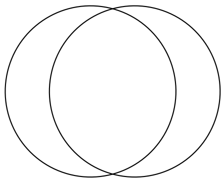
Aufgabe 1J. Wenn bekannt ist, dass es genau eine Möglichkeit gibt, 2013 als Summe zweier Primzahlen zu schreiben, was ist dann das Produkt dieser zwei Primzahlen?

Ergebnis: 4022

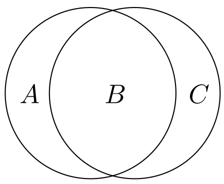
Lösungsweg: Da die Summe ungerade ist, muss eine der beiden Primzahlen gerade und damit 2 sein. Also ist $2013 = 2 + 2011$ die einzige Möglichkeit und $4022 = 2 \cdot 2011$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 2J. Zwei Kreise mit Radius 1 schneiden sich wie in der Abbildung. Dabei ist die Fläche, auf der sich die beiden Kreise überlappen, genau so groß wie die Fläche der beiden äußeren Sicheln. Wie groß ist die Fläche, auf der sich die Kreise überlappen?



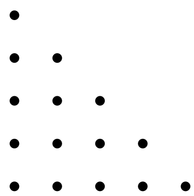
Ergebnis: $\frac{2}{3}\pi$

Lösungsweg: Bezeichnet man die Flächen wie in der Abbildung, so folgt aus Symmetriegründen $A = C$ und aufgrund der Voraussetzung $B = A + C$ die Gleichung $B = 2A$.



Somit ist die überlappende Fläche B genau $\frac{2}{3}$ der Fläche des linken Kreises, also $\frac{2}{3}\pi$.

Aufgabe 3J. Gegeben seien fünf gelbe Nadeln, vier rote, drei grüne und zwei blaue sowie eine orangefarbige Nadel. Auf wie viele Arten kann man diese so in dem abgebildeten Dreiecksgitter anordnen, dass keine zwei Nadeln mit der gleichen Farbe in der gleichen Reihe oder in der gleichen Spalte sind? Dabei sind Nadeln gleicher Farbe nicht unterscheidbar.



Ergebnis: 1

Lösungsweg: Zunächst platziert man die fünf gelben Nadeln und sieht, dass die einzige Möglichkeit ist, sie auf die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks zu setzen. Mit dem gleichen Argument gibt es nur eine Möglichkeit, die roten Nadeln wiederum auf die Hypotenuse des Dreiecks, das durch die noch freien Plätze gebildet wird, zu setzen. Fährt man so fort, so erkennt man, dass es nur eine einzige mögliche Anordnung gibt.

Aufgabe 4J. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl, deren Querprodukt (= Produkt der Ziffern) genau 600 beträgt.

Ergebnis: 3558

Lösungsweg: Aus der Primfaktorzerlegung $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ erkennt man, dass nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 möglich sind. Da eine möglichst kleine Zahl gesucht ist, sollte sie aus möglichst wenig Ziffern bestehen. Man erkennt leicht, dass man mindestens 4 Ziffern benötigt. Von den beiden Möglichkeiten 4, 6, 5, 5 bzw. 8, 3, 5, 5 für die Ziffern ergibt 3558 die kleinste Zahl.

Aufgabe 5J. Die positiven reellen Zahlen a und b erfüllen die Gleichungen

$$a + \frac{1}{b} = 7 \quad \text{und} \quad b + \frac{1}{a} = 5.$$

Welchen Wert hat dann $ab + \dfrac{1}{ab}$?

Ergebnis: 33

Lösungsweg: Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt

$$ab + \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{1}{ab} = 35,$$

woraus $ab + \dfrac{1}{ab} = 33$ folgt.

Aufgabe 6J. Benedikt denkt sich eine sechsstellige Zahl, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Zahl ist eine Palindromzahl, d.h. eine Zahl, die von links und rechts gelesen den gleichen Wert hat.
2. Die Zahl ist durch 9 teilbar.
3. Streicht man die erste und die letzte Ziffer, so ist 11 der einzige Primfaktor der verbleibenden vierstelligen Zahl.

Wie lautet Benedikts Zahl?

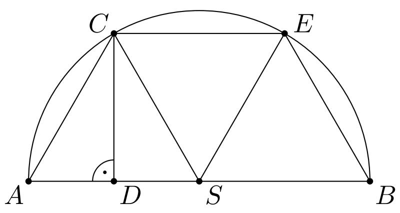
Ergebnis: 513315

Lösungsweg: Die einzige vierstellige Potenz von 11 ist 1331. Also hat die gesuchte Zahl die Form $a1331a$ mit einer beliebigen Ziffer $a \neq 0$. Aufgrund der zweiten Bedingung muss auch die Quersumme $2a + 8$ durch 9 teilbar sein. Da $2a + 8$ gerade ist, bleibt wegen $2a + 8 \leq 26$ nur $2a + 8 = 18$, woraus $a = 5$ folgt. Somit lautet die gesuchte Zahl 513315.

Aufgabe 7J. Der Punkt D liegt auf dem Durchmesser AB des Halbkreises k. Das Lot durch D auf AB schneidet k in C. Die Längen der Kreisbögen AC und CB verhalten sich wie $1 : 2$. Bestimme das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DB}$.

Ergebnis: $1 : 3$

Lösungsweg: Da C den Bogen AB drittelt, kann man einen Punkt E auf k bestimmen, so dass A, C, E und B in dieser Reihenfolge aufeinander folgende Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks sind.



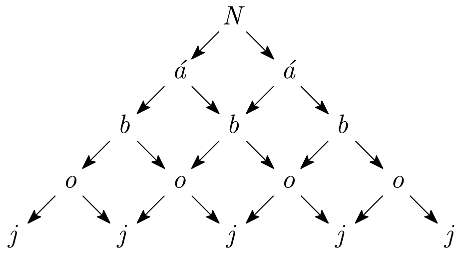
Wenn man den Mittelpunkt von AB mit S bezeichnet, so ist $\triangle ASC$ gleichseitig, wobei D der Mittelpunkt von AS ist, da Höhe und Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck zusammenfallen. Also ist das gesuchte Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 3$.

Aufgabe 8J. Die zwei verwöhnten Brüder Valentin und Michael bekamen eine Packung Schokoladenkekse, die sie gerecht untereinander aufteilten. Beide aßen jeweils 2 oder 3 Schokoladenkekse pro Tag von ihrem Anteil. Valentins Kekse reichten ihm für genau 14 Tage und Michaels Kekse reichten ihm für genau drei Wochen. Wie viele Schokoladenkekse waren in der Packung?

Ergebnis: 84

Lösungsweg: Valentin hat höchstens $3 \cdot 14 = 42$ Kekse gegessen. Michael hingegen hat mindestens $2 \cdot 21 = 42$ Kekse gegessen. Da am Anfang beide gleich viele Kekse hatten, musste jeder genau 42 Stück gehabt haben. Also waren am Anfang $42 + 42 = 84$ Schokoladenkekse in der Packung.

Aufgabe 9J. Auf wie viele Arten kann man das Wort *Náboj* in dem Diagramm lesen?



Ergebnis: 16

Lösungsweg: Bei jedem der Buchstaben *N*, *á*, *b* und *o* kann man auf zwei Arten weiterlesen. Also kann man das Wort *Náboj* auf $2^4 = 16$ Arten lesen.

Aufgabe 10J. Die Bewohner einer Insel sind entweder konsequente Lügner oder sagen immer die Wahrheit. Genau 12 Inselbewohner sitzen an einem runden Tisch und behaupten alle, dass sie selbst immer die Wahrheit sagen und dass ihr rechter Nachbar ein Lügner ist. Wie viele Lügner können maximal in solch einer Anordnung sein?

Ergebnis: 6

Lösungsweg: Zwei Inselbewohner, die immer die Wahrheit sagen, können nicht nebeneinander sitzen, denn dann würde der linke von den beiden, der seinen rechten Nachbar einen Lügner nennt, selbst lügen. Analog können nicht zwei Lügner nebeneinander sitzen. Nur eine Anordnung, bei der Lügner und Inselbewohner, die immer die Wahrheit sagen, abwechselnd nebeneinander sitzen, ermöglicht die aufgestellten Behauptungen der Inselbewohner. Also ist 6 die richtige Antwort.

Aufgabe 11J / 1S. Katharina hat elf kongruente Quadrate, von denen sechs rot, drei blau und zwei grün sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit neun dieser elf Quadrate ein 3×3-Quadrat zu bilden, so dass die Färbung erhalten bleibt, wenn man das 3×3-Quadrat um 90° im Uhrzeigersinn dreht? Dabei sollen Quadrate mit der gleichen Farbe nicht unterscheidbar sein.

Ergebnis: 0

Lösungsweg: Damit eine Färbung bei einer Drehung um 90° invariant bleibt, müssen jeweils sowohl die vier Eckquadrate die gleiche Farbe haben als auch die vier Quadrate in der Mitte jeder Seite. Also benötigt man dazu entweder acht gleichfarbige Quadrate oder zweimal je vier Quadrate der gleichen Farbe. Da beides nicht erfüllbar ist, ist die gesuchte Antwort 0.

Aufgabe 12J / 2S. Auf einer Insel sind zwei Fünftel der Männer und drei Fünftel der Frauen verheiratet. Wie viel Prozent der Inselbewohner sind verheiratet?

Ergebnis: $48\% = \frac{12}{25}$

Lösungsweg: Sei P die Anzahl der verheirateten Paare. Dann ist die Gesamtzahl der Männer $\frac{5}{2}P$ und die der Frauen $\frac{5}{3}P$. Also gibt es $\frac{5}{2}P + \frac{5}{3}P = \frac{25}{6}P$ Inselbewohner, von denen $2P$ verheiratet sind. Der Anteil der verheirateten Inselbewohner ist deshalb

$$\frac{2P}{\frac{25}{6}P} = \frac{12}{25} = 48\%.$$

Aufgabe 13J / 3S. Aus einem rechteckigen Blatt Papier mit den Seitenlängen 21cm und 29,7cm wird ein gleichseitiges Dreieck ausgeschnitten. Wie groß kann dessen Seitenlänge maximal sein?

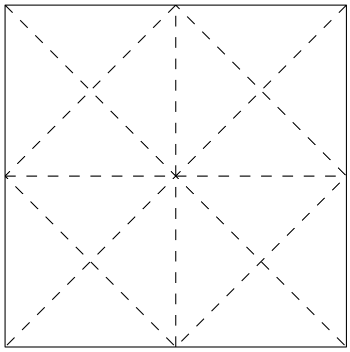
Ergebnis: $14\sqrt{3} = \frac{42}{\sqrt{3}}$ cm

Lösungsweg: Das größte gleichseitige Dreieck erhält man, wenn eine Dreiecksseite auf dem Rand des Blattes liegt. Da die Breite des Blattes 21 cm ist, hat das größte Dreieck die Höhe 21 cm, also Seitenlänge $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 21\,\text{cm} = 14\sqrt{3}\,\text{cm}$. Wegen $14\sqrt{3} < 14 \cdot 2 < 29{,}7$ passt dieses Dreieck auch auf das Blatt Papier.

Aufgabe 14J / 4S. Daniela hat ein quadratisches Blatt Papier vier Mal nacheinander jeweils in der Mitte gefaltet, so dass sie nach jeder Faltung ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hatte. Wie viele Quadrate kann man sehen, wenn man das Papier wieder entfaltet?

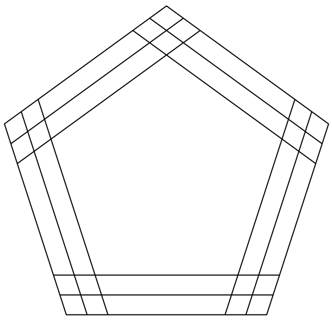
Ergebnis: 10

Lösungsweg: Die Linien, die durch das Falten entstanden sind, kann man in folgender Abbildung erkennen:



Insgesamt gibt es 10 Quadrate, nämlich das ursprüngliche (also das ganze Blatt Papier), das Quadrat, das durch die Seitenmitten gebildet wird, und in jedem dieser beiden jeweils vier kleinere.

Aufgabe 15J / 5S. Wie viele Fünfecke gibt es in der abgebildeten Figur?



Ergebnis: $3^5 = 243$

Lösungsweg: Man hat für jede der fünf Seiten die drei Möglichkeiten, die äußere, mittlere oder innere Seite zu wählen, so dass es insgesamt $3^5 = 243$ mögliche Fünfecke gibt.

Aufgabe 16J / 6S. Julian wollte zwei positive Zahlen addieren, hat aber aus Versehen eine Null ans Ende von einer der beiden Zahlen geschrieben. Als Ergebnis erhielt er 3858 anstatt des korrekten Resultats 2013. Bestimme die größere der beiden Zahlen.

Ergebnis: 1808

Lösungsweg: Seien a und b die beiden Zahlen. Da das Anfügen einer Null gleichbedeutend ist mit einer Multiplikation mit 10, kann man folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} a + b &= 2013, \\ 10a + b &= 3858. \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $a = 205$ und $b = 1808$, weshalb 1808 die gesuchte Zahl ist.

Aufgabe 17J / 7S. Wie groß ist der Radius des kleinsten Kreises, der ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 5 und 7 überdecken kann?

Ergebnis: $3{,}5 = \frac{7}{2}$

Lösungsweg: Wegen $3^2 + 5^2 < 7^2$ ist der Winkel, der der Seite mit der Länge 7 gegenüber liegt, ein stumpfer Winkel. Also kann das Dreieck mit einem Kreis vom Durchmesser 7 überdeckt werden. Andererseits ist kein kleinerer Kreis möglich, so dass $3{,}5 = \frac{7}{2}$ die gesuchte Antwort ist.

Aufgabe 18J / 8S. Lukas, Martin, Paul und Viktor haben zusammen 100 Lollipops. Je zwei von ihnen haben zusammen mindestens 41 Lollipops. Was ist die kleinste Anzahl an Lollipops, die Paul haben kann?

Ergebnis: 12

Lösungsweg: Bezeichnet man die Anzahl der Lollipops der Jungen mit L, M, P und V, so kann man die Gleichungen $L + P \geq 41$, $M + P \geq 41$ und $V + P \geq 41$ aufstellen. Addition dieser drei Ungleichungen ergibt $2P + (L + M + P + V) \geq 123$. Wegen $L + M + P + V = 100$ erhält man $2P \geq 23$, oder $P \geq 12$, da P ja eine natürliche Zahl sein muss.

Andererseits zeigt die Verteilung $L = M = 29$, $P = 12$ und $V = 30$, dass die Bedingungen der Aufgabe mit $P = 12$ erfüllt werden können.

Aufgabe 19J / 9S. Die Fläche eines Rechtecks $ABCD$ sei 80 und die Länge einer Diagonalen 16. Bestimme den Sinus des spitzen Winkels zwischen den Diagonalen.

Ergebnis: $\frac{5}{8} = 0{,}625$

Lösungsweg: Sei S der Schnittpunkt der Diagonalen und h die Länge der Höhe durch den Punkt B im $\triangle ABC$. Die Fläche von $ABCD$ ist dann $\overline{AC} \cdot h$, woraus $h = 80 : 16 = 5$ folgt. Der gesuchte Wert ist also $\sin \angle BSC = \sin \angle ASB = h/\overline{BS} = \frac{5}{8}$.

Aufgabe 20J / 10S. Was ist der größtmögliche Wert, den der Term $a^b + c^d$ annehmen kann, wenn a, b, c und d verschiedene Elemente aus der Menge $\{-7, -5, -4, -3, -2, -1\}$ sind?

Ergebnis: $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$

Lösungsweg: Für positive ganze Zahlen n und k gilt

$$(-n)^{-2k} = n^{-2k} > 0 \qquad \text{und} \qquad (-n)^{-(2k-1)} = -n^{-(2k-1)} < 0.$$

Weil gerade Zahlen als Exponenten zur Verfügung stehen, muss mindestens einer der Summanden positiv sein, damit die Summe $a^b + c^d$ möglichst groß werden kann. Es sei $a^b > 0$ mit $b \in \{-2, -4\}$. Für $a = -1$ ist $a^{-2} = a^{-4} = 1$ und für alle anderen in Frage kommenden $a \neq -1$ gilt $a^{-4} < a^{-2} < 1$ $(*)$. Da eine zweite gerade Zahl vorhanden ist, kann der Wert der Summe $a^b + c^d$ sogar größer als 1 werden. Also müssen beide gerade Zahlen als Exponenten gewählt werden. Damit nun $a^{-2} + c^{-4}$ möglichst groß werden kann, muss wegen $(-1)^{-2} = (-1)^{-4} = 1$ und $(*)$ für den Exponenten -4 die Basis -1 und für den Exponenten -2 die Basis -3 sein. Für den größtmöglichen Wert von $a^b + c^d$ ergibt sich schließlich $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$.

Aufgabe 21J / 11S. Ein Winkel der Größe 110° wird zufällig in ein ebenes Koordinatensystem gezeichnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine beiden Schenkel den Graph einer Funktion darstellen?

Ergebnis: $\frac{11}{18}$

Lösungsweg: Damit die Schenkel den Graph einer Funktion darstellen können, dürfen keine zwei Punkte die gleiche x-Koordinate haben. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Scheitel des Winkels im Punkt $(0 \mid 0)$ liegt. Dreht man nun den Winkel im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt, so kann man in jeder Position entscheiden, ob der Graph einer Funktion vorliegt. Man startet mit der Position, in der ein Schenkel auf der positiven y-Achse liegt und der andere im vierten Quadranten. Bei Drehungen um den Winkel ϕ mit $0° \leq \phi \leq 70°$ liegt kein Graph einer Funktion vor, dagegen bei Drehungen um $70° < \phi < 180°$ schon. Analog verhält es sich bei Drehungen zwischen 180° und 360°. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{110}{180} = \frac{11}{18}$.

Aufgabe 22J / 12S. Josef hat am Tag des letztjährigen Náboj, das war der 23. März 2012, ein regelmäßiges 100-Eck $A_1A_2 \ldots A_{100}$, das er im Uhrzeigersinn durchnummeriert hat, gezeichnet und auf eine beliebige Ecke einen Spielstein gelegt. An jedem folgenden Tag hat er den Spielstein um so viele Ecken im Uhrzeigersinn verschoben, wie die Nummer der aktuellen Ecke anzeigt (von A_3 würde er beispielsweise den Spielstein auf A_6 verschieben oder von A_{96} auf A_{92}). Jetzt liegt der Spielstein auf der Ecke A_{100}. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis?

Ergebnis: $0{,}04 = \frac{1}{25}$

Lösungsweg: Wenn der Spielstein einmal auf der Ecke A_{100} zu liegen kommt, dann wird er immer wieder nur noch auf diese Ecke verschoben. Also muss man die Fälle untersuchen, bei denen der Spielstein irgendwann einmal auf der Ecke A_{100} landet. Die Vorgehensweise beim Verschieben des Spielsteins entspricht einer Multiplikation der Eckennummer mit 2 (und ggf. einer Subtraktion von 100, falls das Ergebnis größer als 100 ist). Also sucht man eigentlich diejenigen Zahlen zwischen 1 und 100, die bei einer wiederholten Multiplikation mit 2 irgendwann ein Vielfaches von 100 werden. Solche Zahlen müssen ein Vielfaches von 25 sein und alle vier Möglichkeiten 25, 50, 75 und 100 werden auch irgendwann ein Vielfaches von 100. Also ist die gesuchte Antwort $\frac{4}{100} = 0{,}04 = \frac{1}{25}$.

Aufgabe 23J / 13S. Positive ganze Zahlen, die als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden können, sollen *subtraktiv* genannt werden. Wie viele der Zahlen $1, 2, \ldots, 2013$ sind subtraktiv?

Ergebnis: 1510

Lösungsweg: Für ungerade Zahlen gilt $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ und für Vielfache von vier $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$. Zahlen der Form $4k+2$ sind nicht subtraktiv, da $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ als Produkt zweier positiver ganzer Zahlen gleicher Parität entweder ungerade oder ein Vielfaches von vier ist. Es gibt 503 Zahlen mit der Darstellung $4k + 2$ zwischen 1 und 2013. Also ist 1510 die gesuchte Antwort.

Aufgabe 24J / 14S. Drei sich nicht überschneidende regelmäßige Vielecke mit Seitenlänge 1 haben einen gemeinsamen Eckpunkt A. Der Rand der Vereinigung ihrer Flächen bildet einen (nicht konvexen) Polygonzug M, der den Punkt A im Inneren haben soll (d.h. A liegt nicht auf dem Rand von M). Bestimme die Länge von M, wenn eines der regelmäßigen Vielecke ein Quadrat und ein weiteres ein regelmäßiges Sechseck ist.

Ergebnis: 16

Lösungsweg: Betrachtet man die Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke an der gemeinsamen Ecke A, so ist der des Quadrats $90°$ und der des Sechsecks $120°$. Da A im Inneren von M liegen soll, ergänzen sich die drei Innenwinkel der regelmäßigen Vielecke an der Ecke A zu $360°$. Also beträgt der dritte Winkel $150°$ und gehört deshalb zu einem regelmäßigen Zwölfeck. Da die regelmäßigen Vielecke paarweise jeweils eine Seite gemeinsam haben, die nicht zur Länge von M beitragen, ist die Länge von M also $4 + 6 + 12 - (3 \cdot 2) = 16$.

Aufgabe 25J / 15S. Veronika hat die Zahlen von 1 bis 100 in beliebiger Reihenfolge nebeneinander geschrieben. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für jedes $i = 1, \ldots, 50$ die Zahl an der Stelle $2i - 1$ kleiner ist als die Zahl an der Stelle $2i$?

Ergebnis: 2^{-50}

Lösungsweg: Man stelle sich vor, dass Veronika die Zahlen in Paaren hinschreibt – zunächst wählt sie ein Paar von Zahlen aus, die noch verfügbar sind, und legt anschließend ihre Reihenfolge fest. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die kleinere vor der größeren steht, genau $\frac{1}{2}$, unabhängig davon, welche zwei Zahlen ausgewählt wurden. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies bei allen 50 Paaren so ist, $(\frac{1}{2})^{50} = 2^{-50}$.

Aufgabe 26J / 16S. Die Farbe Pink wird aus den Farben Rot und Weiß im Verhältnis $1 : 1$ gemischt und die Farbe Cyan aus Blau und Weiß im Verhältnis $1 : 2$. Simone will ihr Zimmer mit einer Farbe streichen, die aus Pink und Cyan im Verhältnis $2 : 1$ besteht. Sie hat bereits drei Dosen blaue Farbe mit einer Dose roter Farbe vermischt. Wie viele Dosen muss sie zu dieser Mischung noch hinzufügen, wenn nur noch Dosen mit roter und weißer Farbe übrig sind?

Ergebnis: 23

Lösungsweg: Da nur noch rote und weiße Farbe übrig ist, muss das endgültige Gemisch genau drei Dosen blaue Farbe enthalten. Da blaue Farbe nicht in der Farbe Pink enthalten ist, müssen wegen dem Verhältnis $1 : 2$ bei Cyan genau 9 Dosen für den Anteil der Farbe Cyan verwendet werden (3 blaue und 6 weiße). Wegen dem gewünschten Verhältnis von $2 : 1$ zwischen Pink und Cyan müssen insgesamt 27 Dosen verwendet werden (9 mit dem Anteil von Cyan und 18 mit dem Anteil von Pink). Da schon vier Dosen vermischt wurden, müssen noch $27 - 4 = 23$ Dosen (8 rote und 15 weiße) hinzugefügt werden, damit die gewünschte Mischung entsteht.

Aufgabe 27J / 17S. Ein Zauberer hat einen Hut mit mehreren weißen, grauen und schwarzen Hasen. Am Anfang, wenn er beginnt sie zufällig aus dem Hut zu ziehen (ohne sie zurückzulegen), beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er einen weißen Hasen vor einem grauen zieht, genau $\frac{3}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er einen grauen Hasen vor einem schwarzen zieht, ist ebenfalls $\frac{3}{4}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er am Anfang einen weißen vor einem schwarzen Hasen zieht?

Ergebnis: $\frac{9}{10}$

Lösungsweg: Da der Zauberer am Anfang einen weißen vor einem grauen Hasen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ zieht, sind im Hut dreimal so viele weiße Hasen wie graue. Aus dem gleichen Grund sind im Hut dreimal so viele graue Hasen wie schwarze. Also befinden sich im Hut neunmal so viele weiße Hasen wie schwarze und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{9}{10}$.

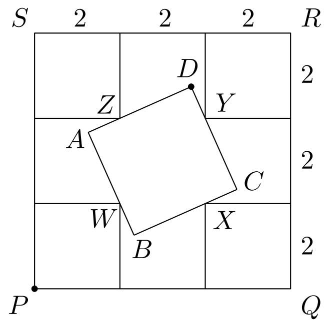
Aufgabe 28J / 18S. Die positiven ganzen Zahlen a und b erfüllen die Gleichung $49a + 99b = 2013$. Bestimme $a + b$.

Ergebnis: 37

Lösungsweg: Wenn man $a + b$ auf beiden Seiten der Gleichung addiert, so erhält man $50(a + 2b) = 2013 + (a + b)$. Die linke Seite der Gleichung ist durch 50 teilbar, also muss auch die rechte Seite durch 50 teilbar sein. Deshalb muss $a + b = 50k - 13$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gelten.

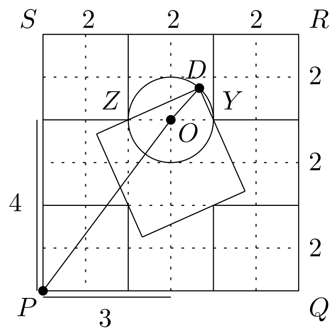
Wenn $a + b \geq 87$ ist, dann ist $49a + 99b > 49a + 49b \geq 49 \cdot 87 > 2013$. Also ist die einzige Möglichkeit $a + b = 37$.

Aufgabe 29J / 19S. In die Ecken des Quadrats $PQRS$ mit der Seitenlänge 6 cm werden wie in der Abbildung vier kleinere Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm einbeschrieben. Diejenigen Ecken dieser Quadrate, die im Inneren des großen Quadrates liegen, seien mit W, X, Y und Z bezeichnet. Ein Quadrat $ABCD$ wird nun so konstruiert, dass die Punkte W, X, Y bzw. Z jeweils auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA liegen. Bestimme den größtmöglichen Abstand zwischen den Punkten P und D.



Ergebnis: 6 cm

Lösungsweg: Der Punkt D liegt auf einem Halbkreis mit dem Durchmesser ZY. Der Mittelpunkt dieses Kreises sei mit O bezeichnet. Der Radius des Kreises ist 1 und mit dem Satz des Pythagoras folgt $\overline{PO} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\overline{PD} \leq \overline{PO} + \overline{OD} = 6$. Gleichheit gilt nur, wenn P, O und D auf einer Geraden liegen. Also ist der maximale Abstand 6 cm.



Aufgabe 30J / 20S. In zwanzig Kisten mit Äpfeln befinden sich insgesamt 129 Äpfel. In einigen der Kisten sind genau 4 Äpfel und alle übrigen Kisten enthalten genau x Äpfel. Bestimme alle möglichen Werte für x.

Ergebnis: 11, 53

Lösungsweg: Sei K die Anzahl der Kisten, die x Äpfel enthalten ($K \leq 20$). In den übrigen $20 - K$ Kisten befinden sich dann jeweils vier Äpfel und es ergibt sich die Gleichung

$$K \cdot x + (20 - K) \cdot 4 = 129,$$

die gleichbedeutend mit $K(x - 4) = 49$ ist. Wegen $K \leq 20$ sind $K = 1$ und $K = 7$ die einzigen möglichen Werte. Aus $K = 1$ folgt $x = 53$ und mit $K = 7$ erhält man $x = 11$.

Aufgabe 31J / 21S. Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a > b > 0$, die die Gleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2013$$

erfüllen. Bestimme den Wert von $\dfrac{a+b}{a-b}$.

Ergebnis: $\sqrt{\frac{2015}{2011}}$

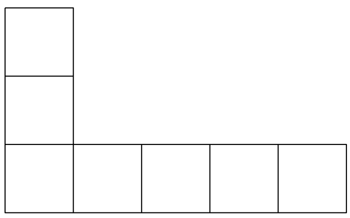
Lösungsweg: Aus der gegebenen Gleichung folgt $a^2 + b^2 = 2013ab$. Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = 2015ab,\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 = 2011ab.\end{aligned}$$

Wegen $a > b > 0$ ist der Ausdruck $\frac{a+b}{a-b}$ positiv und aus obigen Gleichungen ergibt sich

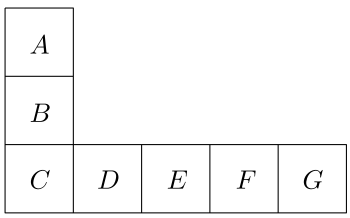
$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{2015ab}{2011ab}} = \sqrt{\frac{2015}{2011}}.$$

Aufgabe 32J / 22S. Die Zahlen von 1 bis 7 sollen so in die Felder des abgebildeten Heptominos gefüllt werden, dass die Summe in der Zeile unten gleich der Summe in der Spalte links ist. Dabei darf jede der Zahlen nur einmal verwendet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?



Ergebnis: $144 = 3 \cdot 2 \cdot 4!$

Lösungsweg: Die Werte in den einzelnen Quadraten seien wie in der Abbildung bezeichnet.



Aus den Voraussetzungen folgt $A + B + C + D + E + F + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ und $A + B = D + E + F + G = \frac{1}{2}(28 - C)$. Also muss C gerade sein.

Wenn $C = 2$ ist, dann muss $A + B = 13 = 6 + 7$ sein. Dies ergibt zwei Möglichkeiten, die Quadrate in der linken Spalte zu füllen. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es 4! Möglichkeiten, die übrigen Zahlen in der unteren Zeile anzuordnen. Das sind insgesamt $2 \cdot 4!$ Möglichkeiten im Fall $C = 2$. Wenn $C = 4$ ist, dann muss $A + B = 12 = 5 + 7$ sein ($6 + 6$ ist nicht möglich, da gleiche Zahlen nicht erlaubt sind) und wenn $C = 6$ ist, dann muss $A + B = 11 = 4 + 7$ sein ($5 + 6$ ist ebenfalls nicht erlaubt, da bereits $C = 6$ ist). In beiden Fällen gibt es also jeweils wieder $2 \cdot 4!$ Möglichkeiten, die Zahlen einzutragen. Also hat man insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ Möglichkeiten.

Aufgabe 33J / 23S. Das Dreieck $\triangle ABC$ sei spitzwinklig mit $\overline{AB} = 4\pi$, $\overline{BC} = 4\pi + 3$ und $\overline{CA} = 4\pi + 6$. Der Höhenfußpunkt der Höhe von A auf BC sei D. Bestimme $\overline{CD} - \overline{BD}$.

Ergebnis: 12

Lösungsweg: Der Satz von Pythagoras ergibt für die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ABD$ die Gleichungen $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$ und $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$. Subtrahieren der beiden Gleichungen ergibt

$$\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = (4\pi + 6)^2 - (4\pi)^2 = 48\pi + 36.$$

Wegen $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ folgt

$$\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = (\overline{CD} - \overline{BD}) \cdot (\overline{CD} + \overline{BD}) = (\overline{CD} - \overline{BD}) \cdot (4\pi + 3)$$

und deshalb $\overline{CD} - \overline{BD} = 12$.

Aufgabe 34J / 24S. In Sikinien fahren Straßenbahnen den ganzen Tag in gleichen zeitlichen Abständen und das in beide Richtungen. Ein Fußgänger, der an den Gleisen entlang geht, wird alle 12 Minuten von einer Straßenbahn überholt und alle 4 Minuten kommt ihm eine entgegen. In welchem zeitlichen Abstand fahren die Straßenbahnen?

Ergebnis: 6 Minuten

Lösungsweg: Die Geschwindigkeit einer Straßenbahn sei mit v bezeichnet, die des Fußgängers mit c und die Distanz zwischen zwei Straßenbahnen mit d. Aus den Voraussetzungen kann man folgende Gleichungen herleiten:

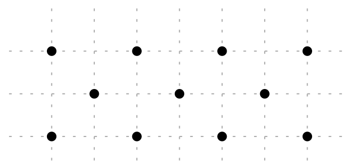
$$v - c = \frac{d}{12\,\mathrm{min}},$$
$$v + c = \frac{d}{4\,\mathrm{min}}.$$

Addition der beiden Gleichungen und Division durch 2 ergibt

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12\,\mathrm{min}} + \frac{1}{4\,\mathrm{min}}\right) \cdot d = \frac{d}{6\,\mathrm{min}}.$$

Also braucht eine Straßenbahn für die Strecke d genau 6 Minuten. Deshalb ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Straßenbahnen 6 Minuten.

Aufgabe 35J / 25S. Wie viele nicht entartete Dreiecke kann man bilden, wenn man jeweils drei beliebige Punkte aus der Abbildung verbindet?



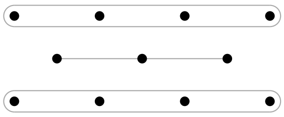
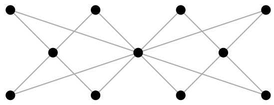
Hinweis: Die Punkte sind auf dem angedeuteten Gitter angeordnet.

Ergebnis: $148 = \binom{11}{3} - 17$

Lösungsweg: Man kann ein Tripel von Punkten aus den elf gegebenen auf

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$$

Arten auswählen. Davon muss man noch die Tripel abziehen, deren Punkte auf einer Geraden liegen. Es gibt $4 + 1 + 4 = 9$ Tripel, die auf einer horizontalen Geraden liegen, und $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ Tripel, die durch schräge Verbindungen entstehen. Also ist die Gesamtzahl an möglichen Dreiecken $165 - 17 = 148$.

Aufgabe 36J / 26S. Martin hat eine Schachtel Pralinen geschenkt bekommen, in der 30 Pralinen in drei Reihen zu je zehn angeordnet sind. Er isst die Pralinen eine nach der anderen so, dass sich die Anzahlen der Pralinen in jeweils zwei Reihen um höchstens Eins unterscheiden. Wie viele Möglichkeiten hat er, die Schachtel zu leeren?

Ergebnis: $6^{10} \cdot (10!)^3$

Lösungsweg: Die Reihenfolge beim Essen der Pralinen kann auf folgende Weise eindeutig bestimmt werden: In jeder Reihe legt man die Reihenfolge fest, in der Martin die Pralinen essen wird, und zusätzlich muss man noch die Reihenfolge zwischen den einzelnen Reihen festglegen.

Für jede Reihe gibt es 10! Möglichkeiten, die Reihenfolge der Pralinen zu wählen, so dass man insgesamt $(10!)^3$ Möglichkeiten für alle drei Reihen hat.

Nun muss man noch die Möglichkeiten, zwischen den Reihen zu wechseln, bestimmen. Wenn in allen drei Reihen gleich viele Pralinen sind, dann kann Martin eine beliebige auswählen. Danach muss er eine der beiden anderen auswählen (sonst wäre der Unterschied zwischen zwei Reihen zu groß) und zum Schluss die übrig gebliebene dritte Reihe. Nach dreimaligem Auswählen sind in jeder Reihe wieder gleich viele Pralinen. Also kann er insgesamt zehnmal zwischen den Reihenfolgen der Reihen auswählen, was $(3!)^{10} = 6^{10}$ Möglichkeiten ergibt.

Also hat Martin insgesamt $6^{10} \cdot (10!)^3$ Möglichkeiten, die Schachtel Pralinen zu leeren.

Aufgabe 37J / 27S. Eine positive sechsstellige Zahl wird *verdoppelt* genannt, wenn die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern identisch sind, und zwar in derselben Reihenfolge. Beispielsweise ist 227227 verdoppelt, aber 135153 nicht. Wie viele sechsstellige verdoppelte Zahlen sind durch 2013 teilbar?

Hinweis: Die führende Ziffer darf nicht 0 sein.

Ergebnis: 5

Lösungsweg: Jede verdoppelte Zahl mit sechs Ziffern kann als $1001 \cdot k$ mit einer positiven ganzen Zahl k geschrieben werden. Andererseits ergibt für jede dreistellige positive Zahl k der Term $1001 \cdot k$ eine sechsstellige verdoppelte Zahl.

Da $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ und $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ durch 11 teilbar sind, aber 1001 nicht durch 3 oder 61 teilbar ist, folgt, dass eine durch 2013 teilbare sechsstellige Zahl genau dann verdoppelt ist, wenn die zugehörige dreistellige Zahl k im Term $1001 \cdot k$ ein Vielfaches von $3 \cdot 61 = 183$ ist. Da es genau fünf dreistellige Zahlen k gibt, die durch 183 teilbar sind, gibt es genau fünf sechsstellige verdoppelte Zahlen, die durch 2013 teilbar sind.

Aufgabe 38J / 28S. Auf jedes Feld eines 4×4-Schachbretts zeichnet man zufällig entweder einen Pfeil nach unten oder einen Pfeil nach rechts. In die linke obere Ecke des Schachbretts setzt man nun einen Roboter, der sich entsprechend der Pfeilrichtungen auf dem Brett bewegt bis er es verlässt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Roboter das Schachbrett von der rechten unteren Ecke aus verlassen wird?

Ergebnis: $\frac{5}{16} = \frac{\binom{6}{3}}{2^6}$

Lösungsweg: Man muss die Anzahl der möglichen Wege von der linken oberen Ecke zur rechten unteren Ecke bestimmen und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Roboter auf solch einem Weg geht. Für jeden der gesuchten Wege sind drei Schritte nach unten und drei nach rechts nötig, was $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten liefert. Weil dazu die Pfeile auf 6 Feldern festgelegt sind und es für die restlichen 10 Felder je 2 Möglichkeiten gibt, verlässt der Roboter bei $20 \cdot 2^{10}$ der 2^{16} möglichen Pfeilverteilungen das Brett über das rechte untere Feld. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist deshalb $\frac{20 \cdot 2^{10}}{2^{16}} = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$.

Aufgabe 39J / 29S. Schreibe den Bruch

$$\frac{212121210}{112121211}$$

in seiner gekürzten Form, das heißt, als Bruch $\frac{a}{b}$ mit ganzen positiven Zahlen a und b, die teilerfremd sind.

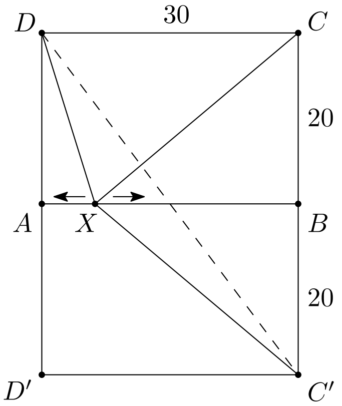
Ergebnis: $\frac{70}{37}$

Lösungsweg: Man sieht sofort, dass die Quersumme des Zählers und die des Nenners durch 3 teilbar sind. Folglich sind auch Zähler und Nenner durch 3 teilbar und man erhält die Darstellungen $212121210 = 3 \cdot 70707070$ und $112121211 = 3 \cdot 37373737$. Nun sind aber leicht die weiteren Zerlegungen $70707070 = 70 \cdot 1010101$ und $37373737 = 37 \cdot 1010101$ zu erkennen. Da 37 und 70 teilerfremde Zahlen sind, ergibt sich $\frac{70}{37}$ als Antwort.

Aufgabe 40J / 30S. Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 30$ und $\overline{BC} = 20$. Für wie viele Punkte X auf der Seite AB ist der Umfang des Dreiecks $\triangle CDX$ ganzzahlig?

Ergebnis: 13

Lösungsweg: Es genügt herauszufinden, wann $\overline{DX} + \overline{XC}$ ganzzahlig ist. Dazu spiegelt man die Punkte C bzw. D an der Geraden AB und nennt sie C' bzw. D'.



Dann gilt $\overline{DX} + \overline{XC} = \overline{DX} + \overline{XC'}$. Die rechte Seite der Gleichung nimmt ihr Minimum an, wenn X der Mittelpunkt von AB ist; sie nimmt ihr Maximum an, wenn X gleich A oder B ist. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich $\overline{DC'} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ und $\overline{AC'} = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$, woraus $36 < \overline{AC'} < 37$ folgt.

Man beobachtet nun die Veränderung des Wertes von $\overline{DX} + \overline{XC}$, wenn man den Punkt X von A nach B wandern lässt: Im Fall $X = A$ beginnt er bei einer Zahl, die etwas größer als $20 + 36 = 56$ ist, dann verringert er sich bis zum Wert 50, der angenommen wird, wenn X der Mittelpunkt von AB ist, und schließlich vergrößert er sich wieder bis zum Anfangswert, der etwas größer als 56 ist, im Fall $X = B$.

Das bedeutet, dass der Umfang des Dreiecks $\triangle CDX$ an $6 + 1 + 6 = 13$ Positionen von X ganzzahlig ist.

Aufgabe 41J / 31S. In welche Reihenfolge muss man die Zeilen $r_1, \ldots, r_{11}$ der Tabelle in der folgenden Abbildung bringen, wenn man will, dass die neu entstandene Tabelle bezüglich der markierten Diagonale symmetrisch sein soll? Es genügt, eine Lösung anzugeben.

r_1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
r_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
r_3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
r_4	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
r_5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
r_6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
r_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
r_8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
r_9	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
r_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
r_{11}	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

Ergebnis: In umgekehrte Reihenfolge (ggf. noch zyklisch vertauscht), das heißt $[r_{11}, r_{10}, r_9, \ldots, r_1]$ oder $[r_{10}, r_9, \ldots, r_1, r_{11}]$, ..., $[r_1, r_{11}, r_{10}, \ldots, r_2]$

Lösungsweg: Man sieht, dass die Tabelle bezüglich der anderen, nicht markierten Diagonale symmetrisch ist. Um die Tabelle bezüglich der markierten Diagonale symmetrisch zu machen, genügt es, sie an der horizontalen Achse r_6 zu spiegeln. Als Lösungen erhält man die Zeilen in umgekehrter Reihenfolge, d.h. $[r_{11}, r_{10}, r_9, \ldots, r_1]$, sowie zyklische Vertauschungen davon, d.h. $[r_{10}, r_9, \ldots, r_1, r_{11}]$, ..., $[r_1, r_{11}, r_{10}, \ldots, r_2]$. Außer den elf eben erwähnten Lösungen gibt es keine weitere.

Aufgabe 42J / 32S. Für jede positive ganze Zahl n sei a_n definiert durch

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Finde die kleinste natürliche Zahl $k \geq 2$ mit der Eigenschaft $a_2 a_3 \cdots a_k > 4$.

Ergebnis: 254

Lösungsweg: Wenn man $A_n = a_n^3$ setzt, so ist die Aufgabe gleichbedeutend damit, dass man die kleinste natürliche Zahl $k \geq 2$ mit der Eigenschaft $A_2 A_3 \cdots A_k > 4^3 = 64$ finden muss. Nun hat man

$$A_n = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3} = \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{n \cdot n \cdot n}$$

und daher

$$\begin{aligned} A_2 A_3 \cdots A_k &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdots \frac{(k+1) \cdot (k+1) \cdot (k-1)}{k \cdot k \cdot k} \\ &= \frac{1 \cdot (k+1) \cdot (k+1)}{2 \cdot 2 \cdot k} = \frac{(k+1)^2}{4k}. \end{aligned}$$

übrig bleibt also, die kleinste natürliche Zahl $k \geq 2$ zu finden, welche die Ungleichung

$$(k+1)^2 > 256k$$

erfüllt. Nach Subtraktion von $2k$ auf beiden Seiten und Division durch k ist diese Ungleichung äquivalent zur Ungleichung $k + \frac{1}{k} > 254$, welche als kleinste Lösung $k = 254$ besitzt.

Aufgabe 43J / 33S. Katrin hat eine Pizza in n gleiche Stücke geschnitten und diese mit je einer der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gekennzeichnet. Die Nummerierung hatte die Eigenschaft, dass zwischen je zwei Pizzastücken mit aufeinander folgenden Zahlen i und $i+1$ immer die gleiche Anzahl an Pizzastücken vorhanden war. Dann ist der dicke Lukas gekommen und hat fast die ganze Pizza aufgegessen. Was er davon übrig gelassen hat, waren drei direkt nebeneinander liegende Pizzastücke mit den Nummern 11, 4 und 17 genau in dieser Reihenfolge. Wie viele Stücke hatte die Pizza?

Ergebnis: 20

Lösungsweg: Man bezeichnet abkürzend für alle $i = 1, \ldots, n$ das Pizzastück mit der Nummer i mit S_i. Angenommen man hat $k-1$ Pizzastücke zwischen je zwei Stücken mit aufeinander folgenden Nummern. Wenn man nun bei Pizzastück S_1 startet und k Stücke weitergeht, dann kommt man zu S_2, nach weiteren k Stücken zu S_3, und so weiter bis man schließlich bei S_n ankommt. Dabei geht man immer nur in einer Richtung, weil man ja sonst von S_i bei S_{i-1} und nicht bei S_{i+1} landen würde. Von S_n aus muss man dann in k Schritten zu S_1 gelangen, weil für jedes $i = 2, \ldots, n-1$ die Pizzastücke S_{i-1} und S_{i+1} genau k Pizzastücke weit von S_i entfernt sind. Das bedeutet, dass man startend bei einem Sück durch wiederholtes Weitergehen von k Stücken alle Stücke $S_1, \ldots, S_n$ trifft. Insbesondere gibt es eine Zahl s, sodass man startend auf einem Stück nach $s \cdot k$ Schritten zum benachbarten Stück gelangt. Da S_{11}, S_4 und S_{17} in dieser Reihenfolge nebeneinander liegen, erhält man

$$11 - 4 \equiv s \cdot k \equiv 4 - 17 \pmod{n},$$

woraus folgt, dass $7 - (-13) = 20$ durch n teilbar ist. Weil es aber ein Pizzastück mit der Nummer 17 gibt, muss $n \geq 17$ gelten. Insgesamt folgt nun, dass $n = 20$ die einzige Lösung ist.

Aufgabe 44J / 34S. In einem Hörsaal an der Mathfyz-Universität sind die Sitzplätze in einem rechteckigen Gitter angeordnet. In der Analysis-Vorlesung saßen genau 11 Studenten in jeder Zeile und genau 3 Studentinnen in jeder Spalte. Zwei Sitzplätze blieben leer. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Sitzplätzen in diesem Hörsaal?

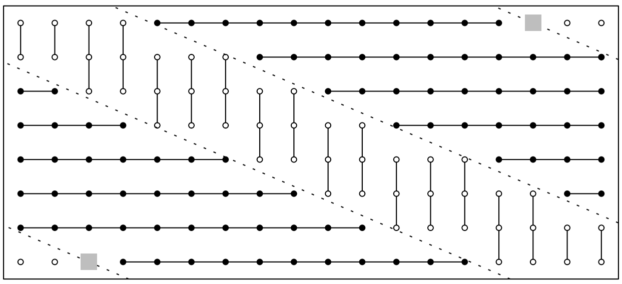
Ergebnis: 144

Lösungsweg: Bezeichnet man mit z die Anzahl der Zeilen und mit s die Anzahl der Spalten des Hörsaals, so gilt laut Angabe $zs = 11z + 3s + 2$, was äquivalent ist zu

$$(z-3)(s-11) = 35.$$

Die beiden Faktoren $z-3$ und $s-11$ sind bis auf Reihenfolge entweder 5 und 7 oder 1 und 35. Probiert man alle vier Fälle durch, so kommt man zu dem Ergebnis, dass der kleinste Wert von zs, nämlich 144, bei $z-3=5$ und $s-11=7$ angenommen wird, also bei $z=8$ und $s=18$.

Die folgende Abbildung zeigt, dass es wirklich eine Anordnung der 144 Sitzplätze gibt, die alle verlangten Bedingungen erfüllt.



Aufgabe 45J / 35S. Gegeben sei ein Kreis l mit Radius 4 und ein zweiter Kreis k mit Radius 3, der im Inneren von l liegt und l genau im Punkt T berührt. Finde den größtmöglichen Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle TKL$, wobei K ein Punkt auf k und L ein Punkt auf l ist.

Ergebnis: $9\sqrt{3} = \frac{27}{\sqrt{3}}$

Lösungsweg: Wähle einen Punkt $L \neq T$ auf l und bezeichne mit S den Schnittpunkt der Strecke TL mit k. Unter der zentrischen Streckung mit Zentrum T und Streckungsfaktor $\frac{4}{3}$ wird der Kreis k auf den Kreis l abgebildet, insbesondere der Punkt S auf den Punkt L. Deswegen gilt $\overline{TL} = \frac{4}{3}\overline{TS}$.

Nun wähle einen Punkt K auf dem Kreis k, wobei $K \neq T$ und $K \neq S$ sein soll. Weil die beiden Dreiecke $\triangle TLK$ und $\triangle TSK$ die gemeinsame Höhe von K aus haben, erhält man für ihre Flächeninhalte

$$F_{\triangle TLK} : F_{\triangle TSK} = \overline{TL} : \overline{TS} = 4 : 3,$$

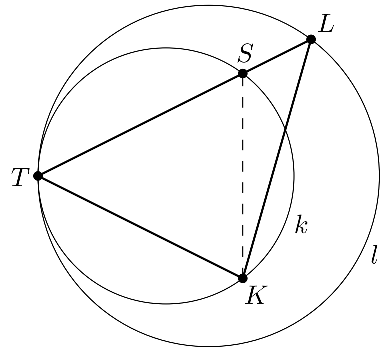
also $F_{\triangle TLK} = \frac{4}{3} F_{\triangle TSK}$.
Soll also der Flächeninhalt von $\triangle TLK$ maximal sein, so genügt es, denjenigen von $\triangle TSK$ zu maximieren.

Unter allen in den Kreis k mit Radius 3 einbeschriebenen Dreiecken $\triangle TSK$ hat das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt, nämlich

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120°\right) = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{3}.$$

Insgesamt erhält man nun für den maximalen Fächeninhalt eines Dreiecks $\triangle TKL$ den Wert

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{27}{4}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$



Aufgabe 46J / 36S. Lukas und Viktor spielen das folgende Spiel: Am Anfang steht ihnen die Menge der Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots, 1024\}$ zur Verfügung. Als Erster entfernt Lukas irgendwelche 2^9 Zahlen aus der gegebenen Menge. Von den restlichen Zahlen nimmt Viktor nun 2^8 Stück weg, anschließend ist wieder Lukas an der Reihe und entfernt 2^7 Zahlen. Das geht abwechselnd so weiter bis schließlich Viktor ein Element entfernt, so dass noch genau zwei Zahlen übrig bleiben. Das Spiel ist nun beendet und Lukas muss an Viktor den Absolutbetrag der Differenz der beiden übrig gebliebenen Zahlen in tschechischen Kronen bezahlen. Wie viele Kronen wird Viktor bekommen, vorausgesetzt, dass beide Spieler jeweils für sich optimal spielen?

Ergebnis: 32

Lösungsweg: Wenn Viktor am Zug ist, kann er den kleinsten Abstand zweier Zahlen mindestens verdoppeln, indem er jede zweite Zahl entfernt. Auf diese Weise erhält er mindestens $2^5 = 32$ tschechische Kronen.

Wenn Lukas am Zug ist, kann er den Abstand zwischen der größten und der kleinsten noch vorhandenen Zahl halbieren, indem er die größten 2^k (oder die kleinsten 2^k) Zahlen wegnimmt. Diese Vorgehensweise garantiert ihm, dass er dann höchstens $1024 : 2^5 = 32$ Kronen zahlen muss.

Insgesamt hat man also folgendes Ergebnis: Falls beide Spieler für sich optimal spielen, erhält Viktor 32 Kronen.

Aufgabe 47J / 37S. Einige Studenten der Mathfyz-Universität schafften ihre Prüfungen nicht und wechselten deshalb an die IAU (Irgendeine Andere Universität). Dieser Wechsel hatte die folgenden Konsequenzen:

1. Die Zahl der Studenten an der Mathfyz-Uni verringerte sich um ein Sechstel.
2. Die Zahl der Studenten an der IAU stieg um ein Drittel.
3. Der durchschnittliche Intelligenzquotient (IQ) stieg an beiden Universitäten um 2 %.

Um welchen Faktor war der durchschnittliche IQ der Studenten an der Mathfyz-Uni höher als der durchschnittliche IQ der Studenten an der IAU?

Ergebnis: $\frac{6}{5} = 1{,}2$-mal

Lösungsweg: Man bezeichnet mit $100m$ den ursprünglichen durchschnittlichen IQ aller Studenten der Mathfyz-Uni, mit $100i$ denjenigen aller Studenten der IAU und mit w den durchschnittlichen IQ derjenigen Studenten, die von der Mathfyz-Uni zur IAU wechselten. Da der Durchschnitts-IQ an der Mathfyz-Uni nach dem Wechsel der Studenten um 2% gestiegen ist, beträgt der Durchschnitts-IQ der übrig gebliebenen Studenten an der Mathfyz-Uni nun $102m$. Aus dem Verhältnis $5:1$ der verbliebenen Studenten zu den wechselnden Studenten erhält man für den ursprünglichen Durchschnitts-IQ die Gleichung

$$100m = \frac{5}{6} \cdot 102m + \frac{1}{6}w,$$

woraus $w = 90m$ folgt.

An der IAU ist der Durchschnitts-IQ nach dem Hinzukommen der Studenten aus der Mathfyz-Uni um 2% höher als vor dem Wechsel. Da das Verhältnis der Studenten der IAU zu den neu dazu gekommenen Studenten der Mathfyz-Uni $3:1$ ist, ergibt sich für den Durchschnitts-IQ nach dem Wechsel die Gleichung

$$102i = \frac{3}{4} \cdot 100i + \frac{1}{4}w,$$

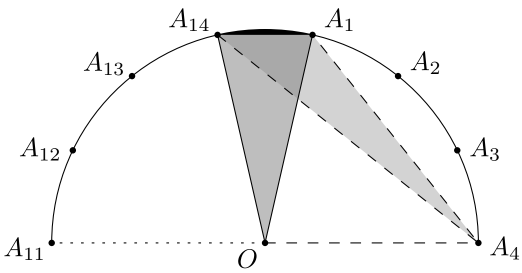
woraus $w = 108i$ folgt.

Insgesamt erhält man $90m = 108i$ und daraus $\frac{m}{i} = \frac{108}{90} = \frac{6}{5}$.

Aufgabe 48J / 38S. Ein reguläres 14-Eck $A_1A_2\dots A_{14}$ ist einem Kreis k mit Radius 1 einbeschrieben. Wie groß ist das Flächenstück, das vom Kreis sowie von den Sehnen A_1A_4 und A_4A_{14} begrenzt wird?

Ergebnis: $\frac{\pi}{14}$

Lösungsweg: Betrachte die Punkte A_1, A_4, A_{14} und A_{11}.



Da $11 = 4+7$ ist, ist die Strecke A_4A_{11} ein Durchmesser von k. Wegen $4-1 = 3 = 14-11$ ist $A_1A_4A_{11}A_{14}$ ein gleichschenkliges Trapez, in dem die Seiten A_4A_{11} und A_1A_{14} parallel sind. Das Dreieck $\triangle A_1A_4A_{14}$ hat deshalb die gleiche Fläche wie das Dreieck $\triangle A_1OA_{14}$, wobei O der Mittelpunkt von k ist. Die gesuchte Fläche ist somit gleich groß wie der Sektor A_1OA_{14}, also ein Vierzehntel der Kreisfläche.

Aufgabe 49J / 39S. Emil und Martina betrachten die 24-elementige Menge $\{1, 2, \dots, 24\}$. Emil schreibt alle 12-elementigen Teilmengen auf, bei denen die Summe aller Elemente gerade ist. Martina schreibt alle 12-elementigen Teilmengen auf, bei denen die Summe aller Elemente ungerade ist. Wer schreibt mehr Teilmengen auf und wie viele mehr?

Ergebnis: Emil, $\binom{12}{6} = 924$ Teilmengen mehr

Lösungsweg: Sei M eine beliebige 12-elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 24\}$. Gibt es eine Zahl i mit der Eigenschaft, dass M genau eine der Zahlen $2i-1$ oder $2i$ enthält, dann definiert man eine 12-elementige Menge $f(M)$, indem man das kleinste i mit obiger Eigenschaft wählt und in der Menge M die Zahl $2i-1$ durch $2i$ bzw. $2i$ durch $2i-1$ ersetzt.

Es ist klar, dass $f(f(M)) = M$ ist. Ebenso ist klar, dass f zu jeder Teilmenge von Emil mit obiger Eigenschaft genau eine Teilmenge von Martina mit dieser Eigenschaft liefert und umgekehrt.

Die unterschiedliche Anzahl von Emils und Martinas Mengen von Teilmengen kann also nur in den Teilmengen begründet sein, die obige Eigenschaft nicht haben. Dies sind alle Teilmengen der Form

$$\{2i_1 - 1, 2i_1, \dots, 2i_6 - 1, 2i_6\}, \qquad i_1 < i_2 < \dots < i_6.$$

Davon gibt es $\binom{12}{6} = 924$ Stück und deren Summe aller Elemente ist immer gerade. Also hat Emil 924 Teilmengen mehr aufgeschrieben.

Aufgabe 50J / 40S. Ferdinand denkt sich drei paarweise verschiedene positive ganze Zahlen a, b und c aus, so dass die Summe von zwei dieser Zahlen genau 800 ist. Als er dann die Zahlen a, b, c, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ und $a+b+c$ auf ein Blatt Papier schreibt, stellt er fest, dass alle prim sind. Wie groß ist die Differenz zwischen der größten und der kleinsten Zahl auf dem Papier?

Ergebnis: 1594

Lösungsweg: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b+c=800$. Wenigstens eine der Zahlen a, $b+c-a=800-a$ oder $a+b+c=800+a$ ist durch 3 teilbar, kann also nur prim sein, wenn sie gleich 3 ist. Da $800+a>800-a$ ist, bleiben nur die zwei Möglichkeiten $a=3$ oder $800-a=3$.

Wäre $a=3$, dann wäre $3+(b-c)\geq 2$ und gleichzeitig $3-(b-c)\geq 2$, also $|b-c|\leq 1$. Das ist ein Widerspruch zu $b\neq c$ und $b+c=800$.

Somit muss $800-a=3$, d.h. $a=797$ sein. Ferdinands größte Primzahl ist damit $a+b+c=797+800=1597$. Da $b+c=800$ ist, kann keine Primzahl gerade sein. Deswegen ist $800-a=3$ die kleinste. Die Differenz zwischen der größten und der kleinsten Zahl auf dem Papier ist also $1597-3=1594$.

Hinweis: Eine mögliche Lösung ist $a=797$, $b=223$ und $c=577$.

Aufgabe 51J / 41S. Hannah markiert zufällig zwei Stellen auf einem Stab, der einen Meter lang ist. Danach zerbricht Peter den Stab, wiederum zufällig, in 2013 Stücke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die zwei Markierungen auf demselben Stück befinden?

Ergebnis: $\frac{1}{1007}$

Lösungsweg: Man stelle sich den Stab vor, als er noch in einem Stück war. Hannah bringt darauf zufällig zwei grüne Markierungen an und Peter zufällig 2012 rote Bruchstellen. Nun befinden sich 2014 farbige Punkte auf dem Stab, zwei davon sind grün. Es gibt genau $\binom{2014}{2}=1007\cdot 2013$ Möglichkeiten, diese zwei grünen Punkte auszuwählen. In genau 2013 Fällen befinden sich diese zwei grünen Punkte direkt nebeneinander. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{2013}{1007\cdot 2013}=\frac{1}{1007}.$$

Aufgabe 52J / 42S. Wie viele zehnstellige positive ganze Zahlen, die jede der Ziffern $0,1,\ldots,9$ genau einmal enthalten, sind Vielfache von 11111?

Hinweis: Positive ganze Zahlen beginnen nicht mit einer Null.

Ergebnis: $3456=2^5\cdot 5!-2^4\cdot 4!$

Lösungsweg: Da $0+1+\cdots+9=9\cdot 5$ ist, sind alle gesuchten Zahlen durch 9 teilbar und somit sogar durch 99999. Bezeichnet man die ersten 5 Ziffern der gesuchten Zahlen mit A und die letzten 5 Ziffern mit B, so gilt

$$99999 \mid 100000A+B \iff 99999 \mid A+B.$$

Da A und B fünfstellige positive ganze Zahlen kleiner 99999 sind, gilt weiter

$$0<A+B<2\cdot 99999 \text{ und somit } A+B=99999, \text{ d.h. } B=99999-A.$$

Daraus gewinnt man eine notwendige und hinreichende Bedingung für die zehnstellige Zahl, die durch 99999 teilbar ist: Die i-te Stelle von A und die i-te Stelle von B addieren sich zu 9 ($i=1,\ldots,5$). Gruppiert man die verfügbaren zehn Ziffern in fünf Paaren

$$(0,9),\ (1,8),\ (2,7),\ (3,6),\ (4,5),$$

dann kann man diese Paare beliebig umsortieren (5! Möglichkeiten) und gleichzeitig wählen, welche Ziffer in A bzw. B stehen soll (2^5 Möglichkeiten). Davon muss man jedoch die Zahlen mit führender Ziffer Null abziehen, d.h. alle Möglichkeiten mit $(0,9)$ an erster Stelle und 0 in A. Dies sind 4! (vier restliche Paare) multipliziert mit 2^4 (beliebige Aufteilung) Zahlen, d.h. es bleiben

$$5!\cdot 2^5-4!\cdot 2^4.$$

Aufgabe 53J / 43S. Für ein Polynom $P(x)$ vom Grad 2013 mit reellen Koeffizienten gilt für alle $n = 0, 1, \dots, 2013$ die Gleichnung $P(n) = 3^n$. Bestimme $P(2014)$.

Ergebnis: $3^{2014} - 2^{2014}$

Lösungsweg: Definiert man das Polynom $Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k$, dann hat $Q(x)$ den Grad 2013 und mit der binomischen Formel gilt für jedes $x \in \{0, \dots, 2013\}$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} \cdot 2^k \cdot 1^{(x-k)} = (2+1)^x = P(x).$$

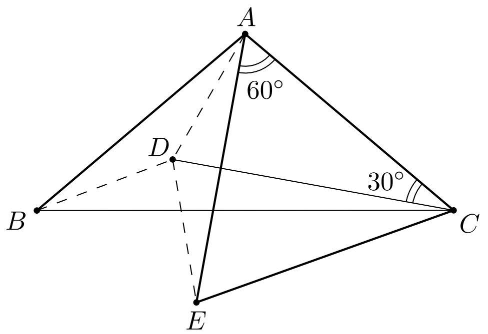
Das Differenzpolynom $P(x) - Q(x)$ hat daher auch Grad 2013 und 2014 Nullstellen und muss daher das Nullpolynom sein. Also ist $P(x) = Q(x)$ und

$$\begin{aligned} Q(2014) &= \sum_{k=0}^{2013} \binom{2014}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{2014} \binom{2014}{k} 2^k - \binom{2014}{2014} 2^{2014} \\ &= (1+2)^{2014} - 2^{2014} = 3^{2014} - 2^{2014}. \end{aligned}$$

Aufgabe 54J / 44S. Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = \overline{AC}$ und $\angle BAC = 99.4°$ ist ein Punkt D gegeben mit $\overline{AD} = \overline{DB}$ und $\angle BAD = 19.7°$. Wie groß ist $\angle BDC$?

Ergebnis: 149,1°

Lösungsweg: Sei E der Spiegelpunkt von B an der Geraden AD.



Dann ist $\overline{AE} = \overline{AB} = \overline{AC}$ und $\angle EAC = \angle BAC - 2 \cdot \angle BAD = 60°$, was zur Folge hat, dass das Dreieck $\triangle AEC$ gleichseitig ist. Aufgrund der Spiegelung gilt $\overline{DE} = \overline{DB} = \overline{DA}$ und deswegen ist CD die Mittelsenkrechte von AE und $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACE = 30°$. Im nichtkonvexen Viereck $ABDC$ berechnet man nun

$$\angle BDC = \angle DBA + \angle BAC + \angle ACD = 19{,}7° + 99{,}4° + 30° = 149{,}1°.$$

Aufgabe 55J / 45S. Finde die größte positive ganze Zahl, die nicht auf null endet und die Eigenschaft hat, dass das Entfernen einer bestimmten „inneren" Ziffer einen Teiler der Zahl liefert.

Hinweis: Eine „innere" Ziffer ist jede Ziffer außer der ersten und der letzten.

Ergebnis: 180625

Lösungsweg: Sei X die gesuchte Zahl. Zuerst zeigen wir, dass die zu entfernende Ziffer die zweite sein muss. Angenommen die ersten beiden Ziffern blieben erhalten. Dann würde aus der n-stelligen Zahl X durch das Entfernen einer inneren Ziffer eine $(n-1)$-stellige Zahl X' werden. Die Zahl $10 \cdot X'$ hätte ebenfalls wieder n Stellen und wäre von X verschieden, da X nicht auf null endet. Die Differenz von X und $10 \cdot X'$ hätte aber nur maximal $(n-2)$ Stellen, da X und $10 \cdot X'$ in den ersten beiden Stellen übereinstimmen würden. Dies ist ein Widerspruch, da diese aus zwei Vielfachen von X' gebildete Differenz ebenfalls ein Vielfaches von X' sein müsste und deshalb mindestens $n-1$ Stellen haben müsste.

Nun setzt man $X = a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c$, wobei a und b Ziffern mit $a \neq 0$ sind und $c < 10^n$ eine Zahl ist, die nicht auf null endet. Entfernen der zweiten Ziffer liefert $X' = a \cdot 10^n + c$ und für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c = k \cdot (a \cdot 10^n + c).$$

Wäre $k \geq 20$, dann hätte X eine größere führende Ziffer als X', was unmöglich ist. Also ist $k < 20$. Umformen der Gleichung ergibt

$$10^n(10a + b - k \cdot a) = (k-1)c.$$

Da die linke Seite durch 2^n und 5^n teilbar ist, muss das auch für die rechte Seite gelten. Da c nicht auf null endet, muss $k-1$ entweder durch 2^n oder 5^n teilbar sein. Da $k < 20$ ist, folgt wegen $2^5 > 20$ und $5^2 > 20$, dass n höchstens 4 sein kann. Also kann X höchstens 6 Stellen haben.

Wählt man $n = 4$, also das größtmögliche n, dann muss $k - 1 = 16$ sein und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$5^4(b - 7a) = c.$$

Da c positiv ist und $a > 0$ und b Ziffern sind, bleibt nur $a = 1$ als Lösung. Die Wahl $b = 9$ scheidet aus, weil c dann Vielfaches von 10 wäre. Somit muss $b = 8$ und $c = 5^4 = 625$ sein. Die Probe

$$X = 1 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 625 = 180625 = 17 \cdot 10625$$

zeigt, dass tatsächlich eine Lösung des Problems gefunden wurde.

Aufgabe 56J / 46S. Drei paarweise verschiedene reelle Zahlen a, b und c erfüllen

$$a = (b-2)c, \quad b = (c-2)a, \quad c = (a-2)b.$$

Bestimme das Produkt abc.

Ergebnis: 3

Lösungsweg: Wäre eine der Zahlen a, b oder c gleich null, dann wären alle gleich null und damit nicht paarweise verschieden. Ebenso kann keine der Zahlen gleich 3 sein.

Setzt man die dritte Gleichung in die zweite ein, so ergibt sich $b = (c-2)a = ((a-2)b-2)a = (ab - 2b - 2)a$ und daraus $b(a^2 - 2a - 1) = 2a$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist ungleich null, also auch die linke. Daher lässt sich $b = 2a/(a^2 - 2a - 1)$ folgern.

Aus $a = (b-2) \cdot c,\ c = (a-2) \cdot b$ und $b = 2a/(a^2 - 2a - 1)$ folgt

$$\begin{aligned} a &= (b-2) \cdot c = (b-2) \cdot (a-2) \cdot b = \\ &= \left(\frac{2a}{a^2 - 2a - 1} - 2\right) \cdot (a-2) \cdot \frac{2a}{a^2 - 2a - 1} \\ &= \frac{2a - 2a^2 + 4a + 2}{a^2 - 2a - 1} \cdot (a-2) \cdot \frac{2a}{a^2 - 2a - 1}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt

$$\begin{aligned} & a \cdot (a^2 - 2a - 1)^2 = 2a \cdot (a-2)(-2a^2 + 6a + 2) \\ \iff & a \cdot (a^4 - 4a^3 + 2a^2 + 4a + 1) = a \cdot (-4a^3 + 20a^2 - 20a - 8). \end{aligned}$$

Ein Zusammenfassen der Terme liefert schließlich die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (a^4 - 18a^2 + 24a + 9) \\ &= a \cdot ((a^4 + 3a^3 - 9a^2 - 3a) + (-3a^3 - 9a^2 + 27a + 9)) \\ &= a \cdot (a-3) \cdot (a^3 + 3a^2 - 9a - 3). \end{aligned}$$

Wegen $a \neq 0$ und $a \neq 3$ folgt $a^3 + 3a^2 - 9a - 3 = 0$.

Aufgrund der Symmetrie der drei Ausgangsgleichungen erhält man dieselbe Formel auch für b und c. Daher sind a, b und c die drei verschiedenen Nullstellen des Polynoms $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3 = (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)$. Ein Koeffizientenvergleich beim konstanten Glied (oder der Satz von Vieta) liefert $abc = 3$.

Aufgabe 57J / 47S. Im nicht gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ gibt es eine Höhe und eine Seitenhalbierende der gleichen Länge, sowie eine andere Höhe mit der selben Länge einer anderen Seitenhalbierenden. Welches Verhältnis haben die Längen der dritten Höhe und der dritten Seitenhalbierenden?

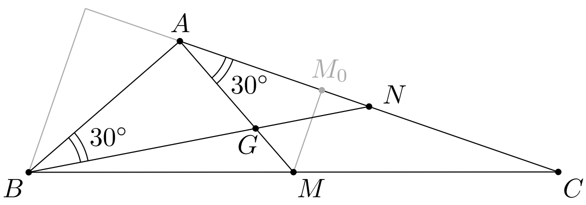
Ergebnis: $\frac{2}{7}$

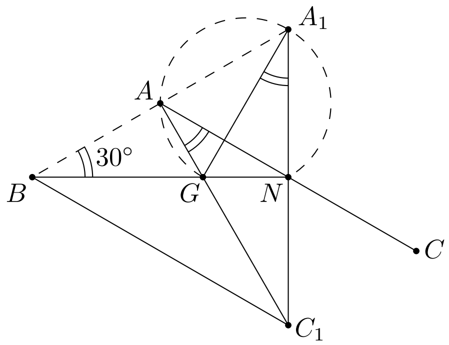
Lösungsweg: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a > b > c$. Die zugehörigen Höhen und Seitenhalbierenden erfüllen dann $h_a < h_b < h_c$ und $s_a < s_b < s_c$. Gleichzeitig gilt $h_a < s_a$, $h_b < s_b$ und $h_c < s_c$, woraus $h_b = s_a$ und $h_c = s_b$ folgt.

Bezeichne M den Mittelpunkt der Seite BC und M_0 die Projektion von M auf die Seite AC. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AMM_0$ gilt

$$\overline{MM_0} = \frac{1}{2}h_b = \frac{1}{2}s_a = \frac{1}{2}\overline{AM}.$$

Also ist $\angle MAC = 30°$. Analog ergibt sich mit dem Mittelpunkt N der Seite AC, dass $\angle NBA = 30°$ ist.





Bezeichne G den Schwerpunkt (= Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) des Dreiecks $\triangle ABC$. Konstruiert man ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A_1BC_1$ mit Seitenhalbierender BN, dann gilt für den Punkt A_1, dass $\angle NBA_1 = 30°$ ist und auch der Winkel $\angle GA_1N$ ist 30°. Also liegen B, A und A_1 auf einer Geraden und A_1 ist verschieden von A (da das Dreieck $\triangle ABC$ nicht gleichschenklig ist).

Wegen $\angle MAC = \angle GAN = 30°$ und $\angle GA_1N = 30°$ wird die Strecke GN von A aus und von A_1 aus unter dem gleichen Winkel gesehen. Deshalb ist NA_1AG ein Sehnenviereck. Daher muss A der andere Schnittpunkt der Geraden BA_1 mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle GNA_1$ sein. Der Punkt A muss sogar der Mittelpunkt der Strecke BA_1 sein, da das Dreieck $\triangle A_1BC_1$ gleichseitig ist.

Somit muss $\angle BAC = 120°$ sein und $\overline{AC} : \overline{AB} = 2$ gelten, da das Dreieck $\triangle BNA$ gleichsschenklig ist.

In einem Dreieck mit $\alpha = 120°$ und den Seitenlängen $\overline{AB} = 1$ bzw. $\overline{AC} = 2$ folgt mit dem Kosinussatz $a = \sqrt{1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2} = \sqrt{7}$ und $s_c = \sqrt{1/4 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$. Die Fläche F ergibt sich zu

$$F = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und schließlich $h_a = 2F/a = 3/\sqrt{21}$. Insgesamt folgt

$$\frac{h_a}{s_c} = \frac{\frac{3}{\sqrt{21}}}{\frac{1}{2}\sqrt{21}} = \frac{2}{7}.$$