedene Dreiecke mit den Seitenlängen 18, 24, und 30 haben sowohl den Inkreis als auch den Umkreis gemeinsam. Wie groß ist die Fläche, die sie gemeinsam bedecken?

Ergebnis: 132

Lösungsweg: Sei ABC eines der beiden Dreiecke mit $\overline{AC} = 24$ und $\overline{BC} = 18$. Ferner sei I der Inkreismitelpunkt und O der Umkreismittelpunkt von ABC . Wegen $(18, 24, 30) = 6 \cdot (3, 4, 5)$ ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel und für die Radien r und R des In- und Umkreises von ABC gilt $r = \frac{1}{2}(18 + 24 - 30) = 6$ und $R = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$. Es gibt nur einen Durchmesser $A'B'$ des Umkreises von ABC , der von AB verschieden ist und den Inkreis von ABC berührt; er muss symmetrisch zur Geraden IO liegen. $A'B'$ ergibt sich also auch als Mittelsenkrechte von \overline{AC} . Die Mittelsenkrechte geht natürlich durch O und da ihr Abstand von BC genau 12 ist, ist ihr Abstand von I gleich sechs. Das zweite Dreieck $A'B'C'$ ist also symmetrisch zu ABC bzgl. OI und $A'B' \perp AC$ und $A'C' \perp AB$. Schließlich kann der Überlappungsbereich der zwei Dreiecke dadurch berechnet werden, dass man von der Fläche von $\triangle ABC$ die Flächen der drei kleineren Dreiecke, die zu $\triangle ABC$ ähnlich sind, abzieht; ihre Seitenlängen sind 9, 12, 15 (Dreieck bei A), 6, 8, 10 (Dreieck bei B) und 3, 4, 5 (Dreieck bei C). Also ist die gesuchte Fläche

$$\frac{1}{2}(18 \cdot 24 - 9 \cdot 12 - 6 \cdot 8 - 3 \cdot 4) = 132.$$



Aufgabe 57J / 47S. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zellen eines 5×5 -Gitters so mit den Farben schwarz und weiß zu färben, dass in jeder Spalte und in jeder Zeile genau zwei Zellen schwarz sind?

Ergebnis: 2040

Lösungsweg: Man färbt die 10 schwarzen Zellen der Reihe nach ein. Die Zellen werden analog zu einem Schachbrett mit $A1 \dots E5$ bezeichnet. O.B.d.A. werden $A1, B1$ (aus Symmetriegründen muss dann das Ergebnis mit $\binom{5}{2} = 10$ multipliziert werden) und zusätzlich $B2$ (Multiplikation mit 4) gefärbt. Wenn nun $A2$ in der zweiten Zeile gefärbt wird, so muss ein restliches 3×3 -Gitter den Vorgaben entsprechend gefärbt werden, wofür es 6 Möglichkeiten gibt. Falls eine andere Zelle in der zweiten Zeile gefärbt wird, so sei dies o.B.d.A. $C2$ (Multiplikation mit 3) und in der dritten Zeile $C3$ (wieder Multiplikation mit 3). Wenn nun $A3$ gefärbt wird, so gibt es nur noch eine Möglichkeit ($D4, D5, E4, E5$) gemäß den Regeln einzufärben. Andernfalls gibt es vier Möglichkeiten. Also gibt es insgesamt

$$10 \cdot 4 \cdot (6 + 3 \cdot 3 \cdot (1 + 2 \cdot 2)) = 40 \cdot 51 = 2040$$

Färbungen.

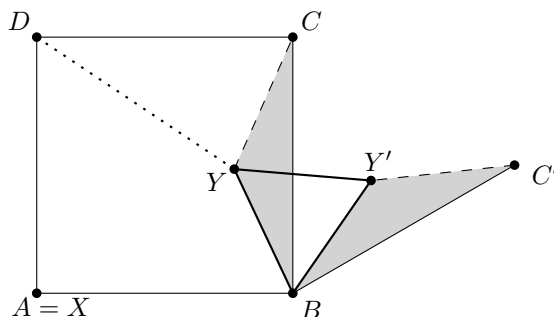
Aufgabe 58J / 48S. In einem Quadrat der Seitenlänge 1 seien zwei Punkte X und Y gegeben. Der Abstand einer Ecke zum nächstliegenden Punkt X oder Y wird als Entfernung dieser Ecke bezeichnet. Was ist die kleinstmögliche Summe der Entfernungen aller Ecken des Quadrats?

Ergebnis: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

Lösungsweg: Sei V der Wert, den man minimieren will. Falls $X = A$ und $Y = B$ ist, dann ist $V = 2$ und es ist mit der Dreiecksungleichung einfach zu zeigen, dass $V \geq 2$, falls X näher an genau 0, 2 oder 4 Ecken ist als Y . Also kann man annehmen, dass die Entfernung von A von X aus gemessen wird und die Entfernung von B, C, D von Y aus. Man muss also den Wert $V = AX + BY + CY + DY$ minimieren. Es ist klar, dass V nur dann minimal ist, wenn X auf A liegt und Y der Fermatpunkt des Dreiecks BCD ist, d.h. wenn alle Winkel BYC, CYD, DYB genau 120 Grad haben. (Diese notwendige Eigenschaft des Fermatpunktes erkennt man durch Drehung des Dreiecks BYC um Punkt B um 60 Grad in ein Dreieck $BY'C'$ und Betrachtung der Länge des Polygonzugs bestehend aus den Segmenten $DY, YY', Y'C'$ im Vergleich zur Strecke DC' .) Eine einfache Rechnung ergibt nun $\angle BDY = \angle YBD = 30^\circ$ und der Satz des Pythagoras ergibt mit $\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ die Längen $\overline{DY} = \overline{BY} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und $\overline{CY} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Also ist

$$\begin{aligned} \overline{DY} + \overline{BY} + \overline{CY} &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Da $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} < 2$ gilt, ist es die gesuchte Lösung.



Aufgabe 59J / 49S. Ein großer Parkplatz besteht aus 2012 einzelnen Parkplätzen, die gleichmäßig in einer Reihe mit den Nummern 1 bis 2012 angeordnet sind. 2012 Autos parken dort nacheinander auf folgende Weise:

- Das erste Auto wählt zufällig einen der 2012 Parkplätze.
- Die nächsten Autos wählen den Parkplatz, von dem der Abstand zum nächsten Auto am größten ist (und dabei jeden solchen Parkplatz mit der gleichen Wahrscheinlichkeit).

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das letzte Auto im Parkplatz mit der Nummer 1 parkt.

Ergebnis: $1/2012 \cdot 1/1025 = 1/2062300$

Lösungsweg: Parkplatz 1 kann nur dann als letzter genommen werden, wenn Parkplatz 2 als erster genommen wird (mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2012}$) und deshalb Parkplatz 2012 direkt danach. Dann werden die Parkplätze 3 bis 2011 gefüllt, bis nur noch Abstände der Größen 1 oder 2 übrig bleiben. In diesem Augenblick ist die Wahrscheinlichkeit, dass Parkplatz 1 als letzter genommen wird, der reziproke Wert aller noch freien Parkplätze, da jeder Parkplatz die gleiche Wahrscheinlichkeit hat als letzter genommen zu werden. Dabei ist zu beachten, dass man immer die gleiche Anzahl an Lücken der Größen 1 oder 2 enthält, wenn man nur auf die Größen der Lücken schaut und die Autos in der jeweils größten platziert werden. Also kann man ihre Anzahl eindeutig bestimmen. Sei $f(n)$ die Anzahl der freien Parkplätze, wenn Autos auf $n + 2$ Plätzen in einer Reihe wie vorgeschrieben parken und der erste und der letzte Parkplatz bereits belegt sind. Das erste Auto parkt nun in der Mitte, was die Aufgabe auf die neuen Fälle $f(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$ und $f(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)$ aufteilt. Also haben wir eine rekursive Beziehung $f(n) = f(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)$ mit den Anfangsbedingungen $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$. Durch Berechnen von $f(n)$ für kleine Werte von n erhält man

$$\begin{aligned} f(3) &= 2, f(4) = 3, f(5) = f(6) = f(7) = 4, f(8) = 5, f(9) = 6, \\ f(10) &= 7, f(11) = f(12) = f(13) = f(14) = f(15) = 8 \end{aligned}$$

und kann dann folgende geschlossene Darstellung herleiten:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2^{n-1} + 1, & 2^n \leq x \leq \frac{3}{2} \cdot 2^n - 2 \\ 2^n, & \frac{3}{2} \cdot 2^n - 1 \leq x \leq 2 \cdot 2^n - 1. \end{cases}$$

Also ist $f(2009) = 1024$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2012} \cdot \frac{1}{1024+1} = \frac{1}{2062300}$.

Aufgabe 60J / 50S. Finde alle reellen Zahlen, die die Gleichung

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 7x + 12) + 24 = 0$$

erfüllen.

Ergebnis: $0, 2, 1 \pm \sqrt{6}, 1 \pm \sqrt{8}$

Lösungsweg: Wegen

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) &= (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = \\ &= (x + 1)(x - 3)(x + 2)(x - 4) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8), \end{aligned}$$

erhält man nach der Substitution $x^2 - 2x = z$ die Gleichung

$$0 = (z - 3)(z - 8)(z - 1) + 24 = z^3 - 12z^2 + 35z = z(z - 5)(z - 7).$$

Für alle $z \in \{0, 5, 7\}$ kann man nun leicht die entsprechenden x bestimmen und erhält die Lösungen $0, 2, 1 \pm \sqrt{6}, 1 \pm \sqrt{8}$.