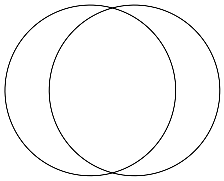
1. feladat. 2013 pontosan egyféleképpen írható fel két prím összegeként. Mennyi ennek a két prímnek a szorzata?

Eredmény: 4022

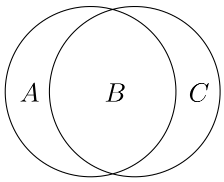
Megoldás: Mivel az összeg páratlan, ezért az egyik prímnek párosnak kell lennie, tehát $2013 = 2 + 2011$ az egyetlen lehetőségünk, és ez tényleg működik, hiszen 2011 is prím. Így az eredmény $2 \cdot 2011 = 4022$.

2. feladat. Két egységsugarú kör metszi egymást. A körök metszetének területe megegyezik a körök metszeten kívüli részeinek területösszegével. Mekkora a metszet területe?



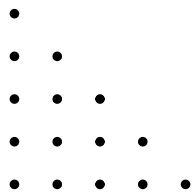
Eredmény: $\frac{2}{3}\pi$

Megoldás: Jelöljük az egyes területrészeket A-val, B-vel és C-vel, ahogy az ábrán látható.



Könnyen látható, hogy $A = C$ a szimmetria miatt így $B = A + C$-ből következik, hogy $B = 2A$. Tehát a metszet területe egyenlő a bal oldali kör területének kétharmadával, azaz $\frac{2}{3}\pi$-vel.

3. feladat. Van 5 sárga, 4 piros, 3 zöld, 2 kék és 1 lila rajzszögünk. Hányféleképpen tudjuk elhelyezni őket az ábrán látható háromszög alakú rácsban úgy, hogy egy sorban vagy oszlopban se legyenek azonos színű rajzszögek? (Az egyforma színű rajzszögek nem megkülönböztethetők).



Eredmény: 1

Megoldás: Először a sárga szögeket helyezzük el, és az egyetlen lehetőségünk erre, hogy a háromszög átfogójára tesszük őket. Ugyanígy a 4 pirosat is csak az üresen maradó helyek által alkotott háromszög átfogójára tehetjük, és ezt folytatva belátható, hogy csak egy ilyen elhelyezés létezik.

4. feladat. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek szorzata 600?

Eredmény: 3558

Megoldás: Mivel $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, ezért csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 számjegyeket használhatjuk fel. Az 1 számjegy felhasználása csak növelné a számot, ezért ezt nem használjuk fel. Ezen felül két darab 5-öst is fel kell használnunk, mivel 5^2 szerepel a prímtényezős felbontásban. A további számjegyek szorzata 24, így egy számjegy nem elég, a $3 \cdot 8$ illetve $4 \cdot 6$ számpárok közül pedig az előbbiben van a legkisebb számjegy, ezért azt használjuk fel, tehát a keresett szám a 3558.

5. feladat. Az a és b pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$a + \frac{1}{b} = 7 \quad \text{and} \quad b + \frac{1}{a} = 5.$$

Mennyi az $ab + \frac{1}{ab}$ kifejezés értéke?

Eredmény: 33

Megoldás: Összeszorozzuk a két egyenletet, és azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} ab + \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{1}{ab} &= 35, \\ ab + \frac{1}{ab} &= 33. \end{aligned}$$

6. feladat. Lali leírt a füzetébe egy hatjegyű egész számot, amire teljesülnek az alábbi állítások:

1. A számot visszafelé olvasva az eredeti számot kapjuk.
2. A szám osztható 9-cel.
3. Ha elhagyjuk a szám első és utolsó számjegyét, a megmaradó négyjegyű számnak csak egy prímosztója van, a 11.

Melyik számot írta le Lali?

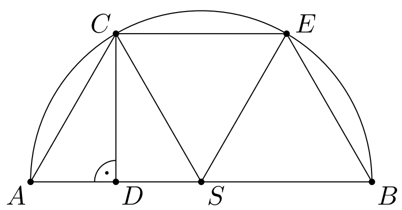
Eredmény: 513315

Megoldás: Először az utolsó feltételt vizsgáljuk. 11 egyetlen négyjegyű hatványa az 1331, így a keresett szám $\overline{a1331a}$ formájú lesz valamilyen a számjegyre. Mivel osztható a szám 9-cel, így a számjegyek összege $2a + 8$ is osztható lesz vele. $2a + 8$ páros és legfeljebb 26, így az egyetlen lehetőség, hogy $2a + 8 = 18$, amiből $a = 5$, és a keresett számunk az 513315.

7. feladat. Egy k félkör AB átmérőjén rajta van a D pont. A D ponton keresztül merőlegest állítunk az AB átmérőre, és ez a merőleges a k félkört a C pontban metszi. Az AC és CB körívek hosszának aránya $1 : 2$. Mekkora az $AD : DB$ arány?

Eredmény: $1 : 3$

Megoldás: Mivel C harmadolja az AB ívet, ezért kijelölhetünk egy $E \in k$ pontot, hogy A, C, E, és B (ebben a sorrendben) egy szabályos hatszög egymást követő csúcsai legyenek.



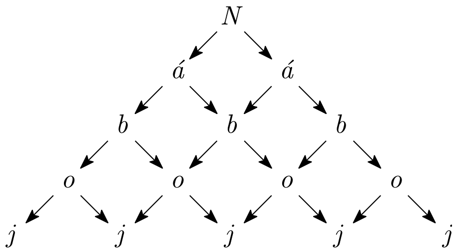
Ha S a k középpontja, az ASC háromszög szabályos, és D az SA felezőpontja (szabályos háromszögben a magasságok és a súlyvonalak egybeesnek). Ebből pedig már könnyen látható, hogy $AD : DB = 1 : 3$.

8. feladat. András és Béla kapnak egy zacskó cukorkát, és elosztják egymás közt úgy, hogy mindketten ugyanannyi darabot kapnak. Ezután mindketten megesznek naponta 2 vagy 3 darab cukorkát. Így András 14 nap alatt ette meg a cukorkáit, míg Béla pontosan három hét alatt. Hány cukorka volt a zacskóban?

Eredmény: 84

Megoldás: András legfeljebb $3 \cdot 14 = 42$ cukrot evett meg, míg Béla legalább $2 \cdot 21 = 42$ darabot. Mivel egyszerre kezdték enni, és ugyanannyi cukruk volt kezdéskor, ezért csak 42 cukorkát kaphattak, ami azt jelenti, hogy $42 + 42 = 84$ cukorka volt eredetileg a zacskóban.

9. feladat. Hányféleképpen olvasható ki a *Náboj* szó az ábrából?



Eredmény: 16

Megoldás: A következő betűk közül *N*, *á*, *b*, *o* mindegyikből pontosan kétféle úton mehetünk tovább. Így a *Náboj* szó pontosan $2^4 = 16$-féleképpen olvasható ki.

10. feladat. Egy sziget lakói vagy igazmondók, vagy hazudozók. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudozók pedig mindig hazudnak. 12 szigetlakó ül egy kerek asztal körül, és közülük mindenki azt állítja: "Én igazmondó vagyok, és a jobb oldali szomszédom hazudozó." Legfeljebb hány hazudozó ülhet az asztalnál?

Eredmény: 6

Megoldás: Ha két igazmondó egymás mellett ülne, akkor a bal oldali nem hívná a jobb oldalit hazudozónak. Ugyanezért két hazudozó se ülhet egymás mellé. Így már csak azt kell belátni, hogy ha felváltva ülnek a hazudozók és az igazmondók, az kielégíti a feltételt, ez pedig könnyen belátható, tehát a válasz 6.

11. feladat. Julinak 11 egybevágó négyzet alakú csempéje van, amely közül 6 piros, 3 kék és 2 zöld. Hányféleképpen tud lefedni ezekkel egy 3×3-as négyzetet 9 csempével úgy, hogy ha az óramutató járásával megegyező irányban $90°$-kal elforgatjuk a középpontja körül a négyzetet, akkor az elforgatott négyzet színezése megegyezik az eredeti színezéssel? (Az azonos színű csempék nem megkülönböztethetők.)

Eredmény: 0

Megoldás: Ahhoz, hogy egy színezés a $90°$-os elforgatás után is azonos legyen az eredetivel, az kell, hogy a négy sarokban lévő csempe egyforma színű legyen. Ugyanígy a másik négy nem középen lévő csempe is egyszínű kell legyen. Ehhez egy színből kellene 8 darab csempe, vagy két színből 4 darab csempe. Ezek közül egyik sem áll rendelkezésre, így a válasz 0, vagyis nincs ilyen színezés.

12. feladat. Egy szigeten az ott élők közül a férfiak kétötöde és a nők háromötöde házas. A szigetlakók hány százaléka házas?

Eredmény: $48\% = \frac{12}{25}$

Megoldás: Jelölje D a házaspárok számát a szigeten. Ekkor $\frac{5}{2}D$ férfi és $\frac{5}{3}D$ nő él a szigeten, vagyis összesen $\frac{5}{2}D + \frac{5}{3}D = \frac{25}{6}D$ lakója van a szigetnek, és ebből $2D$ házas. Így a házas szigetlakók aránya

$$\frac{2D}{\frac{25}{6}D} = \frac{12}{25} = 48\%.$$

13. feladat. Legfeljebb mekkora oldalhosszúságú szabályos háromszöget tudunk kivágni egy 21×29.7 cm méretű téglalap alakú papírlapból?

Eredmény: $14\sqrt{3} = \frac{42}{\sqrt{3}}$ cm

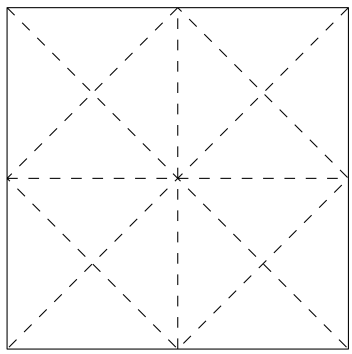
Megoldás: Bármely szabályos háromszög, amely két párhuzamos egyenes között fekszik felnagyítható úgy, hogy egy-egy csúcsa rajta van a két egyenesen. Ezek közül a háromszögek közül a leghosszabb oldalú az, amelyiknek az egyik oldala rajta van az egyik egyenesen.

Ezért ha a lap szélessége 21 cm, akkor a lehető legnagyobb háromszög magassága 21 cm. Ebből az oldalhossz $\frac{21\,\text{cm}}{\sin 60°} = 14\sqrt{3}\,\text{cm}$. Mivel $14\sqrt{3} < 14 \cdot 2 < 29.7$, ezért ez a háromszög elfér a lapon.

14. feladat. Kata egy négyzet alakú lapot négyszer egymás után félbehajt úgy, hogy minden hajtás után egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget kap. Ezután kihajtogatja a lapot, és leteszi maga elé. Hány négyzetet láthat Kata az előtte lévő papíron?

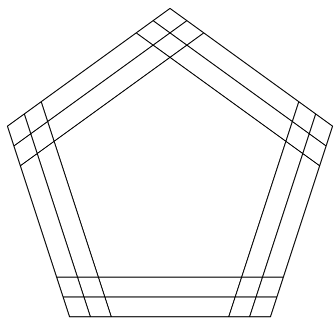
Eredmény: 10

Megoldás: A hajtásvonalak a következő ábrán láthatók.



Összesen 10 négyzetet láthatunk: az egész lapot, a négyzetet, ami összeköti a felezőpontokat, és mindkettőben látható négy kisebb négyzet.

15. feladat. Hány ötszög látható az ábrán?



Eredmény: $3^5 = 243$

Megoldás: Vegyük észre, hogy minden ötszögnek tartalmaznia kell az ábra közepét. Minden oldal kiválasztásánál három lehetőségünk van (külső, középső, belső szakaszok), így összesen $3^5 = 243$ ötszög van.

16. feladat. Tibi össze akart adni két pozitív egészet, de véletlenül egy 0 számjegyet írt az egyik szám végére. Így 3858-at kapott összegként a helyes 2013 helyett. Mekkora a két szám közül a nagyobbik?

Eredmény: 1808

Megoldás: Jelöljük a két számot a-val és b-vel. Mivel a 0 számjegy hozzáadása olyan, mintha 10-zel szoroznánk, így csak a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} a + b &= 2013, \\ 10a + b &= 3858. \end{aligned}$$

Kivonjuk a második egyenletből az elsőt, majd leosztunk 9-cel, így azt kapjuk, hogy $a = 205$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe kijön, hogy $b = 1808$. Mivel ez a nagyobb a két szám közül, ez lesz a megoldás.

17. feladat. Mekkora a sugara a lehető legkisebb körnek, amivel le lehet fedni egy 3, 5, és 7 egység oldalhosszúságú háromszöget?

Eredmény: 3.5

Megoldás: Mivel $3^2 + 5^2 < 7^2$, így a 7 egység hosszú oldallal szembeni szög tompaszög. Így a háromszög lefedhető egy 3.5 sugarú körrel. Másrészt kisebb sugarú körrel nem fedhető le a leghosszabb oldal, ezért 3.5 a helyes megoldás.

18. feladat. Annának, Biának, Cilinek és Dórinak 100 nyalókája van együtt. Bármely két lánynak együtt legalább 41 nyalókája van. Legalább hány nyalókája van Annának?

Eredmény: 12

Megoldás: Ha az egyes lányok nyalókáinak számát rendre A, B, C, D-vel jelöljük, akkor tudjuk $A+B \geq 41$, $A+C \geq 41$, and $A+D \geq 41$, így ezeket összeadva $2A+(A+B+C+D) \geq 123$. Mivel $A+B+C+D = 100$, ezért azt kapjuk, hogy $2A \geq 23$, ami ekvivalens azzal, hogy $A \geq 12$, mert A pozitív egész.

Ehhez a minimális értékhez pedig találhatunk megfelelő elosztást, $L = 12$, $M = N = 29$, $S = 30$ kielégíti a feladat feltételeit.

19. feladat. Egy $ABCD$ téglalap területe 80 területegység, az átlója pedig 16 egység hosszú. Mekkora z átlók által bezárt szög szinusza?

Eredmény: $\frac{5}{8} = 0.625$

Megoldás: Jelölje S az átlók metszéspontját, és h az $\triangle ABC$ B-hez tartozó magasságát. Az $ABCD$ területe megkapható úgy, mint $AC \cdot h$ amiből $h = 80/16 = 5$. A keresett érték ekkor $\sin \angle ASB = \sin \angle CSB = \frac{h}{BS} = \frac{5}{8}$.

20. feladat. Mekkora az $a^b + c^d$ kifejezés lehető legnagyobb értéke, ha a, b, c, és d a

$$\{-7, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

halmaz különböző elemei?

Eredmény: $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$

Megoldás: Ahhoz, hogy pozitív számot kapjunk, páros kitevőket kell vennünk. Mivel $(-2)^{-4} = (-4)^{-2} < (-1)^{-2}$, ezért a -2 és -4 lesznek a kitevők. Továbbá, mivel a negatív hatvány csökkenti a számot, ezért a -1 és a -3 lesznek az alapok. A két lehetőségünk közül $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$-nek nagyobb az értéke.

21. feladat. Egy 110°-os szöget véletlenszerűen elhelyezünk a koordinátasíkon. Mekkora a valószínűsége, hogy a szög szárai egy függvénygrafikont alkotnak?

Eredmény: $\frac{11}{18}$

Megoldás: Ahhoz, hogy egy szög függvénygrafikon lehessen, az kell, hogy ne tartalmazzon két olyan pontot, amelyeknek megegyezik az x koordinátája. Feltehetjük, hogy a szög csúcsa az origóban van. Egyszer körbeforgatjuk 360°-kal a szöget, és megnézzük, hol alkot függvényt. Abból a pozícióból indulunk, ahol az egyik szár egybeesik az y tengely pozitív irányával, a másik szár pedig tőle jobbra van. Ha elkezdjük forgatni a szöget ebből a pozícióból, akkor 110° forgatás után kerülünk olyan helyzetbe, hogy egy x-hez több pont is tartozik. Újabb 70° forgatás után pedig a kezdőpozíciónk origóra vonatkozó tükrözésébe jutunk, és innen újból megfeleltethető a szögünk egy függvény grafikonjának. Ezután bármilyen forgatással vagy olyan pozícióba jutunk, amiben korábban már voltunk, vagy egy korábbi pozíció origóra vonatkozó tükrözésébe, ezek pedig akkor lesznek nekünk jók, ha az eredeti pozíció is megfelelő volt. Így a keresett valószínűség $\frac{110}{180} = \frac{11}{18}$.

22. feladat. Jancsi rajzolt egy $A_1A_2 \ldots A_{100}$ szabályos százszöget (az óramutató járása szerint számozva) a tavalyi Nábojon (2012. március 23.) és véletlenszerűen elhelyezett egy figurát a százszög egyik csúcsán. Ezután mindennap a figurát annyi csúccsal helyezte arrébb az óramutató járása szerint haladva, amennyi annak a csúcsnak az indexe, amelyen a figura állt (A_3-ról az A_6-ra teszi, A_{96}-ról az A_{92}-re). Most (2013. április 12.) a figura az A_{100}-on áll. Mennyi volt a valószínűsége annak, hogy ez történik?

Eredmény: $0.04 = \frac{1}{25}$

Megoldás: Gyakorlatilag az a kérdés, hogy 1-től 100-ig az egész számok közül melyek azok, amelyeket ha ismételten szorzunk 2-vel, akkor 100 többszörösét kapjuk. Az ilyen számok csak 25 többszörösei lehetnek, és ezek közül mind a négy (25, 50, 75, 100) megfelelő. Tehát a válasz $\frac{4}{100} = 0.04 = \frac{1}{25}$.

23. feladat. Egy pozitív egészet *különös*-nek nevezünk, ha felírható két egész négyzetének a különbségeként. Hány különös számot találunk az $1, 2, \ldots, 2013$ számok között?

Eredmény: 1510

Megoldás: A páratlan számok felírhatók úgy, mint $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ a 4 többszörösei pedig úgy, mint $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$. A $4k + 2$ alakú számok nem különösek, hiszen $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ két egyforma paritású pozitív egész szorzata, így vagy páratlan, vagy osztható 4-gyel. 503 darab $4k + 2$ alakú szám van 1-től 2013-ig, így 1510 a jó válasz.

24. feladat. Van három egységoldalú, egymást nem fedő szabályos konvex sokszögünk, amelyeknek van egy A közös pontja. Ezen sokszögek uniója egy M konkáv sokszög, amelynek az A belső pontja. Ha az egyik sokszög egy négyzet, a másik pedig egy hatszög, akkor mekkora M kerülete?

Eredmény: 16

Megoldás: Tekintjük a sokszögek A ponthoz tartozó belső szögeit. Az egyik $90°$-os, a másik $120°$-os, így mivel $360°$ a szögek összege (A belső pontja), ezért a harmadik $150°$-os, ami megfelel egy szabályos 12-szög belső szögének. Mivel bármely két sokszögnek van egy közös oldala, ezért M kerülete $4+6+12-(3\cdot2) = 16$.

25. feladat. Matyi felírta 1-től 100-ig az egész számokat véletlenszerű sorrendben. Mennyi a valószínűsége, hogy minden i-re, ahol $i = 1, \ldots, 50$ a $2i - 1$-edik helyen lévő szám kisebb, mint a $2i$-edik helyen lévő szám?

Eredmény: 2^{-50}

Megoldás: Tegyük fel, hogy Matyi párokban írja fel a számokat. Először véletlenszerűen választ két számot, majd a sorrendjüket. Így annak az esélye, hogy a kisebb kerül előbbre $\frac{1}{2}$ (függetlenül a kiválasztott számoktól), és ezért az 50 párra a valószínűség $\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 2^{-50}$.

26. feladat. A pink festéket piros és fehér festékből keverik $1:1$ arányban, a cián festéket pedig kék és fehér festékből $1:2$ arányban. Angi olyan festékkel szeretné kifesteni a szobáját, amit pink és cián festékből kever $2:1$ arányban. Már összekevert 3 doboz kék és 1 doboz piros festéket. Hány doboz festéket kell még felhasználnia, ha már csak piros és fehér festék áll rendelkezésére?

Eredmény: 23

Megoldás: Mivel csak piros és fehér festékünk van, ezért a végső keverék csak három doboz kék festéket tartalmazhat. Kék nincs a pink festékben, így mivel a ciánban $1:2$ arányban van kék és fehér, így pontosan 9 doboz cián festék kell (ebből 3 kék és 6 fehér). Mivel a mi festékünkben $2:1$ arányban van a pink és a cián, ezért összesen 27 doboz festékre lesz szükségünk (9-ből ciánt keverünk, 18-ból pinket). Mivel 4 dobozt már bekevertünk ezért még $27 - 4 = 23$ doboz festékre lesz szükségünk, hogy megkapjuk a végleges keverékünket.

27. feladat. Van egy kalapunk, amiben fehér, szürke és fekete nyuszik vannak. Amikor a bűvész elkezdi véletlenszerűen kihúzni a nyuszikat a kalapból (visszatevés nélkül), annak a valószínűsége, hogy előbb húz ki egy fehéret, mint egy szürkét $\frac{3}{4}$. Annak a valószínűsége, hogy előbb húz ki egy szürkét, mint egy feketét, szintén $\frac{3}{4}$. Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb húz ki egy fehéret, mint egy feketét?

Eredmény: $\frac{9}{10}$

Megoldás: A bűvész $\frac{3}{4}$ eséllyel húz ki egy fehéret egy szürke előtt, ebből következik, hogy a kalapban háromszor annyi fehér nyúl van, mint szürke. Hasonló módon, szürkéből háromszor annyi van, mint feketéből. Tehát a kalapban 9-szer annyi fehér nyúl van, mint fekete, tehát a keresett valószínűség $\frac{9}{10}$.

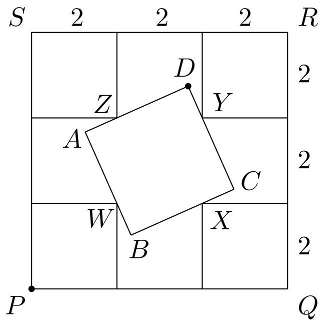
28. feladat. Az a, b pozitív egészekre igaz, hogy $49a + 99b = 2013$. Mennyi $a + b$ értéke?

Eredmény: 37

Megoldás: Hozzáadunk $a + b$-t mindkét oldalhoz, így azt kapjuk, hogy $50(a + 2b) = 2013 + (a + b)$. Az egyenlet bal oldala osztható 50-nel, ezért a jobb oldalra is igaz kell, hogy legyen ez. Ebből következik, hogy $a + b = 50k - 13$, ahol $k \in \mathbb{N}$.

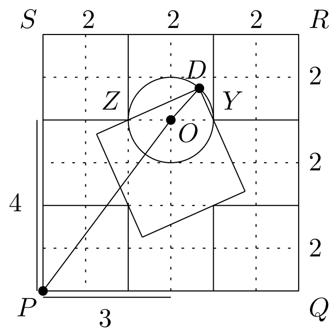
Ha $a + b \geq 87$, akkor $49a + 99b > 49a + 49b \geq 49 \cdot 87 > 2013$, ami nem lehetséges. Így az egyetlen lehetőség, hogy $a + b = 37$.

29. feladat. Egy 6 cm oldalú $PQRS$ négyzet sarkaiban elhelyezünk egy-egy kisebb, 2 cm oldalú négyzetet. Jelöljük a négyzetek $PQRS$ belsejében lévő csúcsait W, X, Y, Z betűkkel, ahogy az ábrán látható. Ezután szerkesztünk egy $ABCD$ négyzetet olyan módon, hogy a W, X, Y, Z csúcsok rendre rajta vannak az AB, BC, CD, DA oldalakon. Legfeljebb mekkora lehet a P és D pontok közötti távolság?



Eredmény: 6

Megoldás: A D pont a ZY átmérőjű körön van rajta, ennek a középpontját jelöljük O-val. Ez a kör egységsugarú, és a Pitagorasz-tétel alapján $PO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $PD \leq PO + OD = 6$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a P, O, D pontok egy egyenesbe esnek, tehát a maximális távolság 6.



30. feladat. Van 20 dobozunk, amelyekben összesen 129 alma van. Tudjuk, hogy néhány dobozban pontosan 4 alma van, míg a többi dobozban pontosan x alma van. Melyek x lehetséges értékei?

Eredmény: 11, 53

Megoldás: Jelöljük K-vel azoknak a dobozoknak a számát, amikben x alma van ($K \leq 20$). A fennmaradó $20 - K$ dobozban 4 alma van, így

$$K \cdot x + (20 - K) \cdot 4 = 129, \quad \text{which implies} \quad K(x - 4) = 49.$$

$K \leq 20$, ezért a lehetőségeink $K = 1$ és $K = 7$. $K = 1$-ből következik, hogy $x = 53$, $K = 7$-ből pedig azt kapjuk, hogy $x = 11$.

31. feladat. a és b olyan valós számok, hogy $a > b > 0$ és

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2013.$$

Mennyi az $\frac{a+b}{a-b}$ kifejezés értéke?

Eredmény: $\sqrt{\frac{2015}{2011}}$

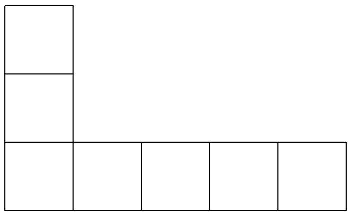
Megoldás: A megadott egyenletből következik, hogy $a^2 + b^2 = 2013ab$. Ezt az azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2015ab,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 2011ab.$$

Mivel $a > b > 0$, ezért tudjuk, hogy $\frac{a+b}{a-b}$ pozitív, így a fenti két egyenletet felhasználva:

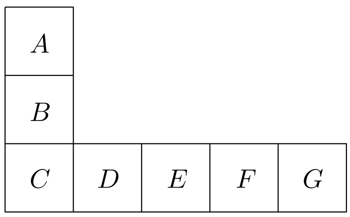
$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{2015ab}{2011ab}} = \sqrt{\frac{2015}{2011}}.$$

32. feladat. Hányféleképpen írhatjuk be az egész számokat 1-től 7-ig az ábrán látható négyzetekbe úgy, hogy minden számot csak egyszer használhatunk fel, és az alsó sorban lévő számok összege megegyezik a bal oldali oszlopban lévő számok összegével?



Eredmény: $144 = 3 \cdot 2 \cdot 4!$

Megoldás: Jelöljük a négyzetekhez tartozó értékeket az alábbi módon:



A feladat szövegéből következik, hogy $A + B + C + D + E + F + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ és $A + B = D + E + F + G = \frac{1}{2}(28 - C)$. így C páros kell legyen.

Ha $C = 2$, akkor $A + B = 13 = 6 + 7$, ami azt jelenti, hogy kétféleképpen tölthetjük ki a bal oldali oszlopot. Mindkét esetben 4!-féleképpen tudjuk sorbarakni az alsó sorban lévő számokat. Ha $C = 4$, akkor $A + B = 12 = 5 + 7$ ($6 + 6$ nem jó, mert különbözőknek kell lenniük), ha $C = 6$, akkor $A + B = 11 = 4 + 7$ ($5 + 6$ nem jó, mert $C = 6$), és ezekben az esetekben is $2 \cdot 4!$-féleképpen tudjuk elhelyezni a számokat. Így összesen $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ lehetőség van.

33. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, ahol $AB = 4\pi$, $BC = 4\pi + 3$, $CA = 4\pi + 6$. Jelöljük az A-hoz tartozó magasság talppontját D-vel. Mennyi $CD - BD$?

Eredmény: 12

Megoldás: Az ADC és ADB háromszögekre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, így azt kapjuk, hogy $CD^2 = AC^2 - AD^2$ és $BD^2 = AB^2 - AD^2$. A két egyenletet kivonjuk egymásból, ebből kijön az, hogy

$$CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2 = (4\pi + 6)^2 - (4\pi)^2 = 48\pi + 36.$$

Mivel D rajta van a BC oldalon, ezért

$$CD^2 - BD^2 = (CD - BD) \cdot (CD + BD) = (CD - BD) \cdot (4\pi + 3),$$

tehát $CD - BD = 12$.

34. feladat. Piripócson a villamosok mindennap mindkét irányban ugyanolyan időközönként közlekednek. Pumukli a villamossínek mentén sétálva azt tapasztalta, hogy 12 percenként előzte meg a villamos, és 4 percenként haladt el mellette a másik irányból jövő villamos. Milyen időközönként járnak Piripócson a villamosok?

Eredmény: 6 minutes

Megoldás: Jelöljük a villamos sebességét t-vel, a gyalogos sebességét c-vel és két egymás után közlekedő villamos távolságát d-vel. A feladatban szövegéből következik, hogy:

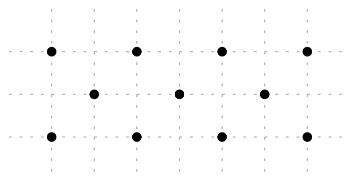
$$\begin{aligned} t - c &= \frac{d}{12\,\mathrm{min}}, \\ t + c &= \frac{d}{4\,\mathrm{min}}. \end{aligned}$$

Ha összeadjuk az egyenleteket, és leosztunk 2-vel, azt kapjuk, hogy

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12\,\mathrm{min}} + \frac{1}{4\,\mathrm{min}}\right) \cdot d = \frac{d}{6\,\mathrm{min}}.$$

Ebből következik, hogy a d távolságot a villamos 6 perc alatt teszi meg, ami azt jelenti, hogy Piripócson 6 percenként járnak a villamosok.

35. feladat. Hányféleképpen választható ki három pont az ábrán látható pontok közül úgy, hogy a három pont ne essen egy egyenesbe?



Note: Points are aligned in the indicated grid.

Eredmény: $148 = \binom{11}{3} - 17$

Megoldás: A megadott 11 pontból 3-at összesen

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$$

különböző módon választhatunk ki. Már csak azt kell kiszámolni, hogy hány ponthármas fekszik egy egyenesen, és ezek számát kivonni az összes lehetőségből. Összesen $4+1+4 = 9$ vízszintes, és $3+3+1+1 = 8$ átlós hármas ilyen, ezért az összes jó lehetőség $165 - 17 = 148$.

36. feladat. Tominak van egy doboz csokija, amiben 30 darab csoki van három 10-es sorban. Olyan módon fogyasztja el egyenként a csokikat, hogy bármely két sorban a csokik száma közötti különbség legfeljebb 1 legyen. Hányféleképpen eheti meg az egész doboz csokit?

Eredmény: $6^{10} \cdot (10!)^3$

Megoldás: A csokik sorrendje, ahogy Tomi megeszi őket, egyértelműen meghatározható a következő módon: minden sorban kiválasztjuk, hogy Tomi milyen sorrendben vesz el egy-egy csokit az egyes sorokból.

Minden sorban összesen 10!-féle sorrendje lehet a csokiknak, amiből három sorra $(10!)^3$-t kapunk.

Most számoljuk ki a sorok sorrendjének a számát. Tudjuk, hogy ha minden sorban ugyanannyi csoki van, akkor Tomi bármelyikből választhat, utána már csak a maradék két sorból vehet, végül pedig az egyetlen fennmaradó sorból kell választania. Három ilyen lépés után ismét ugyanannyi csoki lesz mindhárom sorban. Tehát elég tízszer kijelölni a három sor sorrendjét, ami $(3!)^{10} = 6^{10}$-féleképpen lehetséges.

Tehát Tomi $6^{10} \cdot (10!)^3$-féleképpen eheti meg a doboz csokit.

37. feladat. Egy hatjegyű pozitív egész számot *duplázó*-nak hívunk, ha az első három számjegyből álló szám megegyezik az utolsó három számjegyből álló számmal. Például 227227 duplázó, de 135153 nem az. Hány duplázó szám osztható 2013-mal?

Megjegyzés: Egy pozitív egész szám első számjegye nem lehet 0.

Eredmény: 5

Megoldás: Bármely hatjegyű duplázó szám felírható $1001 \cdot k$ alakban valamilyen k háromjegyű egészre, vagy megfordítva, bármely háromjegyű pozitív egész k-ra az $1001 \cdot k$ formula egy duplázó számot ad meg.

Mivel $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ és 1001 osztható 11-gyel, de nem osztható 3-mal és 61-gyel, ezért csak akkor kapunk megfelelő számot, ha a k egészünk az $1001 \cdot k$ formulából osztható $3 \cdot 61 = 183$-mal. Összesen 5 olyan háromjegyű k van, ami osztható 183-mal, így 5 olyan hatjegyű duplázó szám van, ami osztható 2013-mal.

38. feladat. Tegyük fel, hogy van egy 4×4-es sakktáblánk, amin minden négyzetbe egy lefele vagy jobbra mutató nyilat rajzolunk véletlenszerűen. Ezután elindulunk a bal felső sarokból, és a nyilak irányának megfelelően haladunk, amíg ki nem lépünk a sakktábláról. Mennyi a valószínűsége, hogy a jobb alsó sarokból lépünk ki a sakktábláról?

Eredmény: $\frac{5}{16} = \frac{\binom{6}{3}}{2^6}$

Megoldás: Számoljuk ki a bal felső sarokból a jobb alsóba vezető utak számát, és a valószínűségét, hogy követve a nyilakat az egyik ilyen úton megyünk végig. Minden ilyen utat követve hármat lépünk lefele, és hármat jobbra, tehát összesen $\binom{6}{3}$ nekünk megfelelő út van. Annak a valószínűsége, hogy pontosan egy adott helyes utat követünk 2^{-6}, mivel minden lépésnél a megfelelő irányt kell választanunk. Így a valószínűsége, hogy a jobb alsó sarokból hagyjuk el a táblát $2^{-6} \cdot \binom{6}{3}$.

39. feladat. Hozzuk a

$$\frac{212121210}{112121211}$$

törtet a lehető legegyszerűbb alakra (azaz olyan $\frac{a}{b}$ alakra, ahol a és b relatív prímek).

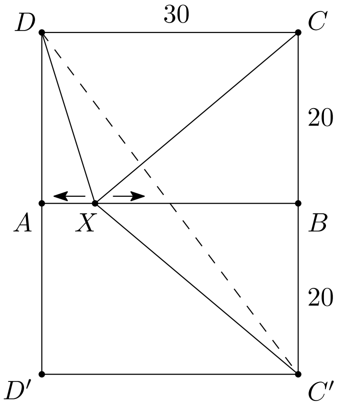
Eredmény: $\frac{70}{37}$

Megoldás: Könnyen látható, hogy a számláló és a nevező is osztható 3-mal, hiszen $212121210 = 3 \cdot 70707070$ and $112121211 = 3 \cdot 37373737$. A 3-mal való leosztás után vegyük észre, hogy 1010101-gyel is egyszerűsíthetünk, hiszen $70707070 = 70 \cdot 1010101$ and $37373737 = 37 \cdot 1010101$, további közös osztók már nincsenek, ezért a törtünk egyszerűsített alakja $\frac{70}{37}$.

40. feladat. Van egy $ABCD$ téglalapunk, ahol $AB = 30$ és $BC = 20$. Az AB oldal hány X pontjára lesz a CDX háromszög kerülete egész szám?

Eredmény: 13

Megoldás: Elegendő azt megoldani, hogy $DX + XC$ mikor lesz egész. Vegyük fel a C', D' pontokat úgy, hogy A, B pontok rendre a DD', CC' szakaszok felezőpontjai legyenek. Ekkor $DX + XC = DX + XC'$. A $DX + XC$ összeg akkor minimális, ha X az AB felezőpontja, és akkor maximális, ha X egyenlő A-val vagy B-vel.



Pitagorasz-tétel segítségével azt kapjuk, hogy $DC' = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ és $AC' = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300}$, azaz $36 < AC' < 37$. Így, ha X A és B között mozog, akkor $DX + XC$ először egy $20 + 36 = 56$-nál kicsivel nagyobb számról ($X = A$) 50-re (X is the midpoint of AB) csökken és ezután megint addig az 56-nál nagyobb számig ($X = B$) növekszik. Így az X pont $6 + 1 + 6 = 13$ pozíciója esetén lesz egész a kerület.

41. feladat. Milyen sorrendbe rakjuk az ábrán látható táblázat $r_1, \dots, r_{11}$ sorait, hogy az így kapott táblázat szimmetrikus legyen a megjelölt átlóra? Elegendő egy megoldást találni.

r_1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
r_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
r_3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
r_4	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
r_5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
r_6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
r_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
r_8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
r_9	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
r_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
r_{11}	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

Eredmény: visszafelé (vagy ebben a sorrendben a sorokat ciklikusan eltologatva), például $r_{11}, r_{10}, r_9, \dots, r_1$ or $r_{10}, r_9, \dots, r_1, r_{11}$, ..., $r_1, r_{11}, r_{10}, \dots, r_2$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a táblázat szimmetrikus a másik átlójára. Ahhoz, hogy a táblázat a kijelölt átlóra legyen szimmetrikus, szükséges azt tükrözni a vízszintes tengelyére, ami ebben az esetben a hatodik sor.

Megjegyzés: erre a táblázatra nincs más megoldás a fenti tizenegyen kívül.

42. feladat. Minden pozitív egész n-re legyen

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Melyik az a legkisebb $k \geq 2$ egész, amire $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k > 4$?

Eredmény: 254

Megoldás: Bevezetve az $A_n = a_n^3$ jelölést, az eredeti probléma ekvivalens azzal, hogy találjuk meg a legkisebb $k \geq 2$ egészt, amire $A_2 \cdot A_3 \cdots A_k > 4^3 = 64$. A definíciójából következik, hogy

$$A_n = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3} = \frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n-1)}{n \cdot n \cdot n}$$

és ezért

$$A_2 \cdot A_3 \cdots A_k = \frac{3\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2} \cdot \frac{4\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} \cdots \frac{(k+1)\cdot(k+1)\cdot(k-1)}{k\cdot k\cdot k} = \frac{1\cdot(k+1)\cdot(k+1)}{2\cdot 2\cdot k} = \frac{(k+1)^2}{4k}.$$

Már csak azt az egyenlőtlenséget kell megoldani, hogy

$$(k+1)^2 > 256k$$

egész k-ra. Vonjunk ki $2k$-t mindkét oldalból, és szorozzuk meg $1/k$-val, így azt kapjuk, hogy $k + \frac{1}{k} > 254$, aminek a legkisebb egész megoldása $k = 254$.

43. feladat. Barbi n egyenlő szeletre vágta fel a pizzát, majd megjelölte a szeleteket az $1, 2, \ldots, n$ számokkal (minden számot pontosan egyszer használt fel). Úgy számozta meg őket, hogy bármely két szomszédos egészekkel (i és $i+1$) jelölt szelet között pontosan k másik szelet van. Aztán jött Pocakos Peti, és megette majdnem az egész pizzát, csak három egymás melletti szeletet hagyott, a 11, 4, 17 számokkal jelölteket, ebben a sorrendben. Hány szelet pizza volt eredetileg?

Eredmény: 20

Megoldás: Tegyük fel, hogy a szomszédos számokkal jelölt szeletek között pontosan $k-1$ szelet van, így ha pontosan k szelettel lépünk arrébb, akkor az 1-es szeletről a 2-esre jutunk, a 2-esről a 3-asra, és így tovább. Ezeket a lépéseket mind egy irányba kell tennünk, mert másképp az i-edik szeletről az $i-1$-edikre jutnánk, az $i+1$-edik helyett. Az n-edik szeletről egy ilyen lépéssel az 1-es szeletre jutunk, hiszen minden más i k szeletnyire van $i+1$-től és $i-1$-től. Ilyen k szeletes lépésekkel tehát végigmehetünk az egész pizzán. Ezért létezik egy olyan s szám, hogy ha s-szer lépünk k szelettel, akkor pont a szomszédos szeletre jutunk. Így azt kapjuk, hogy

$$11 - 4 \equiv s \cdot k \equiv 4 - 17 \pmod{n},$$

ami azt jelenti, hogy $7 - (-13) = 20$ osztható n-nel. Van 17-es szelet, tehát $n \geq 17$, amiből következik, hogy az egyetlen lehetséges megoldás $n = 20$.

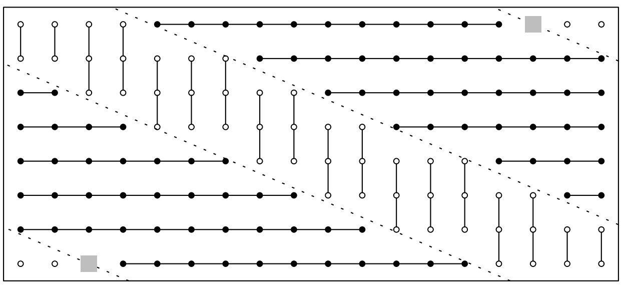
44. feladat. Az ELTE egyik előadótermében a székek úgy vannak elhelyezve, hogy egy téglalap alakú rácsot alkotnak. Az egyik előadás alatt pontosan 11 fiú ült mindegyik sorban, és pontosan 3 lány mindegyik oszlopban, emellett 2 szék üres volt. Legalább hány szék van az előadóban?

Eredmény: 144

Megoldás: Az előadóban a sorok és oszlopok számát jelöljük r-rel és s-sel. A feladat szövegéből tudjuk, hogy $rs = 11r + 3s + 2$, ami átrendezhető úgy, mint

$$(r-3)(s-11) = 35.$$

A zárójelekben lévő számok vagy az 5 és a 7, vagy az 1 és a 35 valamilyen sorrendben. Ha felírjuk mind a négy lehetőséget, látható, hogy rs akkor lesz a legkisebb, ha $r - 3 = 5$ és $s - 11 = 7$, ekkor $rs = 8 \cdot 18 = 144$. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy a diákok tényleg leülhetnek az előadóban a feltételeknek megfelelően.



45. feladat. A 3 egység sugarú k kör belülről érinti a 4 egység sugarú l kört a T pontban. Legfeljebb mekkora lehet a TKL háromszög területe, ha $K \in k$ és $L \in l$.

Eredmény: $9\sqrt{3} = \frac{27}{\sqrt{3}}$

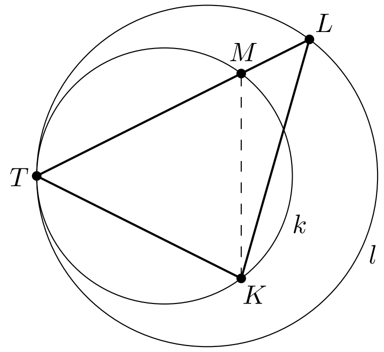
Megoldás: Jelöljük $[XYZ]$-vel az XYZ háromszög területét.

Jelöljük M-mel a TL szakasz és k metszéspontját ($M \neq T$). Mivel T középpontra $\frac{4}{3}$-szorosra nagyítva a k-t az l kört kapjuk, és ez a transzformáció M-et L-be viszi, így $TL = \frac{4}{3}TM$ és $[TKL] = \frac{4}{3}[TKM]$ (a két háromszögnek megegyezik a K-hoz tartozó magassága). Így elegendő a k körbe írt TKM háromszög területét maximalizálni. A terület akkor lesz a legnagyobb, ha TKM szabályos, ekkor a terület

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120°\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Tehát a megfelelő TKL területe

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$



46. feladat. Eszti és Feri a következő játékot játssza: A kezdésnél vesznek egy számhalmazt:

$$\{0, 1, \ldots, 1024\}.$$

Ebből először Eszti elhagy 2^9 elemet, majd Feri 2^8 elemet, majd Eszti 2^7 elemet, és így tovább, végül Feri elhagy egy elemet, így pontosan két szám marad. A játék ekkor véget ér, és Eszti kifizeti Ferinek forintban a két megmaradó szám különbségének az abszolútértékét. Hány forintot kap Feri, ha a lehető legjobban játszanak mindketten?

Eredmény: 32

Megoldás: Feri minden lépéseében meg tudja duplázni a legkisebb különbséget úgy, hogy minden második számot elhagyja, így legalább $2^5 = 32$ forintot nyer. Eszti minden lépésével meg tudja felezni a legnagyobb és a legkisebb szám közti különbséget úgy, hogy elhagyja a nagyobbik vagy a kisebbik felét a megmaradó számoknak, így legfeljebb $1024/2^5 = 32$ forintot fizet. Tehát ha mindketten a lehető legjobban játszanak, akkor Feri 32 koronát nyer.

47. feladat. Néhány ELTE-s diák megbukott a vizsgákon, és kirúgták őket, ezért elmentek tanulni a Másik Egyetemre. Ez a következő következményekkel járt:

1. Az ELTE-s diákok száma egyhatoddal csökkent.
2. A Másik Egyetem diákjainak száma egyharmaddal nőtt.
3. Az átlag IQ mindkét egyetemen 2%-kal emelkedett.

Hányszorosa az ELTE-sek átlag IQ-ja a Másik Egyetemen tanuló diákok átlag IQ-jának?

Eredmény: $\frac{6}{5} = 1.2$-times

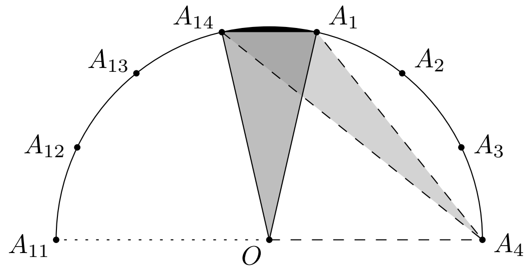
Megoldás: Jelöljük $100e$-vel az ELTE-s diákok eredeti átlag IQ-ját, és $100m$-mel a Másik Egyetemen tanulók eredeti átlag IQ-ját. Továbbá, jelöljük p-vel az egyetemet váltó diákok átlag IQ-ját. Az ELTE-n 2%-kal emelkedett az átlag, tehát most $102e$ ez az érték. Mivel az ELTE-n maradók és a kirúgottak aránya $5 : 1$, és $100e$ volt az eredeti átlag, így adódik a következő egyenlet: $100e = \frac{5}{6} \cdot 102e + \frac{1}{6}p$, amiből azt kapjuk, hogy $p = 90e$. Hasonlóan a Másik Egyetemre eredeti $100m$-es átlagból, az új átlag $102m$ lesz. Az régi tanulók és az egyetemet váltók aránya $3 : 1$, így kapjuk ezt az egyenletet: $102m = \frac{3}{4} \cdot 100m + \frac{1}{4}p$, amiből $p = 108m$. Összevetve a p-re kapott egyenleteket, megkapjuk a megoldást:

$$90e = 108m, \quad \text{and hence} \quad \frac{e}{m} = \frac{108}{90} = \frac{6}{5}.$$

48. feladat. Egy $A_1A_2 \dots A_{14}$ szabályos 14-szöget beírunk egy egységsugarú k körbe. A k által határolt körlapból mekkora területet fog közre a $\angle A_1A_4A_{14}$ szög?

Eredmény: $\frac{\pi}{14}$

Megoldás: Koncentráljunk az A_1, A_4, A_{14}, A_{11} pontokra.



Mivel $11 = 4 + 7$, az A_4A_{11} szakasz a k kör átmérője. Másrészt $4 - 1 = 3 = 14 - 11$, így az $A_1A_4A_{11}A_{14}$ négyszög egy húrtrapéz, mivel A_4A_{11} és A_1A_{14} szakaszok párhuzamosak. Az $A_1A_4A_{14}$ háromszög területe tehát megegyezik az A_1OA_{14} háromszög területével, ahol O a k középpontja. A keresett terület így egyenlő az A_1OA_{14} körcikk területével, ami egytizennegyede a körlap területének.

49. feladat. Jancsi és Juliska vették a következő 24 elemű halmazt: $\{1, 2, \dots, 24\}$. Jancsi felírta azokat a 12 elemű részhalmazokat, amelyekben páros az elemek összege, míg Juliska azokat a 12 elemű részhalmazokat írta fel, amelyekben páratlan az elemek összege. Ki írt fel több részhalmazt,és mennyivel?

Eredmény: Jancsi, $\binom{12}{6} = 924$-gyel többet

Megoldás: Tekintsünk egy adott 12 elemű B részhalmazt, és tegyük fel, hogy van olyan i egész, hogy B tartalmazza a $2i-1$ és $2i$ számok közül pontosan az egyiket. Vegyük a legkisebb ilyen i-t, és konstruáljunk egy 12 elemű $f(B)$ halmazt, ami ugyanazokat az elemeket tartalmazza, mint B egyetlen kivétellel: a $2i - 1$, $2i$ számpárból a másikat tartalmazza.

Könnyen belátható, hogy $f(f(B)) = B$, és így f-et alkalmazva Jancsi egy részhalmazára Juliska egy részhalmazát kapjuk, és fordítva ugyanígy. Tehát f egy bijekció Jancsi és Juliska részhalmazai között, ha csak azokat a részhalmazokat tekintjük, amelyekhez létezik megfelelő i szám. Már csak azokat a részhalmazokat kell vizsgálni, amelyekhez nincs ilyen i.

Minden ilyen részhalmazban pontosan 6 páratlan és 6 páros szám van, és a párosok a páratlanok eggyel nagyobb szomszédjai. Az ilyen részhalmazokban az elemek összege mindig páros, ezért ezek Jancsihoz tartoznak, és mivel a kiválasztott 6 páratlan szám egyértelműen meghatározza a halamz elemeit, így összesen $\binom{12}{6}$ ilyen részhalmaz van.

50. feladat. Géza három különböző a, b, c pozitív egészre gondolt, amelyek közül valamely kettőnek az összege 800. Ezután leírta az a, b, c, $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$ és $a + b + c$ kifejezéseket egy papírra, és azt vette észre, hogy mind prímek. Határozzuk meg a papírra leírt legnagyobb és legkisebb szám különbségét.

Eredmény: 1594

Megoldás: Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $b + c = 800$. Az a, $b + c - a = 800 - a$, $a + b + c = 800 + a$ számok közül legalább az egyik osztható 3-mal, és az csak akkor lehet prímszám, ha egyenlő 3-mal. Mivel $800 + a > 800$ csak két lehetőségünk van, $a = 3$ vagy $800 - a = 3$.

Ha $a = 3$, akkor $3 + (b - c) \geq 2$ és egyidejűleg $3 - (b - c) \geq 2$ is teljesül, így $|b - c| \leq 1$. Azonban ez lehetetlen, mert $b + c = 800$.

Így tudjuk, hogy $800 - a = 3$, ezért $a = 797$. A legnagyobb Géza prímszámai közül az $a + b + c = 797 + 800 = 1597$. Mivel $b + c = 800$, Géza prímjei közül egyik sem lehet páros, ennélfogva a legkisebb szám a lapon a $800 - a = 3$. A különbség ekkor $1597 - 3 = 1594$.

Találhatunk olyan prímeket, amelyekre teljesülnek a feltételek: $a = 797$, $b = 223$, $c = 577$.

51. feladat. Ági megjelölt egy-egy folttal két véletlenszerűen kiválasztott helyet egy méterrúdon, Ezután jött Balázs, és széttörte a méterrudat véletlenszerűen 2013 darabra. Mennyi a valószínűsége, hogy a két kijelölt hely ugyanazon a darabon van?

Eredmény: $\frac{1}{1007}$

Megoldás: Képzeljük el, hogy a rúd egy darabban van. Ági megjelölte a rudat két helyen a foltokkal véletlenszerűen, ezután Balázs véletlenszerűen kijelölt a rúdon 2012 töréspontot. Tehát a rúd összesen 2014 helyen lett megjelölve, ezekből kettő folt. A 2014 jelölésből bármely kettő lehet folt, így a foltokra az összes lehetőség $\binom{2014}{2} = 1007 \cdot 2013$. A foltok akkor vannak egy darabon, ha egymás melletti jelölések, ami 2013 esetben fordulhat elő, így a keresett valószínűség

$$\frac{2013}{1007 \cdot 2013} = \frac{1}{1007}.$$

52. feladat. Hány olyan tízjegyű pozitív egész szám van, amiben a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel, és 11111-nek többszöröse?

Megjegyzés: Egy pozitív egész szám első számjegye nem lehet 0.

Eredmény: $3456 = 2^5 \cdot 5! - 2^4 \cdot 4!$

Megoldás: Mivel $0+1+\cdots+9 = 9 \cdot 5$, ezért a vizsgált számok oszthatók kell legyenek 9-cel, tehát a nekünk kellő számok 99999-cel is oszthatók kell legyenek. Jelöljük A-val a tízjegyű szám első öt számjegyéből álló számot és B-vel az utolsó öt számjegyből álló számot. Ezekre igaz lesz, hogy

$$99999 \mid 100000A + B, \text{ iff } 99999 \mid A + B.$$

Tudjuk, hogy A és B 99999-nél kisebb pozitív egészek, ezért

$$0 < A + B < 2 \cdot 99999, \text{ hence } A + B = 99999, \text{ or equally } B = 99999 - A.$$

Ebből megkapjuk az A, B számok segítségével a keresett tízjegyű számok 99999-cel való oszthatóságának szükséges és elégséges feltételét: $i = 1, \ldots, 5$-re, B i-edik jegyének és A i-edik jegyének az összege 9. A számjegyeket ez alapján 5 párba oszthatjuk:

$$(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).$$

Tudjuk, hogy ezeket a párokat valamilyen sorrendben kell felhasználnunk (5! lehetőség) és egyidejűleg ki kell választanunk, hogy a számjegyek közül melyik kerül A-ba és melyik B-be (2^5 lehetőség). Azonban ki kell zárnunk azokat a lehetőségeket, amelyekben 0 az A első számjegye – ez 4! lehetőséget jelent a párok sorba rendezésénél, és 2^4 lehetőséget a számjegyek elosztásánál A és B között. Tehát a keresett számok összessége $5! \cdot 2^5 - 4! \cdot 2^4$.

53. feladat. Egy 2013-adfokú valós együtthatós $P(x)$ polinom $n = 0, 1, \ldots, 2013$-ra kielégíti a $P(n) = 3^n$ egyenletet. Mennyi $P(2014)$ értéke?

Eredmény: $3^{2014} - 2^{2014}$

Megoldás: Definiáljuk a $Q(x)$ polinomot úgy, mint $Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k$. Ennek a foka 2013, és ezenfelül minden $x \in \{0, \dots, 2013\}$ számra a binomiális tétel alapján

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} 2^k = (1+2)^x = P(x).$$

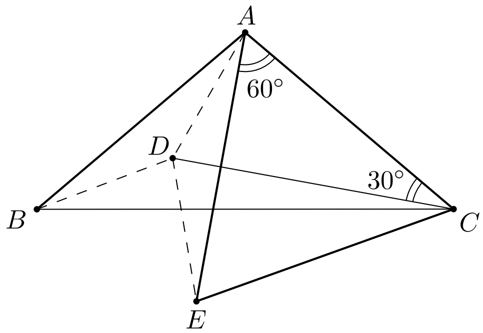
A $P(x) - Q(x)$ polinom legfeljebb 2013-adfokú, és 2014 gyöke van, tehát egyenlő a nullpolinommal. Így $P(x) = Q(x)$, és már csak a $Q(2014)$ értéket kell kiszámítanunk:

$$Q(2014) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{2014}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{2014} \binom{2014}{k} 2^k - \binom{2014}{2014} 2^{2014} = (1+2)^{2014} - 2^{2014} = 3^{2014} - 2^{2014}.$$

54. feladat. Egy egyenlő szárú ABC háromszögben $AB = AC$ és $\angle BAC = 99.4°$, és adott a D pont, amelyre $AD = DB$ és $\angle BAD = 19.7°$. Számítsd ki, mekkora $\angle BDC$.

Eredmény: 149.1°

Megoldás: Jelöljük E-vel a B pont AD-re vonatkozó tükörképét.



Így $AE = AB = AC$ és $\angle EAC = \angle BAC - 2 \cdot \angle BAD = 60°$, ami azt jelenti, hogy az AEC háromszög szabályos, és $CE = CA$. Ráadásul, $DE = DB = DA$ a szimmetria miatt, és ennélfogva CD az AE felezőmerőlegese, ezért $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACE = 30°$. Így már könnyen felhasználhatjuk az $ABDC$ négyszöget, hogy kiszámoljuk a megfelelő szög nagyságát

$$\angle BDC = \angle DBA + \angle BAC + \angle ACD = 19.7° + 99.4° + 30° = 149.1°.$$

55. feladat. Melyik a legnagyobb nem nullára végződő pozitív egész, amelynek valamely „belső” számjegyét elhagyva a szám egy osztóját kapjuk?

Megjegyzés: A „belső” számjegy olyan számjegy a számban, ami nem az első vagy az utolsó számjegy.

Eredmény: 180625

Megoldás: Legyen X a keresett szám. Először vezessük le azt, hogy a második számjegyet kell elhagynunk.

Indirekt módon tegyük fel, hogy nem az első két számjegy valamelyikét hagyjuk el. Az n jegyű X számból a számjegy elhagyásával az $(n-1)$ jegyű X' számot kapjuk. A $10 \cdot X'$ számnak megint n számjegye van, az első két számjegyéről tudjuk, hogy ugyanaz, mint X-ben az első két jegy, de $X \neq X'$ mert az előbbi nem nullára végződik. Ez azonban ellentmondás, hiszen egy $(n-1)$ jegyű szám két különböző többszörösének a különbsége nem lehet $(n-2)$ vagy kevesebb jegyű.

Írjuk fel X-et $X = a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c$ alakban, ahol a és b az X számjegyei $(a \neq 0)$ és $c < 10^n$ egy nem nullára végződő egész. A második számjegy elhagyásával kapjuk az $X' = a \cdot 10^n + c$ számot. Így megfelelő $k \in \mathbb{N}$ egészre azt kapjuk, hogy

$$a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c = k \cdot (a \cdot 10^n + c).$$

Belátható, hogy $k < 20$, mivel ha feltesszük, hogy $k \geq 20$, akkor X első számjegye nagyobb lenne, mint X' első jegye, ami nem lehetséges. Rendezzük át az egyenletet:

$$10^n(10a + b - k \cdot a) = (k-1)c.$$

Tudjuk, hogy a bal oldal osztható 2^n-nel és 5^n-nel is, tehát ennek a jobb oldalra is teljesülnie kell. A c nem nullára végződik, ezért $k-1$ osztható kell legyen 2 vagy 5 n-edik hatványával. Másrészről $k<20$, ezért $n \le 4$ (mivel $2^5 > 20$ és $5^2 > 20$), amiből következik, hogy X-nek legfeljebb 6 számjegye van. Ha $n=4$, akkor $k-1=16$ az egyetlen lehetőségünk, amire

$$5^4(b-7a)=c.$$

Ahhoz, hogy a jobb oldal ne legyen negatív, kell, hogy $a=1$ legyen (a és b számjegyek). Így két opciónk van b-re, $b=8$ és $b=9$, azonban az utóbbi esetén c nullára végződne, így $b=8$, c-re pedig azt kapjuk, hogy $c=5^4=625$ és ebből már beláthatjuk, hogy $X = 1\cdot 10^5 + 8\cdot 10^4 + 625 = 180625$ tényleg jó megoldása a feladatnak.

56. feladat. Adottak a, b, c páronként különböző valós számok, melyekre

$$a=(b-2)c, \quad b=(c-2)a, \quad c=(a-2)b.$$

Mennyi az abc szorzat értéke?

Eredmény: 3

Megoldás: Ha a, b, c közül bármelyik 0 lenne, akkor mindhárom 0 lenne, ami viszont ellentmondana annak a feltételnek, hogy a számok páronként különbözők. Ugyanezért a, b, c 3 sem lehet.

Használjuk fel a harmadik egyenlőséget, hogy kifejezzük c-t az első két egyenletben, és ezután rendezzük át a második kifejezést: $b=(ab-2b-2)a$-ból kapjuk, hogy $b(a^2-2a-1)=2a$. Mivel a jobb oldal nem nulla, ugyanez a bal oldalra is teljesülni fog, ezért leoszthatunk a^2-2a-1-gyel, és így kifejezhetjük b-t az a segítségével. Az eredményt helyettesítsük be az első egyenletbe. Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$a(a-3)(a^3+3a^2-9a-3)=0,$$

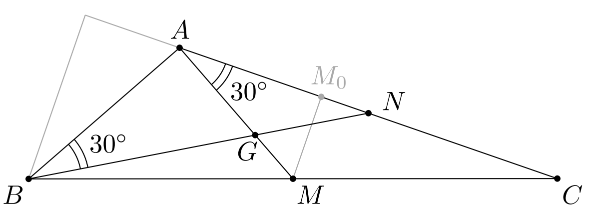
tehát a a $P(x)=x^3+3x^2-9x-3$ polinom gyöke. Analóg módon megkaphatjuk, hogy b és c is gyökei ugyanennek a polinomnak. Mivel a, b, c páronként különbözők, ezért a $P(x)$ polinomunk átírható $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ alakba. Ha vizsgáljuk a $P(x)$ együtthatóit, látható, hogy $abc=3$.

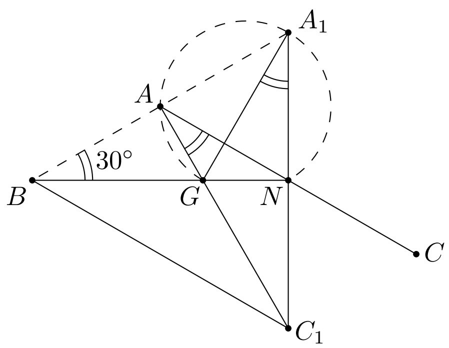
57. feladat. Egy általános ABC háromszögben az egyik magasság hossza megegyezik az egyik súlyvonal hosszával, illetve egy másik magasság hossza is megegyezik egy másik súlyvonal hosszával. Mekkora a harmadik magasság, és a harmadik súlyvonal hosszának aránya?

Eredmény: $\frac{2}{7}$

Megoldás: Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $a>b>c$. A megfelelő magasságokra és súlyvonalakra rendre igaz lesz, hogy $v_a<v_b<v_c$ és $t_a<t_b<t_c$. Ugyanakkor $v_a<t_a$, $v_b<t_b$ és $v_c<t_c$, amiből következik, hogy $v_b=t_a$ és $v_c=t_b$.

Jelöljük M-mel a BC oldal felezőpontját, és M_0-lal M merőleges vetületét az AC oldalra. Az AMM_0 derékszögű háromszögben $MM_0=\frac{1}{2}v_b=\frac{1}{2}t_a=\frac{1}{2}AM$, így $\angle MAC=30°$. Jelöljük N-nel az AC oldal felezőpontját, erre hasonló módon belátható, hogy $\angle NBA=30°$.





Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Tekintsük az A_1BC_1 szabáylos háromszöget, amelyben BN az egyik súlyvonal. Az A_1 pontra teljesül, hogy $\angle NBA_1=30°$ és $\angle GA_1N=30°$, illetve hogy különbözik az A ponttól (az ABC háromszög általános). Az A pont ennélfogva a BA_1 szakasz és a GA_1N körív másik metszéspontjában kell legyen, ami a BA_1 szakasz felezőpontja. Ebből $\angle BAC = 120°$ és $AC : AB = 2$.

A háromszögben tehát $\alpha = 120°$, $AB = 1$ és $AC = 2$, így alkalmazva a koszinusztételt azt kapjuk, hogy $a = \sqrt{1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2} = \sqrt{7}$ és $t_c = \sqrt{1/4 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$, ekkor a háromszög területe $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ és ebből $v_a = 2S/a = 3/\sqrt{21}$. Felhasználva a megfelelő szakaszok hosszára vonatkozó adatokat:

$$\frac{v_a}{t_c} = \frac{\frac{3}{\sqrt{21}}}{\frac{1}{2}\sqrt{21}} = \frac{2}{7}.$$