Aufgabe 1J. Peter ist gelernter Goldschmied. Seinen Goldbarren der Größe $2 \times 3 \times 4$ hat er eingeschmolzen und aus dem entstandenen flüssigen Gold drei gleich große Würfel gegossen.

Wie lang sind die Kanten dieser Würfel?

Antwort. 2

Lösung. Der Goldbarren hatte das Volumen $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Weil alle drei Würfel das gleiche Volumen besitzen und sie zusammen das Volumen des Goldbarrens ergeben müssen, hat ein Würfel das Volumen $24 : 3 = 8$. Da ein Würfel mit der Kantenlänge k das Volumen k^3 besitzt und $8 = 2^3$ ist, ergibt sich für die gesuchte Kantenlänge der Würfel 2.

Aufgabe 2J. Auf einer Silvesterparty trafen sich 43 Personen. An der Bar wurden Saft, Bier und Champagner ausgeschenkt. Während der Feier konsumierten 25 Personen Bier, 19 Personen tranken Champagner und 12 Personen kauften sich sowohl Bier als auch Champagner. Die übrigen Personen waren als Fahrer eingeteilt, weshalb sie nur Saft tranken.

Wie viele Personen tranken nur Saft?

Antwort. 11

Lösung. Die Gesamtzahl der Leute, die Alkohol getrunken haben, ist $25 + 19 - 12 = 32$, da diejenigen, die sowohl Bier als auch Champagner konsumierten, doppelt gezählt wurden und somit einmal abgezogen werden müssen. Alle anderen haben nur Saft getrunken, das sind $43 - 32 = 11$ Personen.

Aufgabe 3J. Wenn man eine Tasse Kaffee trinkt, nimmt man Koffein für 1 Stunde auf. Wenn man eine genauso große Tasse Espresso trinkt, führt man seinem Körper Koffein für 4 Stunden zu.

In welchem Verhältnis muss man Kaffee mit Espresso mischen, um in einer Tasse das Koffein für genau 2 Stunden zu haben?

Antwort. $2 : 1$

Lösung. Bezeichnet man mit k die Menge an Koffein, deren Wirkung 1 Stunde anhält, so enthält eine Tasse Kaffee die Menge k und eine Tasse Espresso die Menge $4k$ an Koffein. Es sollen nun $2k$ in eine Tasse gemischt werden. Man kann das so betrachten, dass in die Tasse eine Menge x an Kaffee eingegossen wird und anschließend eine Menge $1 - x$ an Espresso dazukommt. Es muss dann die Gleichung

$$x \cdot k + (1 - x) \cdot 4k = 2k$$

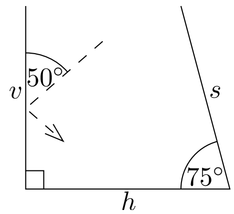
gelten, also $4k - x \cdot 3k = 2k$ bzw. $2k = x \cdot 3k$. Folglich muss $x = \frac{2}{3}$ sein.
Um die Wirkung von genau 2 Stunden Koffein mit einer Tasse Gemisch aus Kaffee und Espresso zu erhalten, müssen Kaffee und Espresso im Verhältnis

$$x : (1 - x) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$$

gemischt werden.

Aufgabe 4J. Drei Spiegel v, h und s sind wie in nachfolgender Skizze angeordnet, wobei die Spiegel v und h senkrecht aufeinander stehen. Der Winkel zwischen den Spiegeln s und h beträgt $75°$.
Ein Lichtstrahl fällt unter dem Winkel $50°$ auf den Spiegel v, wird reflektiert, trifft dann auf den Spiegel h und wird dort reflektiert, trifft auf den Spiegel s, wird reflektiert und trifft schließlich wieder auf den Spiegel v.

Unter welchem Einfallswinkel trifft der Lichtstrahl das letzte Mal auf den Spiegel v?
Hinweis: Bei der Reflexion eines Lichtstrahls an einem Spiegel ist der Einfallswinkel des Strahls genau so groß wie der Ausfallswinkel des Strahls.

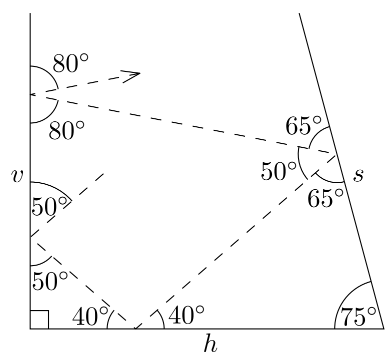


Antwort. 80°

Lösung. Man zeichnet den Verlauf des Lichtstrahls in die Skizze ein und bestimmt nach und nach die Winkel. Der erste Einfallswinkel ist 50°. Da der Einfallswinkel genau so groß ist wie der Ausfallswinkel, ist dieser auch 50°. Wenn man den Einfallswinkel α auf den Spiegel h bestimmen möchte, so betrachtet man das Dreieck mit den Winkeln α, 50° und 90°. Aufgrund der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck gilt nun $\alpha + 50° + 90° = 180°$, woraus $\alpha = 40°$ folgt. Der Ausfallswinkel des Strahls bei der Reflexion am Spiegel h ist dann auch 40°.
Nun berechnet man den Einfallswinkel β am Spiegel s analog über die Innenwinkelsumme im Dreieck mit den Winkeln β, 40° und 75°. Aus $\beta + 40° + 75° = 180°$ ergibt sich $\beta = 65°$. Der Ausfallswinkel ist dann auch 65°.
Schließlich betrachtet man das Viereck, das von Teilen der drei Spiegel gebildet wird und dem Strahl, der zuletzt vom Spiegel s reflektiert wird und unter dem Winkel γ wieder auf den Spiegel v auftrifft. Die Innenwinkelsumme in einem Viereck ist 360°. Dies führt zur Gleichung

$$\gamma + 90° + 75° + (180° - 65°) = 360°$$

und somit zu $\gamma = 80°$.



Aufgabe 5J. Im Jahr 2013 verkaufte ein Spielwarengeschäft insgesamt 235 Lokomotiven für Modelleisenbahnen. In jedem Monat gingen entweder 20, 16 oder 25 Stück über den Ladentisch.

Finde heraus, in wie vielen Monaten genau 20, in wie vielen Monaten genau 16 und in wie vielen genau 25 Lokomotiven verkauft wurden.

Antwort. 4, 5, 3

Lösung. Die Anzahl der Monate, in denen genau 20, 16 bzw. 25 Lokomotiven verkauft wurden, seien mit a, b bzw. c bezeichnet. Laut Aufgabenstellung gilt dann $a + b + c = 12$ mit $0 \leq a, b, c \leq 12$ sowie

$$20 \cdot a + 16 \cdot b + 25 \cdot c = 235.$$

Weil in dieser Gleichung die Zahlen 20, 25 und 235 alle durch 5 teilbar sind, nicht aber die Zahl 16, muss auch b durch 5 teilbar sein. Dabei gibt es für b nur die drei möglichen Werte 0, 5 oder 10.
Im Fall $b = 0$ ist $c = 12 - a$ und es gilt $20a + 25(12 - a) = 235$, was gleichbedeutend ist mit $4a + 60 - 5a = 47$, also mit $a = 13$. Dies ist aber nicht möglich, weil ein Jahr nur 12 Monate hat.
Im Fall $b = 10$ ist $c = 2 - a$. Dann muss gelten $20a + 160 + 25(2 - a) = 235$, also $-5a = 25$. Letztere Gleichung ist aber nur für $a = -5$ erfüllt, was für a kein gültiger Wert ist.
Im Fall $b = 5$ ist $c = 7 - a$. Somit ergibt sich die Gleichung $20a + 80 + 25(7 - a) = 235$, also $4a + 35 - 5a = 31$, woraus man $c = 3$ und $a = 4$ als Lösung erhält.

Aufgabe 6J. Gegeben seien zwei Kreise mit den Radien 5 bzw. 26, wobei der Mittelpunkt des größeren Kreises auf der Kreislinie des kleineren Kreises liegen soll. Man betrachtet nun alle Sehnen im großen Kreis, welche den kleinen Kreis berühren. Von diesen gibt es eine längste und eine kürzeste Sehne.

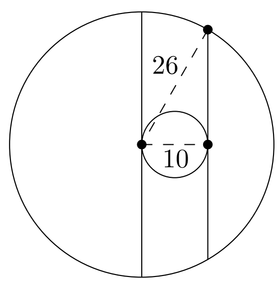
Was ist die Differenz der Längen dieser beiden extremalen Sehnen?

Antwort. 4

Lösung. Die längste solche Sehne ist offensichtlich der Durchmesser des großen Kreises, weshalb ihre Länge $l = 2 \cdot 26 = 52$ ist.
Welche der betrachteten Sehnen ist nun die kürzeste? Es ist diejenige, die vom Mittelpunkt des großen Kreises am weitesten entfernt ist. Dieser Abstand kann höchstens 10 sein, weil diese Sehne ja den kleinen Kreis noch berühren soll. Der kürzeste Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist die Länge des Lotes vom Punkt zum Lotfußpunkt auf diese Gerade. Also kann man die Länge k der gesuchten kürzesten Sehne mit dem Satz des Pythagoras wie folgt berechnen:

$$k = 2 \cdot \sqrt{R^2 - (2r)^2},$$

wobei $R = 26$ der Radius des großen Kreises und $r = 5$ der Radius des kleinen Kreises ist. Somit ergibt sich $k = 2 \cdot \sqrt{576} = 2 \cdot 24 = 48$.
Die gesuchte Differenz ist $l - k = 52 - 48 = 4$.



Aufgabe 7J. Meine Cousine Agnes wurde im letzten Jahrhundert in München geboren. Ihr Alter im Jahr 1999 war gleich der Quersumme ihres Geburtsjahres.

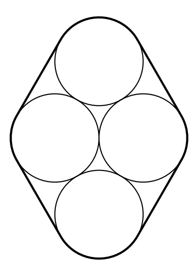
In welchem Jahr wurde Agnes geboren?

Antwort. 1976

Lösung. Sei $10x + y$ mit den Ziffern x und y das Alter von Agnes im Jahr 1999. Weil ihr Geburtsjahr im letzten Jahrhundert liegt, ist die Quersumme ihres Geburtsjahres $1+9+(9-x)+(9-y)$, also gleich $28-x-y$. Somit ergibt sich die Gleichung $28 - x - y = 10x + y$, also $28 = 11x + 2y$. Weil x und y Ziffern sind, hat die letzte Gleichung nur die Lösung $x = 2$ und $y = 3$. Das gesuchte Geburtsjahr ist dann $1999 - 23 = 1976$.

Aufgabe 8J. Vier Keise mit Radius 1 berühren sich gegenseitig wie in der Abbildung dargestellt. Um diese Kreise wird, wie eingezeichnet, ein Gummiband gespannt.

Wie lang ist dieses Band?



Antwort. $8 + 2\pi$

Lösung. Man kann die Berechnung in zwei Teile aufteilen, nämlich in die Berechnung der geraden Stücke und in die Berechnung der Kreisbögen. Das Band verläuft kreisförmig, wenn es einen Kreis berührt. Da es genau einmal außen einen ganzen Umlauf beschreibt, ist die Summe der Kreisbögen genau der Umfang eines vollen Kreises, also 2π.

Betrachtet man einen geraden Abschnitt zwischen zwei sich berührenden Kreisen, so ist dessen Länge genau der Abstand der Berührpunkte einer gemeinsamen Tangente. Da Radien auf Tangenten senkrecht stehen, bilden diese Berührpunkte mit den Mittelpunkten der zugehörigen Kreise ein Rechteck. Da die Radien aller Kreise 1 sind, ist also die Länge eines geraden Stücks des Gummibandes genau 2.

Also ist die Gesamtlänge des Bandes $4 \cdot 2 + 2\pi = 8 + 2\pi$.

Aufgabe 9J. In die Käferschule gehen alle erdenklichen Arten von Käfern mit den unterschiedlichsten Anzahlen an Beinen. Der dortige Sportlehrer ordnet seine Schüler (Käfer) immer in einer Reihe an, beginnend von der kleinsten Beineanzahl hin zur größten.
In der letzten Sportstunde waren nur fünf Schüler anwesend: Käfer Buggy und noch vier weitere Käfer, die $6,\ 3,\ 10$ und 9 Beine hatten. Sie stellten sich in einer Reihe auf, so wie ihr Lehrer das möchte, und bemerkten erstaunt, dass dann der mittlere Käfer genau so viele Beine hatte wie das arithmetische Mittel der Beine aller fünf Käfer!

Bestimme alle möglichen Beineanzahlen für Buggy.

Antwort. $2,\ 7,\ 17$

Lösung. Sei m die Anzahl der Beine des mittleren Käfers und sei x die Beineanzahl von Buggy. Laut Aufgabenstellung gilt dann

$$m = \frac{1}{5} \cdot (6 + 3 + 10 + 9 + x),$$

also $5m = 28 + x$. Weil das arithmetische Mittel in diesem Fall mit einem der Werte $3,\ 6,\ 9,\ 10$ oder x übereinstimmen muss, probiert man alle Möglichkeiten aus. Dabei kann m allerdings keinen der Randwerte 3 oder 10 annehmen.
Falls der Mittelwert x sein soll, dann folgt aus $5x = 28 + x$ sofort $x = 7$.
Im Fall $m = 6$ ergibt sich aus $5 \cdot 6 = 28 + x$, dass $x = 2$ ist.
Schließlich betrachtet man $m = 9$. Hier erhält man aus $5 \cdot 9 = 28 + x$ noch $x = 17$.
Insgesamt gibt es also für die mögliche Beineanzahl von Buggy die drei Werte $2,\ 7$ und 17.

Aufgabe 10J. Die von Null verschiedenen Ziffern A, B und C erfüllen das Kryptogramm

$$AA + BB + CC = ABC.$$

Bestimme die Lösungszahl ABC.

Antwort. 198

Lösung. Für die Einerstelle gilt $A + B + C = C$ oder $A + B + C = C + 10$. Im ersten Fall folgt $A + B = 0$ und damit $A = B = 0$, was aber nicht erlaubt ist. Also tritt der zweite Fall ein und es ist $A + B = 10$.
An der Zehnerstelle hat man $1 + A + B + C = B + 10$, also $1 + C = B$, oder $1 + A + B + C = B + 20$, also $1 + C = B + 10$, wobei die 1 der Übertrag aus der Einerstelle ist. Im letzteren Fall folgt $C = 9$ und insbesondere $B = 0$, was aber nicht erlaubt ist. Somit muss $1 + C = B$ gelten und es gibt einen Übertrag von 1 aus der Zehnerstelle in die Hunderterstelle, was $A = 1$ zur Folge hat. Wegen $A + B = 10$ ergibt sich nun $B = 9$ und aus $1 + C = B$ erhält man schließlich $C = 8$ und somit die Lösungszahl 198.

Aufgabe 11J / 1S. Zaphod, ein berühmter Sammler von Himmelskörpern, musste aufgrund von finanziellen Schwierigkeiten ein Drittel seiner Sammlung verkaufen. Anschließend schenkte er seiner Tochter drei Planeten des Sonnensystems. Später veräußerte er ein Drittel der verbliebenen Himmelskörper seiner Sammlung und vermachte seiner Frau zwei Jupitermonde sowie zwei Monde des Saturn. Als er sich erneut gezwungen sah, weitere Teile seiner Sammlung zu Geld zu machen, verkaufte er abermals ein Drittel seiner Himmelskörper, die er noch besaß, und schenkte seinem Sohn den Mars und dessen zwei Monde. Schließlich waren in seiner Sammlung nur noch neun Planeten aus Alpha Centauri übrig.

Wie viele Himmelskörper besaß Zaphod zu Beginn?

Antwort. 54

Lösung. Sei x die Anzahl an Himmelskörpern, die Zaphod zu Beginn besaß. Indem man die Veränderungen im Bestand seiner Sammlung mit

$$\left(\left(\frac{2}{3}\cdot x-3\right)\cdot\frac{2}{3}-2-2\right)\cdot\frac{2}{3}-3=9$$

in eine Gleichung übersetzt und diese dann nach x auflöst, oder gleich durch Rückwärtsarbeiten gelangt man zur Lösung

$$x=\left(\left((9+3)\cdot\frac{3}{2}+2+2\right)\cdot\frac{3}{2}+3\right)\cdot\frac{3}{2}=18\cdot 3=54.$$

Aufgabe 12J / 2S. Bestimme die kleinste Zahl, die größer als 2014 ist und nicht als Summe zweier Palindrome geschrieben werden kann.
Hinweis: Palindrome sind natürliche Zahlen, deren Darstellung von links sowie von rechts gelesen den gleichen Wert hat. Beispielsweise ist 7447 ein Palindrom.

Antwort. 2019

Lösung. Wenn eine Zahl größer als 2014 als Summe zweier Palindrome geschrieben werden soll, muss eines dieser Palindrome eine vierstellige Zahl sein. In Frage kommen dafür die Zahlen $1001,\ 1111,\ 1221,\ \ldots,\ 1991$ und 2002; alle weiteren Palindrome $2112,\ 2222,\ \ldots$ sind zu groß. Man findet folgende gewünschte Darstellungen für die Zahlen von 2015 bis 2018:

$$\begin{array}{ll} 2015=1551+464 & 2017=1331+686 \\ 2016=1441+575 & 2018=1221+797 \end{array}$$

Soll die Zahl 2019 als Summe zweier Palindrome geschrieben werden, so muss $2019=1AA1+BC8$ mit Ziffern A, B und C gelten. Weil die Zahl $BC8$ auch ein Palindrom sein soll, ergibt sich $B=8$. Aus der Zehnerstelle folgt $A+C=1$ oder $A+C=11$. Im ersten Fall ist $A=0$ und $C=1$ oder umgekehrt, sicherlich jedoch $1AA1+8C8<2000$, was zu keiner Darstellung für 2019 führt. Im Fall $A+C=11$ kommt ein Übertrag in die Hunderterstelle hinein und geht ein Übertrag in die Tausenderstelle hinaus. Es muss also $A+8+1=10$ gelten, was $A=1$ bedeutet. Dann allerdings gibt es für C keine Ziffer mehr, um die Bedingung $A+C=11$ zu erfüllen.
Die gesuchte Zahl ist somit 2019.

Aufgabe 13J / 3S. Florian gab Hannes ein Zahlenrätsel auf. Er teilte ihm eine Ziffer mit und sagte:
„Ich denke mir eine dreistellige Zahl, die durch 11 *teilbar ist. Die Ziffer an der Hunderterstelle ist meine gewählte Ziffer* X *und die Ziffer an der Zehnerstelle ist eine* 3*. Finde nun die Ziffer an der Einerstelle.“*
Hannes erkannte schnell, dass er verschaukelt wurde, da es gar keine solche Ziffer für die Einerstelle geben kann!

Welche Ziffer X hatte Florian seinem Freund Hannes mitgeteilt?

Antwort. 4

Lösung. Sei Y die Einerziffer. Die Zahl $X3Y$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme ihrer Ziffern durch 11 teilbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $X-3+Y$ durch 11 teilbar ist, also wenn $X+Y-3=0$ oder $X+Y-3=11$ ist. Wegen $0\le Y\le 9$ hat man $X-3\le X-3+Y\le X+6$. Um zu vermeiden, dass $X-3+Y$ durch 11 teilbar ist, muss $0<X-3$ und $X+6<11$ gelten, was zu $3<X<5$ führt. Folglich ist $X=4$.

Aufgabe 14J / 4S. Die vier rationalen Zahlen $a < b < c < d$ können auf sechs Arten zu Paaren zusammengefasst werden.

Bestimme alle möglichen Werte für d im Fall, dass die sechs Paare unterschiedliche Summen haben und die vier kleinsten Summen $1,\ 2,\ 3$ und 4 sind.

Antwort. $3.5,\ 4$

Lösung. Wegen der Anordnung der Zahlen sind die beiden kleinsten Summen $a + b$ und $a + c$, genauer gilt $a + b = 1$ und $a + c = 2$, und die beiden größten Summen $c + d$ und $b + d$. Für die beiden mittleren Summen gibt es nun zwei Möglichkeiten:
Im Fall $a + d = 3$ und $b + c = 4$ hat man $2b = (a + b) - (a + c) + (b + c) = 1 - 2 + 4 = 3$, woraus $b = 1.5$, $a = -0.5$ und $d = 3.5$ folgt.
Im Fall $b + c = 3$ und $a + d = 4$ hat man $2b = (a + b) - (a + c) + (b + c) = 1 - 2 + 3 = 2$, woraus $b = 1$, $a = 0$ und $d = 4$ folgt.
Die möglichen Werte für d sind also 2.5 und 4.

Aufgabe 15J / 5S. Sebastian ist zweimal so alt wie Tobias war, als Sebastian so alt war wie Tobias jetzt ist. Wenn Tobias so alt sein wird wie Sebastian jetzt ist, dann werden beide zusammen 90 Jahre alt sein.

Wie alt ist Sebastian?

Antwort. 40

Lösung. Sebastians Alter sei mit s bezeichnet und das Alter von Tobias mit t. Da Sebastian auf jeden Fall älter ist als Tobias, gilt $s > t$. Die erste Aussage übersetzt sich zu

$$s = 2 \cdot (t - (s - t)),$$

was gleichbedeutend ist mit $3s = 4t$. Die zweite Aussage liefert

$$(t + (s - t)) + (s + (s - t)) = 90,$$

was zu $3s - t = 90$ führt. Durch Zusammenfügen der Teilergebnisse erhält man $4t - t = 90$, also $3t = 90$. Deshalb ergibt sich $t = 30$ und schließlich $s = 40$.
Sebastian ist also 40 Jahre alt.

Aufgabe 16J / 6S. Gegeben sei eine arithmetische Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiver ganzer Zahlen mit dem Anfangswert $a_1 = 10$ und dem weiteren Wert $a_{a_2} = 100$.

Berechne das Folgenglied $a_{a_{a_3}}$.

Antwort. 820

Lösung. Es ist bekannt, dass das k-te Folgenglied a_k einer arithmetischen Folge berechnet werden kann als $a_k = a_1 + (k - 1)d$, wobei a_1 das erste Folgenglied und d die Differenz zweier aufeinander folgender Werte ist. Hier ist also $a_k = 10+(k-1)d$, insbesondere $a_2 = 10+d$ und deshalb $a_{a_2} = a_{10+d} = 10+(9+d)d = 10+9d+d^2$. Weil $a_{a_2} = 100$ vorausgesetzt ist, erhält man die quadratische Gleichung $10+9d+d^2 = 100$ bzw. $d^2+9d-90 = 0$, deren einzige positive Lösung $d = 6$ ist. Allgemein hat man also nun $a_k = 10 + (k - 1) \cdot 6 = 4 + 6k$. Damit kann man die Werte $a_3 = 4 + 18 = 22$, $a_{a_3} = a_{22} = 4 + 132 = 136$ und schließlich $a_{a_{a_3}} = a_{136} = 4 + 816 = 820$ berechnen.

Aufgabe 17J / 7S. Julias Lieblingszahl besitzt jede der folgenden Eigenschaften:

- Sie besteht aus acht verschiedenen Ziffern.
- Die Ziffern sind fallend geordnet, wenn man sie von links nach rechts liest.
- Sie ist durch 180 teilbar.

Wie heißt die Lieblingszahl von Julia?

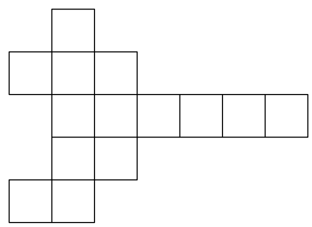
Antwort. 97654320

Lösung. Weil die gesuchte Zahl durch 180 teilbar ist, ist sie auch durch 20 teilbar, was bedeutet, dass die Einerziffer eine 0 und die Zehnerziffer eine gerade Ziffer sein muss. Allerdings kommen die Ziffern 4, 6 und 8 nicht in Frage, da wegen der von rechts gelesenen aufsteigenden Anordnung keine 8-stellige Zahl mit verschiedenen Ziffern mehr zustande kommen kann. Folglich muss die Zehnerziffer die 2 sein. Von den restlichen sieben Ziffern 3, 4, …, 9 werden nur noch sechs benötigt. Welche davon ausgelassen wird, bestimmt die Teilbarkeit der Zahl durch 9. Da man $0+2+3+4+\cdots+9 = 44$ hat und die Quersumme der resultierenden Zahl durch 9 teilbar sein muss, muss die Ziffer 8 weggelassen werden.
Julias Lieblingszahl ist folglich die Zahl 97 654 320.

Aufgabe 18J / 8S. Katharina bastelt gerne aus kariertem Papier Modelle von 3-dimensionalen Objekten. Das letzte Mal hat sie sich eine Form ausgeschnitten, wie sie in der unten stehenden Figur zu sehen ist. Sie hat das 2-dimensionale Netz an bestimmten Kanten gefaltet und diese so zusammengeklebt, dass sich keine zwei Quadrate überlappen und dass ein geschlossenes 3-dimensionales Objekt entsteht.

Wie viele Ecken hatte das gebastelte Objekt?

Hinweis: Gesucht sind die Ecken des 3-dimensionalen hergestellten Objekts, nicht die Ecken in der 2-dimensionalen Figur, die ausgeschnitten wird.

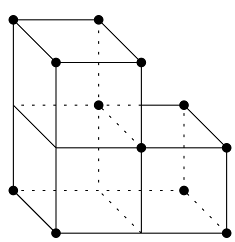


Antwort. 12

Lösung. Um zu einer Lösung zu gelangen, kann man die 2-dimensionale Form ausschneiden und ausprobieren, welches 3-dimensionale Objekt man daraus basteln kann.
Eine andere Möglichkeit ist, die Quadrate des Netzes zu zählen und zu beobachten, dass man bei dem gebastelten Objekt von oben und von unten betrachtet die gleiche Anzahl a an Quadraten sehen muss, ebenso von links und rechts betrachtet die gleiche Anzahl b sowie von vorne und hinten betrachtet die gleiche Anzahl c an Quadraten. Da es insgesamt 14 Quadrate sind, muss $2 \cdot (a+b+c) = 14$ gelten, muss also $a+b+c = 7$ sein. O. B. d. A. kann man $a \leq b \leq c$ annehmen, wobei natürlich $0 < a$ gilt. Für (a, b, c) ergeben sich die vier Möglichkeiten

$$(1,1,5), \quad (1,2,4), \quad (1,3,3) \quad \text{und} \quad (2,2,3),$$

wobei die ersten beiden geometrisch nicht möglich sind. Da aus dem gegebenen Netz kein I-Triomino $(1,3,3)$ hergestellt werden kann, bleibt nur noch das L-Triomino $(2,2,3)$ übrig, das auch tatsächlich aus dem gegebenen Netz gebastelt werden kann. Dieses hat 12 Ecken.



Aufgabe 19J / 9S. Finde alle Paare positiver ganzer Zahlen a und b, für welche die Gleichung

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b) + \mathrm{kgV}(a, b)$$

gilt.

Hinweis: Dabei bezeichnet $\mathrm{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und b sowie $\mathrm{kgV}(a, b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b.

Antwort. (2, 2)

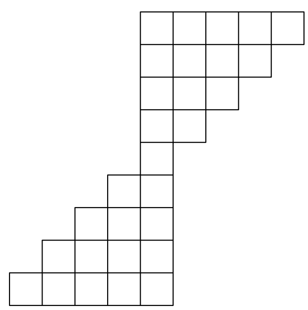
Lösung. Für zwei positive ganze Zahlen a und b gilt stets

$$\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b.$$

Setzt man $d := \mathrm{ggT}(a, b)$, so hat man $\mathrm{kgV}(a, b) = \frac{ab}{d}$. Die geforderte Bedingung lautet dann $ab = d + \frac{ab}{d}$ und ist äquivalent zu $d^2 + ab = d \cdot ab$ bzw. $d^2 = (d-1) \cdot ab$. Weil die aufeinander folgenden Zahlen $d-1$ und d teilerfremd sind, folgt sofort $d - 1 = 1$, also $d = 2$, und schließlich $a = b = 2$.
Das einzige Lösungspaar ist $(a, b) = (2, 2)$.

Aufgabe 20J / 10S. Im unten stehenden Diagramm sind 29 Einheitsquadrate angeordnet. Ein Frosch startet auf irgendeinem der fünf Einheitsquadrate der untersten Reihe und springt jede Sekunde entweder in das Quadrat direkt über seiner momentanen Position oder in das Quadrat diagonal nach rechts oben, vorausgesetzt natürlich, dass er von seinem Standpunkt aus ein solches Feld überhaupt erreichen kann. Das tut er, bis er auf einem Feld in der obersten Reihe angekommen ist.

Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Frosch auf diese Weise von der untersten zur obersten Reihe gelangen?



Antwort. 256

Lösung. Man bestimmt für jedes Quadrat die Anzahl der Möglichkeiten, um zu diesem Quadrat zu gelangen. In der untersten Reihe gibt es für jedes Quadrat nur eine Möglichkeit. Um auf ein Feld der zweiten Reihe zu gelangen, gibt es jeweils zwei Arten, weil der Frosch vom darunter liegenden Feld oder vom diagonal links unten liegenden Feld herkommen kann. Analog ergeben sich in der dritten Reihe für jedes Feld vier Möglichkeiten, in der vierten Reihe acht Möglichkeiten für jedes Quadrat und schließlich 16 Möglichkeiten für das Feld in der mittleren Reihe.
Wegen der Symmetrie des Diagramms existieren genau so viele verschiedene Wege von einem Quadrat der untersten Reihe zum einzelnen Feld der mittleren Reihe wie es verschiedene Wege vom Feld der Mittelreihe zu einem Quadrat in der obersten Reihe gibt. Deshalb ist die Antwort $16 \cdot 16 = 256$.

Aufgabe 21J / 11S. Paul wandert auf den Diagonalen eines regelmäßigen Achtecks. Sein Weg beginnt an einer Ecke des Achtecks und soll über jede Diagonale genau einmal führen.

Wie viele verschiedene Wege kann Paul gehen?

Antwort. 0

Lösung. Von jeder Ecke des Achtecks gehen fünf Diagonalen aus. Wenn Paul an einer Ecke über eine Diagonale, die er vorher noch nicht benutzt hat, ankommt, dann muss er diese Ecke über eine andere Diagonale, die er ebenfalls noch nicht benutzt hat, wieder verlassen. Wenn Paul also eine Ecke besucht, dann benutzt er jedes Mal genau zwei Diagonalen, die von dieser Ecke ausgehen. Nur an der Ecke, an der er startet, und an der Ecke, an der er seinen Weg beendet, kann die Anzahl der besuchten Diagonalen ungerade sein. Da aber acht Ecken mit einer ungeraden Anzahl an Diagonalen vorliegen, kann es keinen solchen Weg geben. Also kann Paul genau 0 solche Wege gehen.

Aufgabe 22J / 12S. Gegeben sei ein Gitter aus Einheitsquadraten und darin ein Quadrat Q mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(2014,0)$, $(2014,2014)$ und $(0,2014)$. Eine Diagonale von Q geht also durch das Innere von 2014 Einheitsquadraten. Die Gerade g gehe durch die Punkte $(0,0)$ und $(2014,2019)$.

Bestimme die Anzahl der Einheitsquadrate von Q, durch deren Inneres die Gerade g geht.

Antwort. 4023

Lösung. Wenn eine Ursprungsgerade durch einen Gitterpunkt (a,b) geht, dann geht sie auch durch den Gitterpunkt (ka,kb) für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ und $2019 = 3 \cdot 673$ sind 2014 und 2019 teilerfremd. Also geht die Gerade g durch keinen Gitterpunkt zwischen $(0,0)$ und $(2014,2019)$.

Dies bedeutet, dass die Gerade g jedes Mal, wenn sie eine Gitterlinie schneidet, durch das Innere eines neuen Einheitsquadrats geht. Also muss man nur noch die Anzahl der Schnittpunkte von g mit den Gitterlinien bestimmen.

Die Gerade g verlässt Q im Punkt $(\frac{2014^2}{2019}, 2014)$. Bis dahin schneidet g genau 2013 horizontale Gitterlinien und $\lfloor \frac{2014^2}{2019} \rfloor = 2009$ vertikale Gitterlinien. Also geht g durch das Innere des Startfelds in der linken unteren Ecke und durch weitere $2013 + 2009$ Einheitsquadrate in Q. Insgesamt sind dies dann $1 + 2009 + 2013 = 4023$ Einheitsquadrate von Q.

Aufgabe 23J / 13S. Ein konvexes n-Eck besitzt $n-1$ Winkel der Größe $150°$ und einen Winkel beliebiger Größe.

Bestimme alle möglichen Werte, die n annehmen kann.

Antwort. 8, 9, 10, 11, 12

Lösung. Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180°$. Dann muss also die Gleichung $150° \cdot (n-1) + \alpha = (n-2) \cdot 180°$ mit einem beliebigen Winkel α erfüllt werden. Umformen dieser Gleichung ergibt $n = \frac{\alpha}{30°} + 7$. Da das n-Eck konvex sein soll, muss $0° < \alpha < 180°$ gelten. Also ergibt sich $8 \leq n \leq 12$.

Aufgabe 24J / 14S. Die Seiten a, b und c eines Dreiecks erfüllen die Gleichung

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}.$$

Bestimme den Winkel zwischen den Seiten b und c.

Antwort. $60°$

Lösung. Multipliziert man die gegebene Gleichung mit dem Hauptnenner durch, so erhält man

$$\begin{aligned} & & \frac{3}{a+b+c} &= \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \\ &\iff & 3 \cdot (a+b)(a+c) &= (a+c)(a+b+c) + (a+b)(a+b+c) \\ &\iff & 3 \cdot (a^2+ab+ac+bc) &= 2a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+ac) + 2bc \\ &\iff & a^2 &= b^2 + c^2 - bc \end{aligned}$$

Diese Gleichung erinnert an den Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Die gegebene Gleichung wird also mit $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ erfüllt, woraus $\alpha = 60°$ folgt.

Aufgabe 25J / 15S. Bestimme alle natürlichen Zahlen n zwischen 1 und 200 mit der Eigenschaft, dass die Summe der unterschiedlichen Primfaktoren von n genau 16 ergibt.

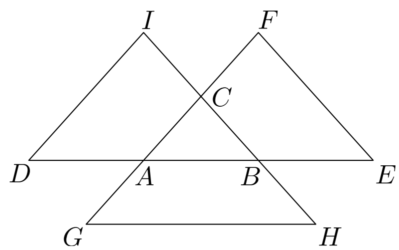
Beispiel: Die Summe der unterschiedlichen Primfaktoren von $12 = 2^2 \cdot 3$ ist $2 + 3 = 5$.

Antwort. 39, 55, 66, 117, 132, 198

Lösung. Die möglichen Primzahlen kleiner 16, die in die Summe eingehen können, sind 2, 3, 5, 7, 11 und 13. Die möglichen Summen sind also $16 = 13 + 3 = 11 + 5 = 11 + 2 + 3$. Jetzt muss man nur noch prüfen, in welchen Potenzen die Summanden auftreten müssen, damit Zahlen zwischen 1 und 200 entstehen. Dies sind $3 \cdot 13 = 39$, $3^2 \cdot 13 = 117$, $5 \cdot 11 = 55$, $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$ und $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$.

Aufgabe 26J / 16S. Die Streckenabschnitte in der gegebenen Zeichnung erfüllen die Gleichungen $\overline{DA} = \overline{AB} = \overline{BE}$, $\overline{GA} = \overline{AC} = \overline{CF}$ und $\overline{IC} = \overline{CB} = \overline{BH}$. Außerdem sei $\overline{EF} = 5$, $\overline{DI} = 5$ und $\overline{GH} = 6$.

Wie groß ist die Fläche des Dreiecks ABC?



Antwort. 3

Lösung. Da A der Mittelpunkt der Strecke DB ist und C der Mittelpunkt der Strecke IB, ist die Strecke AC als Verbindungsstrecke zweier Seitenmittelpunkte im Dreieck $\triangle IDB$ genau halb so lang wie die Seite DI, also $\frac{5}{2}$. Analog folgt $\overline{BC} = \frac{5}{2}$ und $\overline{AB} = 3$. Mit dem halben Umfang

$$s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 3\right) = 4$$

folgt aus der Formel von Heron

$$F_{\triangle ABC} = \sqrt{4 \cdot (4 - \frac{5}{2}) \cdot (4 - \frac{5}{2}) \cdot (4 - 3)} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit erhält man durch Berechnung der Höhe auf die Basis AB im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Satz des Pythagoras und anschließender Verwendung der Standardformel zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks.

Aufgabe 27J / 17S. Eine Primzahl p wird *stark* genannt, wenn sie eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- p ist eine einstellige Primzahl oder
- sowohl durch das Entfernen der ersten Ziffer von p als auch durch das Entfernen der letzten Ziffer von p entsteht eine starke Primzahl.

Bestimme alle starken Primzahlen.

Beispiel: Die Zahl 37 ist eine starke Primzahl, da durch das Streichen der ersten Ziffer die Zahl 7 und durch das Streichen der letzten Ziffern die Zahl 3 entsteht, die beide selbst starke Primzahlen sind.

Antwort. 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373

Lösung. Die einstelligen starken Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7.

Zweistellige starke Primzahlen müssen selbst prim sein und sich aus einstelligen Primzahlen zusammensetzen. Die einzigen Möglichkeiten hierfür sind 23, 37, 53 und 73.

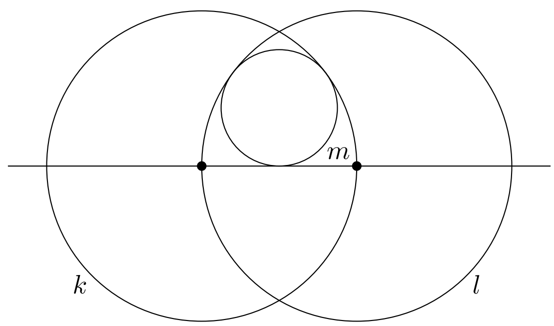
Kandidaten für dreistellige starke Primzahlen sind solche Primzahlen, bei denen nach dem Streichen der ersten bzw. letzten Ziffer wieder eine zweistellige starke Primzahl entsteht. Also sind es solche Zahlen, bei denen die zweite Ziffer einer starken zweistelligen gleich der ersten Ziffer einer anderen starken zweistelligen Primzahl sind. Die einzigen Möglichkeiten hierfür sind 237, 537, 737 und 373, wovon nur 373 eine Primzahl ist.

Vierstellige starke Primzahlen können nun nicht mehr existieren, da sowohl nach dem Streichen der ersten als auch nach dem Streichen der letzten Ziffer die Zahl 373 entsehen müsste, was unmöglich ist.

Insgesamt sind also die Zahlen 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 und 373 starke Primzahlen.

Aufgabe 28J / 18S. Gegeben seien zwei Kreise k und l mit Radius 16, deren Mittelpunkte auf der jeweils anderen Kreislinie liegen. Ferner sei ein Kreis m gegeben, der die beiden Kreise k und l sowie die Verbindungsgerade der Mittelpunkte, wie in der Abbildung dargestellt, berührt.

Bestimme den Radius des Kreises m.

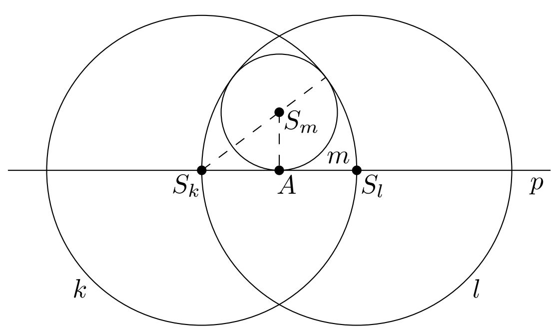


Antwort. 6

Lösung. Mit S_k, S_l und S_m seien die Mittelpunkte der Kreise k, l und m bezeichnet und mit r der Radius des Kreises m. Da die Mittelpunkte zweier sich von innen berührenden Kreise zusammen mit dem Berührpunkt auf einer Geraden liegen, ist $\overline{S_kS_m} = 16 - r$.

Ferner sei A der Berührpunkt des Kreises m mit der Geraden S_kS_l. Aus Symmetriegründen folgt $\overline{S_kA} = \overline{S_lA} = \frac{16}{2} = 8$. Da S_mA senkrecht auf S_kS_l steht, folgt mit dem Satz des Pythagoras

$$8^2 + r^2 = (16 - r)^2 \iff 32r = 16^2 - 8^2 \iff r = 6.$$



Aufgabe 29J / 19S. Wie viele sechsstellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen jede Ziffer so oft vorkommt wie ihr Wert angibt?

Beispiel: Die Zahl 133232 ist eine solche Zahl.

Antwort. 82

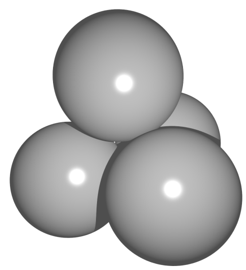
Lösung. Als mögliche Ziffern kommen nur 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in Frage. Ferner muss die Summe der vorkommenden verschiedenen Ziffern genau 6 ergeben, wofür es nur die Möglichkeiten 6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1 gibt.

Ist die Ziffer 6 beteiligt, so gibt es nur die Möglichkeit 666666. Für die Ziffern 1 und 5 hat man sechs Möglichkeiten, je nachdem, wo man die Ziffer 1 platziert. Für die Ziffern 2 und 4 gibt es analog $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten für die Positionen der Ziffern 2. Schließlich gibt es für die Ziffern 1, 2 und 3 genau $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ Möglichkeiten, indem man zuerst die 1 platziert und dann die zwei Plätze für die Ziffern 2 aus den restlichen fünf Positionen auswählt.

Insgesamt gibt es also $1 + 6 + 15 + 60 = 82$ sechsstellige Zahlen, bei denen jede Ziffer so oft vorkommt wie ihr Wert angibt.

Aufgabe 30J / 20S. Vier Kugeln mit Radius 1 berühren sich paarweise.

Bestimme den Radius der kleinsten Kugel, die alle vier Kugeln enthält.



Antwort. $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Lösung. Die Mittelpunkte der vier Kugeln bilden ein regelmäßiges Tetraeder und die Umkugel dieses Tetraeders hat den gleichen Mittelpunkt wie die kleinste umschließende Kugel der vier gegebenen Kugeln. Wenn man also den Schwerpunkt des Tetraeders und dessen Abstand zu einer Ecke des Tetraeders bestimmt hat, dann kann man leicht den Radius der gesuchten Kugel angeben.

Der Schwerpunkt des regelmäßigen Tetraeders ist der Schnittpunkt der Schwerlinien, also der Verbindungsstrecken von einer Ecke zum Schwerpunkt des gegenüber liegenden Dreiecks. In einem regelmäßigen Tetraeder ist die Schwerlinie zugleich Höhe und deren Länge kann man durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnen. Zunächst ist der Abstand des Schwerpunkts der Dreiecksfläche von einem Eckpunkt gegeben durch $\frac{2}{3}\sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, da der Schwerpunkt die Schwerlinie im Verhältnis 1 : 2 teilt. Hieraus ergibt sich die Länge der Höhe des Tetraeders zu $\sqrt{2^2 - (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

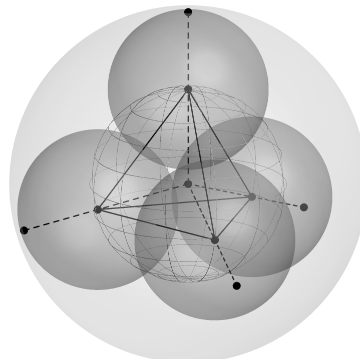
Nun muss man noch bestimmen, wo der Schwerpunkt des Tetraeders auf der Höhe liegt. Wenn man nicht weiß, dass der Schwerpunkt im Tetraeder die Schwerlinie im Verhältnis 1 : 3 teilt, so kann man sich dies ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras herleiten, da der Schwerpunkt von allen Ecken den gleichen Abstand haben muss. Wenn also der Schwerpunkt im Tetraeder die Schwerlinie im Verhältnis $x : (1 - x)$ teilt, so muss x die Gleichung

$$(1-x) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(x \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^2}$$

erfüllen. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(1-x)^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + x^2 \cdot \frac{8}{3} \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}.$$

Also ist der Abstand einer Ecke des Tetraeders vom Schwerpunkt des Tetraeders $(1 - \frac{1}{4}) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Deshalb ist der gesuchte Radius $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Aufgabe 31J / 21S. Bestimme die Anzahl der Paare positiver ganzer Zahlen (x, y) mit $y < x \leq 100$, so dass $x^2 - y^2$ und $x^3 - y^3$ teilerfremd sind.

Antwort. 99

Lösung. Wegen $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ und $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ haben beide Terme den gemeinsamen Faktor $x - y$. Wenn die Terme teilerfremd sein sollen, so muss dieser Faktor gleich 1 sein, muss also $x = y + 1$ gelten.

Nun ist noch zu untersuchen, für welche $x = y+1$ die beiden anderen Faktoren $x+y$ und x^2+xy+y^2 ebenfalls teilerfremd sind. Einsetzen von $y = x-1$ ergibt $x+y = 2x-1$ und $x^2+xy+y^2 = 3x^2-3x+1$. Subtrahiert man im zweiten Term das Vielfache $(x-1)(2x-1)$ des ersten Terms, so ergibt sich $3x^2-3x+1-x(2x-1)+(2x-1) = x^2$. Also sind die ursprünglichen Terme genau dann teilerfremd, wenn dies die Terme $2x - 1$ und x^2 sind.

Angenommen, es gibt gemeinsame Teiler größer 1 von $2x - 1$ und x^2 und d sei der kleinste dieser Teiler. Dann gilt $d \mid x$ und $d \mid 2x - 1$ und deshalb auch $d \mid 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $d > 1$.

Also ist $x = y + 1$ notwendige und hinreichende Bedingung für die Teilerfremdheit von $x^2 - y^2$ und $x^3 - y^3$ und alle Paare $(2, 1), (3, 2), \ldots, (100, 99)$ sind Lösungen.

Es gibt also 99 solche Paare.

Aufgabe 32J / 22S. Gegeben sei eine Zahl, die mit $122333444455555\ldots$ beginnt und bei der in aufsteigender Reihenfolge jede Zahl so oft hintereinander geschrieben wird wie ihr Wert angibt. Nach 2014 Ziffern wird das Aufschreiben beendet.

Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

Antwort. 4

Lösung. Die einstelligen Zahlen verbrauchen $1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 = 45$ Plätze. Die zweistelligen Zahlen brauchen

$$2 \cdot (10 + 11 + \cdots + 99) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10\right) = 9900 - 90 = 9810$$

zusätzliche Plätze. Also erreicht man die 2014 Ziffern während des Aufschreibens einer zweistelligen Zahl. Da 2014 gerade ist, und auf den geraden Positionen jeweils die Zehnerstellen der zweistelligen Zahlen stehen, müssen wir nur noch den Zehnerbereich finden, der bei der 2014-ten Ziffer gerade vorkommt. Wegen

$$45 + 2 \cdot (10 + 11 + \cdots + 39) = 45 + (39 \cdot 40 - 9 \cdot 10) = 1515$$

und

$$45 + 2 \cdot (10 + 11 + \cdots + 49) = 45 + (49 \cdot 50 - 9 \cdot 10) = 2405$$

ist die gesuchte Ziffer 4.

Aufgabe 33J / 23S. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die die Gleichung $(x^2-1)(y^2-1)=n$ mindestens zwei verschiedene Lösungen mit $0 < x \le y$ and $x,\ y \in \mathbb{N}$ besitzt.

Antwort. 360

Lösung. Man betrachtet zunächst für kleine x die Werte, die x^2-1 annehmen kann. Dies sind 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, ... Nun braucht man zwei verschiedene Paare, deren Produkt gleich und möglichst klein ist. Nun kann man $3 \cdot 120 = 15 \cdot 24 = 360$ sehen und alle anderen Produkte, die kleiner als 360 sind, haben nur eine Darstellung als Produkt von Faktoren aus der obigen Aufzählung. Also ist die gesuchte Zahl 360 und die zugehörigen Lösungen sind $(2,11)$ und $(4,5)$.

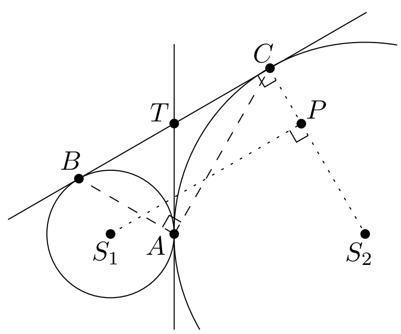
Aufgabe 34J / 24S. Zwei Kreise mit den Radien 1 und 3 berühren sich gegenseitig im Punkt A und eine gemeinsame Tangente in den Punkten B und C.

Bestimme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$.

Antwort. 24

Lösung. Bezeichnet man mit S_1 den Mittelpunkt des kleinen Kreises, mit S_2 den Mittelpunkt des großen Kreises und mit T den Schnittpunkt der gemeinsamen Tangente der beiden Kreise in A mit der Tangente CB, so gilt $\overline{TC} = \overline{TA} = \overline{TB}$ aufgrund gleich langer Tangentenabschnitte. Somit liegen die drei Punkte $A,\ B$ und C aufgrund des Satzes von Thales auf einem Kreis. Also ist das Dreieck $\triangle ACB$ rechtwinklig und es gilt $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

Nun zeichnet man die Parallele zu BC durch S_1 und bezeichnet mit P deren Schnittpunkt mit der Strecke S_2C. Dann ist S_1PCB ein Rechteck. Mit dem Satz Pythagoras folgt $\overline{BC}^2 = \overline{S_1P}^2 = (\overline{S_1A} + \overline{AS_2})^2 - (\overline{S_2C} - \overline{PC})^2 = 12$, was schließlich als Lösung 24 ergibt.



Aufgabe 35J / 25S. Bestimme die größte Primzahl p, welche die Bedingung $p^p \mid 2014!$ erfüllt, wobei $n!$ die Fakultät von n bezeichnet. Dabei ist die Fakultät von n durch $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ definiert.

Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Antwort. 43

Lösung. Man muss untersuchen, welche Faktoren von 2014! durch eine Primzahl p teilbar sind. Da p prim ist, sind dies genau die Faktoren

$$p, 2p \ldots, \lfloor \frac{2014}{p} \rfloor p.$$

Um die geforderten p Faktoren der Primzahl p zu erhalten, muss $p \le \lfloor \frac{2014}{p} \rfloor$ gelten, was gleichbedeutend mit $p^2 < 2014$ ist.

Die größte Primzahl, die dies erfüllt, ist 43.

Aufgabe 36J / 26S. Gegeben sei eine Anordnung von Quadraten in zwei Spalten und 2014 Zeilen. Nun färbt man jedes Quadrat mit einer der Farben Rot, Grün und Blau so, dass zwei Quadrate mit einer gemeinsamen Seite unterschiedlich gefärbt sind.

Wie viele verschiedene solche Färbungen gibt es?

Antwort. $6 \cdot 3^{2013}$

Lösung. Zunächst färbt man die beiden Quadrate in der untersten Zeile, wofür man $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten hat. Wenn nun eine Zeile mit den Farben (a, b) gefärbt ist, so hat man für die darüber liegende Zeile genau die drei Möglichkeiten (b, a), (b, c) oder (c, a). Also gibt es für die unterste Zeile 6 Möglichkeiten und dann für jede Zeile in Abhängigkeit von der vorherigen jeweils 3 Möglichkeiten. Insgesamt sind dies $6 \cdot 3^{2013}$ unterschiedliche Färbungen.

Aufgabe 37J / 27S. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl m mit der Eigenschaft, dass $5m$ eine fünfte Potenz, $6m$ eine sechste Potenz und $7m$ eine siebte Potenz ist.

Antwort. $5^{84} \cdot 6^{35} \cdot 7^{90}$

Lösung. Die Faktoren 5, 6 und 7 müssen in m enthalten sein, denn sonst könnten $5m$ keine fünfte Potenz, $6m$ keine sechste Potenz und $7m$ keine siebte Potenz sein. Also kann man m schreiben als $m = 5^a \cdot 6^b \cdot 7^c \cdot d$, wobei d nicht durch 5, 6 oder 7 teilbar sein darf und möglichst klein sein soll, da man ja das kleinste solche m sucht. Also kann man $d = 1$ setzen.

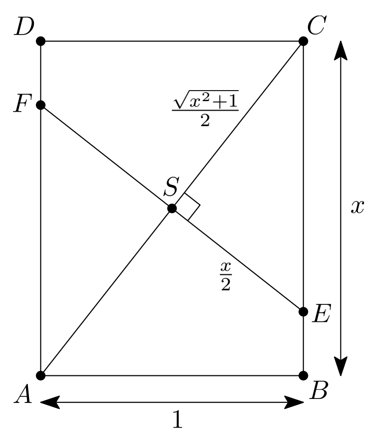
Damit $5m$ eine fünfte Potenz ist, muss 5 die Exponenten $a+1$, b und c teilen. Analog muss $6 \mid a$, $6 \mid b+1$, $6 \mid c$ und $7 \mid a$, $7 \mid b$, $7 \mid c+1$ gelten. Die Zahl a muss also durch 42 teilbar sein und $a+1$ durch 5. Das kleinste solche a ist 84. Analog findet man $b = 35$ und $c = 90$. Also ist die kleinste geeignete Zahl $m = 5^{84} \cdot 6^{35} \cdot 7^{90}$.

Aufgabe 38J / 28S. Gegeben sei ein rechteckiges Blatt Papier, das so gefaltet wird, dass zwei diagonal gegenüber liegende Ecken übereinander liegen. Dabei ist die Faltkante genau so lang wie die längere Rechtecksseite.

In welchem Verhältnis steht die längere zur kürzeren Rechtecksseite?

Antwort. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Lösung. Man führt Bezeichnungen wie in der Skizze ein. Da nur das Verhältnis der Seiten gesucht ist und ähnliche Rechtecke das gleiche Ergebnis liefern, kann man $\overline{AB} = 1$ setzen und braucht nur $\overline{BC} = x$ bestimmen.



Aufgrund der Faltung, die einer Achsenspiegelung des Punktes A auf den Punkt C an der Geraden FE entspricht, kann man $FE \perp AC$ und $\overline{FS} = \overline{SE} = \frac{x}{2}$ in der Figur ablesen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann $\overline{CS} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. Da die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ECS$ ähnlich sind, folgt $\frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Durch Umformen erhält man die Gleichung $x^4 - x^2 - 1 = 0$ und nach Substitution $z = x^2$ die quadratische Gleichung $z^2 - z - 1 = 0$ mit den Lösungen $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Als eindeutige nicht-negative Lösung ergibt sich $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, die Wurzel aus dem goldenen Schnitt.

Aufgabe 39J / 29S. Gegeben seien 20 Murmeln, jede in einer der Farben Weiß, Blau, Grün oder Rot. Dabei sollen Murmeln der gleichen Farbe nicht unterscheidbar sein.

Wie viele Murmeln können höchtens blau sein, wenn die Murmeln auf 1140 Möglichkeiten hintereinander auf einer Geraden angeordnet werden können?

Antwort. 17

Lösung. Man bezeichnet die Anzahl der blauen Murmeln mit b, die der grünen mit g, die der roten mit r und die der weißen mit w.

Man kann nun der Reihe nach die weißen, roten und grünen Murmeln auf die einzelnen Plätze verteilen und die restlichen Plätze für die blauen vergeben. Dafür hat man

$$\binom{20}{w} \cdot \binom{20-w}{r} \cdot \binom{20-w-r}{g} \cdot 1 = \frac{20!}{w! \cdot r! \cdot g! \cdot (20-w-r-g)!}$$

Möglichkeiten. Da dieser Ausdruck genau 1140 sein soll, gilt die Gleichung

$$1140 = \frac{20!}{w! \cdot r! \cdot g! \cdot (20-w-r-g)!}.$$

Setzt man $z = w + r + g$, so erhält man für $z = 0$ auf der rechten Seite den Wert 1. Für $z = 1$ ergibt sich 20 und für $z = 2$ ist der größte mögliche Wert auf der rechten Seite für zwei verschiedenfarbige Murmeln gegeben durch $20 \cdot 19 = 380$. Für $z = 3$ kann man höchstens $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840 = 6 \cdot 1140$ erhalten. Wenn man also noch einen Faktor 6 im Nenner erzeugt, so hat man das gewünschte Ergebnis 1140. Dies kann man mit drei gleichfarbigen Murmeln erreichen.

Man kann deshalb höchstens $20 - z = 17$ blaue Murmeln haben.

Aufgabe 40J / 30S. Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ mit der Eigenschaft, dass ein regelmäßiges n-Eck in mindestens zwei regelmäßige Vielecke zerlegt werden kann.

Antwort. 3, 4, 6, 12

Lösung. Bekannt sind die Zerlegungen eines gleichseitigen Dreiecks durch das Seitenmittendreieck in vier kleinere gleichseitige Dreiecke, eines Quadrats in vier kleinere Quadrate und eines regelmäßigen Sechsecks in sechs gleichseitige Dreiecke. Aber dies sind nicht alle Möglichkeiten.

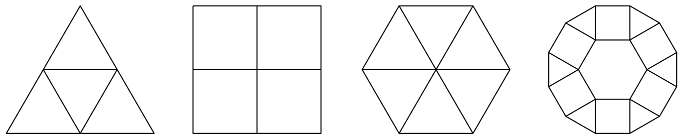
Da man einen Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks zerlegen muss, braucht man dessen Größe. Diese ist $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Diesen Winkel kann man entweder mit einem regelmäßigen b-Eck füllen – wie in den Fällen des gleichseitigen Dreiecks oder des Quadrats – und hat dann die Aufgabe, den 180°-Winkel an einer Seite zu zerlegen, oder mit mehreren regelmäßigen Vielecken. Betrachtet man zunächst den Restwinkel an einer Seite, wenn der Innenwinkel mit einem Vieleck gefüllt wird, so ist dieser $180° - \frac{b-2}{b} \cdot 180°$. Außer im Fall $b = 3$, in welchem genau drei gleichseitige Dreiecke 180° ergeben, muss der 180°-Winkel durch genau zwei regelmäßige Vielecke erzeugt werden. Also muss

$$\begin{aligned} \frac{n_1-2}{n_1} \cdot 180° + \frac{n_2-2}{n_2} \cdot 180° \quad &\Longleftrightarrow \quad n_1n_2 - 2n_1 - 2n_2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (n_1-2)(n_2-2) = 4 \end{aligned}$$

für ein n_1-Eck und ein n_2-Eck gelten. Dies bedeutet aber $n_1 - 2,\ n_2 - 2 \in \{1, 2, 4\}$ bzw. $n_1,\ n_2 \in \{3, 4, 6\}$. Diese Fälle wurden bereits eingangs betrachtet und es gibt deshalb keine weiteren mehr, bei denen ein Innenwinkel des n-Ecks mit genau einem regelmäßigen b-Eck gefüllt werden kann.

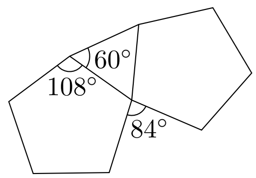
Wird der Innenwinkel mit mehreren regelmäßigen Vielecken gefüllt, so können dies höchstens zwei sein, da der kleinste Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks 60° ist und stets $3 \cdot 60° > \frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Treffen zwei regelmäßige Vielecke an einer Ecke zusammen, so muss mindestens eines der beiden ein Dreieck sein, da ansonsten die Winkelsumme an dieser Ecke zu groß wäre. Aus dem gleichen Grund kann das zweite nur ein Quadrat oder ein Fünfeck sein.

Im Fall eines Quadrats ergibt sich der Winkel $60° + 90° = 150°$, was dem Innenwinkel eines regelmäßigen 12-Ecks entspricht. Legt man jeweils abwechselnd ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat aneinander, so entsteht an jeder Ecke ein Winkel der Größe $360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$ und es verbleibt in der Mitte ein regelmäßiges Sechseck.



Im Fall des Fünfecks ergibt sich $60° + 108° = 168°$, was dem Innenwinkel eines regelmäßigen 30-Ecks entspricht. Legt man jeweils abwechselnd ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Fünfeck aneinander, so entsteht an jeder Ecke ein Winkel der Größe $360° - 60° - 2 \cdot 108° = 84°$ und es kann keine weitere Zerlegung in regelmäßige n-Ecke geben.

Insgesamt gilt die geforderte Eigenschaft also für $n \in \{3, 4, 6, 12\}$.



Aufgabe 41J / 31S. Auf einem 5×5-Schachbrett steht in der linken unteren Ecke ein Turm. Der Turm ist *eingeschränkt*, das heißt, er kann nicht nach links oder nach unten ziehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Turm in die rechte obere Ecke zu gelangen?

Dabei werden zwei Wege als unterschiedlich angesehen, wenn die Abfolge der besuchten Felder unterschiedlich ist.

Antwort. 838

Lösung. Der Einfachheit halber bezeichnet man die Felder des Schachbretts mit $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(5, 5)$ und die Anzahl der Möglichkeiten ein Feld (x, y) zu erreichen mit $P_{(x,y)}$. Aufgrund der Regeln ist klar, dass $P_{(x,y)} = P_{(y,x)}$ sein muss.

Nun füllt man nacheinander alle Felder mit der Anzahl der Möglichkeiten dieses Feld zu erreichen, indem man sich überlegt, von welchen Feldern aus der Turm dieses Feld in einem Zug erreichen kann. Er steht anfangs auf $(1, 1)$ und man setzt $P_{(1,1)} = 1$ und es folgt $P_{(1,2)} = 1$. Da der Turm von den Feldern $(1, 1)$ und $(1, 2)$ und nur von diesen zu $(1, 3)$ gelangen kann, ist $P_{(1,3)} = 2$. Analog folgt $P_{(1,4)} = P_{(1,1)} + P_{(1,2)} + P_{(1,3)} = 1+1+2 = 4$ und $P_{(1,5)} = 8$.

Das Feld $(2, 2)$ kann der Turm nur von $(1, 2)$ oder von $(2, 1)$ erreichen, also ist $P_{(2,2)} = P_{(1,2)} + P_{(2,1)} = 1+1 = 2$. Analog folgt $P_{(3,2)} = P_{(1,2)} + P_{(2,2)} + P_{(3,1)} = 1+2+2 = 5$ und $P_{(4,2)} = P_{(1,2)} + P_{(2,2)} + P_{(3,2)} + P_{(4,1)} = 1 + 2 + 5 + 4 = 12$. Fährt man auf diese Weise fort, so kann man der Reihe nach die Felder füllen und erhält schließlich $P_{(5,5)} = 838$.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Aufgabe 42J / 32S. Wie lautet die Ziffer an der Hunderterstelle der Zahl 11^{2014}?

Antwort. 2

Lösung. Mit der binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned} 11^{2014} &= (10+1)^{2014} = \sum_{i=0}^{2014} \binom{2014}{i} \cdot 10^i \\ &= 1 + 2014 \cdot 10 + \binom{2014}{2} \cdot 10^2 + 10^3 \cdot \sum_{i=3}^{2014} \binom{2014}{i} \cdot 10^{i-3}. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist durch 1 000 teilbar und hat deshalb keinen Einfluss auf die Hunderterstelle. Es reicht also, den Term

$$1 + 2014 \cdot 10 + \binom{2014}{2} \cdot 10^2 = 1 + 20\,140 + 202\,709\,100 = 202\,729\,241$$

zu berechnen. Die gesuchte Ziffer ist somit 2.

Aufgabe 43J / 33S. Ein Grashüpfer sitzt auf einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks. Bei jedem Sprung wählt der Grashüpfer zufällig eine der beiden anderen Ecken aus und springt zu dieser Ecke.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Grashüpfer nach zehn Sprüngen wieder auf der Ecke befindet, von der aus er gestartet ist?

Antwort. $\frac{171}{512}$

Lösung. Der Vektor (a_i, b_i, c_i) bezeichne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich der Grashüpfer nach i Sprüngen in den Ecken A, B oder C befindet. Die Ecke, an der der Grashüpfer startet, sei die Ecke A des Dreiecks. Also hat man zu Beginn $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$. Um im $(i+1)$-ten Sprung nach A gelangen zu können, muss der Grashüpfer nach dem i-ten Sprung auf B oder C gewesen sein. Da er von beiden Ecken aus mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach A springt, ist $a_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_i + c_i)$. Analog folgt $b_{i+1} = \frac{1}{2}(a_i + c_i)$ und $c_{i+1} = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$. Also hat man für die ersten zehn Sprünge folgende Wahrscheinlichkeitsvektoren:

$$\begin{aligned} (1,0,0) &\Longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \\ &\Longrightarrow \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right) \Longrightarrow \left(\frac{5}{16}, \frac{11}{32}, \frac{11}{32}\right) \Longrightarrow \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{64}, \frac{21}{64}\right) \\ &\Longrightarrow \left(\frac{21}{64}, \frac{43}{128}, \frac{43}{128}\right) \Longrightarrow \left(\frac{43}{128}, \frac{85}{256}, \frac{85}{256}\right) \\ &\Longrightarrow \left(\frac{85}{256}, \frac{171}{512}, \frac{171}{512}\right) \Longrightarrow \left(\frac{171}{512}, \frac{341}{1024}, \frac{341}{1024}\right) \end{aligned}$$

Also ist $a_{10} = \frac{171}{512}$.

Aufgabe 44J / 34S. In einem Computerspiel hat Franz 100 Energieeinheiten, als er anfängt Baumstämme zu zersägen. In jeder Minute kann er sich entscheiden, entweder n Baumstämme zu zersägen und dabei eine Energieeinheit zu verbrauchen, wenn n die Anzahl seiner momentan vorhandenen Energieeinheiten ist, oder zu rasten – und dabei natürlich keine Baumstämme zu zersägen – und eine Energieeinheit aufzunehmen.

Was ist die größte Anzahl an Baumstämmen, die Franz innerhalb von 60 Minuten zersägen kann?

Antwort. 4293

Lösung. Wann ist es für Franz sinnvoll zu rasten? Es ist sinnvoller, zuerst zu rasten und dann zu sägen, weil er so einen Baumstamm mehr zersägt bei gleichem Energieeinsatz verglichen damit, dass er zuerst sägt und anschließend rastet. Mit dieser Erkenntnis bleibt als Strategie nur noch übrig, anfangs x Mal zu rasten und dann nacheinander $60 - x$ Mal zu zersägen. Alle anderen Strategien können dadurch verbessert werden, zunächst zu rasten und dann zu sägen.

Ist $x = 0$, so zersägt er $S_0 = 100 + 99 + \cdots + 41$ Bäume. Ist $x = 1$, so zerschneidet Franz $S_1 = 101 + 100 + \cdots + 43$ Bäume, usw.

Für jedes Rasten am Anfang gewinnt Franz also bei jedem Sägen einen Baum hinzu, verliert aber jedesmal einen Sägevorgang am Schluss. Somit ist $S_1 = (100 + 1) + (99 + 1) + \cdots + (42 + 1) = S_0 + 59 - 41$. Also ist es sinnvoll für ihn, anfangs zu rasten. Analog ist $S_2 = S_1 + 58 - 43$, $S_3 = S_2 + 57 - 45$ und allgemein $S_x = S_{x-1} + (60 - x) - (41 + 2(x - 1))$. Da $S_7 = S_6 + 53 - 53$ ist, ist sinnvoll für Franz bis $x = 6$ zu rasten.

Die Anzahl der zersägten Baumstämme ergibt sich dann zu

$$(40 + 2x + 1) + (41 + 2x + 1) + \cdots + (100 + x).$$

Für $x = 6$ erhält man die maximale Anzahl $\frac{1}{2} \cdot 106 \cdot 107 - \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 53 = 4293$.

Aufgabe 45J / 35S. Gegeben sei die Menge $\sqrt{\mathbb{N}} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots\}$ der Quadratwurzeln aller natürlichen Zahlen. Mit S sei die Menge aller Zahlen a bezeichnet, für die sowohl $a \in \sqrt{\mathbb{N}}$ als auch $\frac{36}{a} \in \sqrt{\mathbb{N}}$ gilt.

Bestimme das Produkt aller Elemente von S.

Antwort. 6^{25}

Lösung. Für ein $a \in S$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $a = \sqrt{n_1}$ ist. Wegen der Zugehörigkeitsbedingung für S gilt dann auch $\frac{36}{a} \in S$, und es gibt ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{36}{a} = \sqrt{n_2}$. Daraus erhält man $36 = \sqrt{n_1} \cdot \sqrt{n_2}$ bzw. $36^2 = n_1 n_2$, woraus folgt, dass n_1 ein Teiler von 36^2 ist.

Hat man umgekehrt einen Teiler $n \in \mathbb{N}$ von 36^2 gegeben und schreibt man $n \cdot m = 36^2$ mit einem $m \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt{n} \in \sqrt{\mathbb{N}}$ und es gilt auch $\frac{36}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{36^2}{n}} = \sqrt{m} \in \sqrt{\mathbb{N}}$. Folglich ist $\sqrt{n} \in S$.

Das bedeutet, dass die Elemente von S genau die Wurzeln der positiven Teiler von 36^2 sind. Wegen $36 = 2^2 \cdot 3^2$ erhält man das Produkt aller positiven Teiler von 36^2 durch

$$(2^0 \cdot 3^0)(2^0 \cdot 3^1)(2^0 \cdot 3^2)(2^0 \cdot 3^3)(2^0 \cdot 3^4)(2^1 \cdot 3^1) \cdots (2^4 \cdot 3^3)(2^4 \cdot 3^4).$$

Durch Ausklammern und Zusammenfassen ergibt sich hierfür

$$(2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4)^5 (3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4)^5 = 2^{50} \cdot 3^{50} = 6^{50}.$$

Da S genau aus den Wurzeln dieser Teiler von 36^2 besteht, ist das gesuchte Produkt gleich 6^{25}.

Aufgabe 46J / 36S. Wenn man 2014 Ziffern zufällig aus den Ziffern von 0 bis 9 auswählt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Produkt durch 10 teilbar ist?

Antwort. $1 - (\frac{5}{10})^{2014} - (\frac{8}{10})^{2014} + (\frac{4}{10})^{2014}$

Lösung. Zuerst bestimmt man die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass das Produkt der gewählten Ziffern nicht durch 10 teilbar ist. In diesem Fall dürfen die Faktoren 2 und 5 nicht gleichzeitig im Produkt auftreten. Die zunächst gesuchte Wahrscheinlichkeit p kann man nun mit Hilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion berechnen: Die Wahrscheinlichkeit, nur ungerade Ziffern zu wählen, ist $(\frac{5}{10})^{2014}$ und die Wahrscheinlichkeit, nur nicht durch 5 teilbare Ziffern zu wählen, ist $(\frac{8}{10})^{2014}$. Weil aber so die Auswahlen bestehend nur aus nicht durch 5 teilbaren ungeraden Ziffern doppelt gezählt werden, muss die Wahrscheinlichkeit dafür, nämlich $(\frac{4}{10})^{2014}$ einmal abgezogen werden. Es ergibt sich

$$p = \left(\frac{5}{10}\right)^{2014} + \left(\frac{8}{10}\right)^{2014} - \left(\frac{4}{10}\right)^{2014}.$$

Schließlich ist die gesuchte Antwort

$$1-p = 1-\left(\frac{5}{10}\right)^{2014} - \left(\frac{8}{10}\right)^{2014} + \left(\frac{4}{10}\right)^{2014}.$$

Aufgabe 47J / 37S. Bestimme den Wert des Ausdrucks

$$\lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2013}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2012}\rfloor + \cdots + \lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor.$$

Antwort. -2002

Lösung. Aufgrund der vorliegenden Symmetrie ist es sinnvoll, den Wert von $\lfloor 2014\sqrt[3]{a}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-a}\rfloor$ für ein $a \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen.

Wenn $\sqrt[3]{a}$ ganzzahlig ist, dann ist der Wert des betrachteten Terms 0.

Wenn $\sqrt[3]{a}$ nicht ganzzahlig ist, so hat $\sqrt[3]{a}$ die Form $\sqrt[3]{a} = k + x$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 < x < 1$. Durch einen Widerspruchsbeweis kann man zeigen, dass $2014(k+x) \notin \mathbb{Z}$ ist, so dass es als $2014(k+x) = m+y$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $0 < y < 1$ geschrieben werden kann. Daraus erhält man $\lfloor m+y\rfloor + \lfloor -(m+y)\rfloor = m + \lfloor y\rfloor + (-m) + \lfloor -y\rfloor = \lfloor y\rfloor + \lfloor -y\rfloor = -1$ wegen $0 < y < 1$. Also erhält man -1 als Wert der Summe $\lfloor 2014\sqrt[3]{a}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-a}\rfloor$, wenn a keine Kubikzahl oder 0 ist.

Wegen $12^3 = 1728 < 2014 < 13^3 = 2197$ gibt es genau 12 von null verschiedene Kubikzahlen, die kleiner als 2014 sind. Schließlich erhält man $2014 - 12 = 2002$ Paare von Nicht-Kubikzahlen, so dass das gesuchte Ergebnis -2002 ist.

Aufgabe 48J / 38S. Boris berechnete die Summe $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2012$. Dabei hat er einige Zahlen vergessen und als Ergebnis eine Zahl B erhalten, die durch 2011 teilbar ist. Anna berechnete die Summe $A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2013$. Dabei hat sie die gleichen Zahlen wie Boris vergessen und erhielt eine Zahl N, die durch 2014 teilbar ist.

Bestimme das Verhältnis $\frac{N}{A}$.

Antwort. $\frac{2}{3}$

Lösung. Die Summe $S = 1006 \cdot 2013$ lässt beim Teilen durch 2011 den Rest 1 und beim Teilen durch 2014 den Rest 1008. Da B durch 2011 teilbar ist, muss die Summe der vergessenen Zahlen beim Teilen durch 2011 den Rest 1 und beim Teilen durch 2014 den Rest 1007 lassen. Die kleinste Zahl, die beide Bedingungen erfüllt, ist $335 \cdot 2014 + 1007$. Man kann sie z. B. dadurch erhalten, dass man 1007 nimmt und 335 Paare, die sich jeweils zu 2014 summieren. Also ist $N = A - 1007 - 335 \cdot 2014 = A - 671 \cdot 1007$. Wegen $A = 2013 \cdot 1007$ ist $N = 1342 \cdot 1007$.

Deshalb ist $\frac{N}{A} = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 49J / 39S. Es liegen 16 Karten mit jeweils einer schwarzen und einer roten Seite in einer Reihe nebeneinander. Ein Zug besteht darin, einen Abschnitt aufeinander folgender Karten umzudrehen, wobei bei der Karte links außen des Abschnitts die schwarze Seite oben ist und bei allen restlichen Karten rechts davon die rote. Das Spiel endet, wenn kein Zug mehr gemacht werden kann.

Bestimme bei einer optimalen Ausgangsstellung die maximal mögliche Anzahl an Zügen, die man machen kann, bevor das Spiel endet.

Antwort. $2^{16} - 1$

Lösung. Zum Erkennen von Gesetzmäßigkeiten kann man mit einem einfacheren Beispiel starten. Also sei $n = 8$ und schwarz sei 0 und rot 1. Nun beginnt man z. B. mit $00100010 \Rightarrow 00100011 \Rightarrow 00100100 \Rightarrow 00100101 \Rightarrow 00100110 \Rightarrow 00100111 \Rightarrow 00101000 \Rightarrow \cdots$ und sieht, dass ein Zug einer Addition einer 1 im Binärsystem entspricht. Man kann keinen Zug mehr machen, wenn alle roten Seiten der Karten nach oben schauen, d. h. wenn als Binärzahl gesehen $11\ldots1 = 2^{16} - 1$ vorliegt. Da man immer $+1$ addiert, liegt der längste Spielverlauf vor, wenn man mit $0 = 00\ldots0$ beginnt. Man hat deshalb genau $2^{16} - 1$ Züge.

Aufgabe 50J / 40S. Gesucht sind rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, wobei eine der Katheten die Länge 2014^{14} haben soll.

Wie viele nicht kongruente solche Dreiecke gibt es?

Antwort. $\frac{27\cdot 29^2-1}{2}$

Lösung. Bezeichnet man die zweite Kathete mit b und die Hypotenuse mit c, so folgt mit dem Satz des Pythagoras $(2014^{14})^2 + b^2 = c^2$. Also gilt $(c-b)(c+b) = 2014^{28} = 2^{28}\cdot 19^{28}\cdot 53^{28}$. Da alle Längen ganzzahlig sein sollen, ist also die Anzahl der Möglichkeiten gesucht, $n = 2014^{28}$ als Produkt eines Teilers d und dessen Komplementärteilers $\frac{n}{d}$ zu schreiben. Dazu sei $c-b=d$ und $c+b=\frac{n}{d}$. Also ist $\frac{n}{d} = d+2b$. Dies ist möglich für alle $d \mid n$, wenn d und n die gleiche Parität haben und wenn $b \neq 0$ ist. Wegen $2 \mid n$ müssen d und $\frac{n}{d}$ beide gerade sein. Also bleiben für d genau $27\cdot 29\cdot 29-1$ Möglichkeiten, da zwei Faktoren 2 für die Teilbarkeit durch 2 benötigt werden und eine Möglichkeit für den Fall $b=0$ abgezogen werden muss. Wegen $b<c$ muss $d<\frac{n}{d}$ gelten. Deshalb gibt es nur halb so viele Möglichkeiten, also $\frac{1}{2}\cdot(27\cdot 29^2-1)$ gesuchte Dreiecke.

Aufgabe 51J / 41S. Bestimme die kleinste positive Zahl, die nicht als Summe von höchstens 11 Fakultäten geschrieben werden kann. Die Fakultäten müssen dabei nicht unterschiedlich sein.

Antwort. 359

Lösung. Sei P_i die kleinste positive Zahl, die nicht als Summe von höchstens i Fakultäten geschrieben werden kann. Klar ist $P_1 = 3$, denn $1 = 1!$ und $2 = 2!$.

Weiter ist $P_2 = 5$, weil $3 = 1! + 2!$ und $4 = 2! + 2!$ und 5 nicht als Summe von 2 Fakultäten geschrieben werden kann. Ähnlich ergibt sich $P_3 = 11$, weil $5 = 1! + 2! + 2!$ ist und $0 \leq n - 3! \leq 4$ für $n = 6, \ldots, 10$; also kann man $n - 3!$ als Summe von 2 Fakultäten darstellen.

Analog gilt $P_4 = 17$, da sich mit einem Summanden 3! alle Zahlen von 11 bis 16 als Summe von 4 Fakultäten darstellen lassen, weil 5 bis 10 als Summe von 3 Fakultäten geschrieben werden können. Genauso folgt $P_5 = 23$.

Es scheint so, dass bei der Zerlegung einer gegebenen Zahl immer die größt mögliche Fakultät als nächster Summand benutzt werden soll. Dass dies tatsächlich korrekt ist, zeigt man durch Widerspruch:

Sei $p! < n$ und die Summe mit den wenigsten Summanden enthalte $p!$ nicht, sei also gleich $a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \cdots + a_{p-1}\cdot(p-1)! = n$. Wäre $a_{p-1} \geq p$, dann könnte man $p! = p(p-1)!$ substituieren und dadurch eine Summe mit weniger Summanden erzeugen. Also muss $a_{p-1} < p$ sein und aus demselben Grund ergibt sich $a_{p-2} < p-1$ und so weiter. Insgesamt erhält man mit

$$n = a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \cdots + a_{p-1}\cdot(p-1)! \leq 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + (p-1)(p-1)! < p!$$

einen Widerspruch zur Annahme.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, dass die aus zwölf Summanden so gebildete Summe $1! + 2! + 2! + 3! + 3! + 3! + 4! + 4! + 4! + 4! + 5! + 5! = 359$ die gesuchte Zahl ist.

Aufgabe 52J / 42S. Bei einem Schachturnier spielt jeder Teilnehmer gegen jeden anderen und es gibt keine Unentschieden. Eine Gruppe von vier Schachspielern wird *geordnet* genannt, wenn es einen klaren Sieger und einen klaren Verlierer in der Gruppe gibt, das heißt, wenn ein Spieler der Gruppe gegen alle drei anderen gewonnen hat und ein Spieler gegen alle drei anderen verloren hat.

Bestimme die kleinste Zahl n, für die jedes Schachturnier mit n Spielern eine geordnete Gruppe besitzt.

Antwort. 8

Lösung. Man zeigt zunächst, dass es für $n = 8$ immer eine geordnete Gruppe von vier Schachspielern geben muss, und konstruiert dann einen Graph mit $n = 7$ Teilnehmern, der keine geordnete Vierergruppe hat.

Bei $n = 8$ Spielern ist die durchschnittliche Anzahl von Siegen eines Spielers 3.5. Es gibt also einen Spieler s der (mindestens) viermal gewonnen hat, also z. B. gegen a_1, a_2, a_3 und a_4. Genauso muss einer dieser vier Spieler gegen mindestens zwei andere gewonnen haben, o.B.d.A. sei dies a_1, der gegen a_2 und a_3 gewonnen hat. Zu guter Letzt nimmt man an, dass a_2 gegen a_3 gewonnen hat, da es einen Sieger dieser Partie gegeben

haben muss. Dann ist die Vierergruppe $\{s, a_1, a_2, a_3\}$ geordnet.
Nun zeigt man, dass es ein Turnier mit $n = 7$ Schachspielern gibt, in dem keine geordnete Vierergruppe existiert.

Dazu konstruiert man einen vollständigen, gerichteten Graph mit 7 Knoten, in dem jeder Knoten einem Spieler zugeordnet ist und jede gerichtete Kante ein Spiel repräsentiert, die vom Gewinner zum Verlierer zeigt.

Die Knoten seien mit $0,\ 1,\ \ldots,\ 6$ bezeichnet und von jedem Knoten $0 \leq i \leq 6$ gehen Kanten zu $\{(i+1) \bmod 7,$
$(i+2) \bmod 7,\ (i+4) \bmod 7\}$. Das sind $7 \cdot 3 = 21$ Kanten, der Graph ist also vollständig, da $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$ ist.

Die einzig möglichen Kandidaten für eine geordnete Vierergruppe (für jeden Knoten) sind der Spieler s und die drei Spieler, die s besiegt hat. Diese drei Spieler bilden jedoch einen Kreis und können daher nicht geordnet sein.

Aufgabe 53J / 43S. Zwei einstellige Zahlen aus der Menge $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$ werden ausgewählt. Peter wird das Produkt der beiden Zahlen gesagt und Dominik ihre Summe. Dann entsteht folgendes Gespräch:

Peter: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Dominik: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Peter: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Dominik: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Peter: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Dominik: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Peter: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Dominik: „Ich kenne die Zahlen nicht.“

Peter: „Jetzt kenne ich die Zahlen.“

Welche Zahlen waren ausgewählt worden?

Antwort. 2 und 8

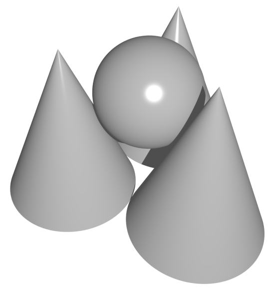
Lösung. Zuerst ist es wichtig zu erkennen, dass das Problem eine Lösung hat. Beide Spieler haben eine Tabelle mit den Summen und Produkten aller möglichen Paare der Zahlen 1 bis 9. Würde Peter das Produkt, das er genannt bekommt, nur einmal sehen, dann wüsste er die beiden Zahlen, aber er sagt, er kenne sie nicht. Also kann Dominik alle Paare streichen, die ein eindeutiges Produkt haben. Hätte Dominik im Rest dann eine eindeutige Summe, würde er die Zahlen kennen, aber er tut es nicht. Nun kann Peter alle Paare mit eindeutiger Summe streichen, usw.

Dann ist es wichtig einen Weg zu finden, der schnell zum Ziel führt. Beide Spieler haben dieselben Paare, deswegen kann man sie ordnen. Man benötigt außerdem die Produkte, also schreibt man für jedes mögliche Produkt alle zugehörigen Paare absteigend nach der Summe, z. B. $24 \Rightarrow (3,8), (4,6)$. Am Anfang genügt es, nur mit den Produkten zu beginnen, die wenigstens zwei Paare haben, da Peter zu Beginn die Zahlen nicht kennt. Dann streicht man die eindeutigen Summen, dann die jetzt noch eindeutigen Produkte usw.

Schließlich erhält man die Zahlen 2 und 8 als Lösung.

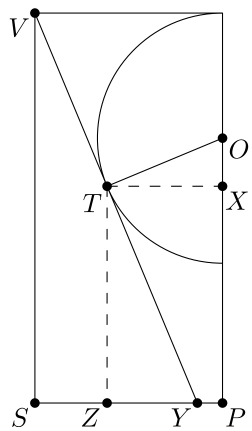
Aufgabe 54J / 44S. Drei identische Kreiskegel stehen in einer Ebene und berühren sich paarweise. Eine Kugel wird so zwischen die Kegel gelegt, dass der höchste Punkt der Kugel auf der gleichen Höhe liegt wie die Spitzen der Kegel.

Wie groß ist der Radius der Kugel, wenn jeder Kegel eine Grundfläche mit Radius 50 cm und eine Höhe von 120 cm besitzt?



Antwort. $\frac{200\sqrt{3}}{9}$

Lösung. Bezeichne r den Radius und O den Mittelpunkt der Kugel. O.B.d.A. wähle einen der Kegel und bezeichne das Zentrum seiner Basis mit S, die Spitze mit V und den Tangentialpunkt mit der Kugel mit T. Sei $\mathcal{E}$ die Ebene der Basisflächen der Kegel und P die Orthogonalprojektion von O auf $\mathcal{E}$ und Z die Orthogonalprojektion von T auf $\mathcal{E}$. Der Punkt X liege auf der Strecke OP in der Höhe von T, d. h. TX ist parallel zu $\mathcal{E}$. Sei Y der Schnittpunkt der Geraden durch V und T mit $\mathcal{E}$.



Mit dem Satz des Pythagoras gilt sofort $\overline{VY} = 130$. Da die Kugel den Kegel in T berührt, berührt sie auch VT und VT ist orthogonal zu TO. Die Dreiecke $\triangle TXO$ und $\triangle VSY$ sind ähnlich, da sie in derselben Ebene liegen und die entsprechenden Seiten senkrecht aufeinander stehen, also die entsprechenden Winkel gleich sind. Also ist $\overline{OX} = \frac{5}{13}r$ und $\overline{TX} = \frac{12}{13}r$.

Der Abstand von T von $\mathcal{E}$ ist damit $\overline{TZ} = 120 - r - \frac{5}{13}r = 120 - \frac{18}{13}r$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle VSY$ und $\triangle TZY$ folgt $\overline{YZ} = (120 - \frac{18}{13}r) \cdot \frac{5}{12} = 50 - \frac{15}{26}r$ und damit $\overline{SZ} = \frac{15}{26}r$.

Andererseits ist $\overline{PZ} = \overline{TX} = \frac{12}{13}r$. Nun ist $\overline{SP}$ der Abstand einer Ecke vom Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks der Zentren der Kegel, das eine Seitenlänge von 100 hat. Deswegen muss $\overline{SP} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ und $\overline{SZ} = \frac{100\sqrt{3}}{3} - \frac{12}{13}r$ sein. Daraus ergibt sich für r die Gleichung $\frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{39}{26}r = \frac{3}{2}r$ und man erhält $r = \frac{200\sqrt{3}}{9}$.

Aufgabe 55J / 45S. Die Zeilen eines 7×7-Gitters werden mit $1, 2, \ldots, 7$ durchnummeriert und die Spalten mit $A, B, \ldots, G$.

Auf wie viele Arten kann man Spielsteine in acht Felder setzen, so dass für je zwei Spielsteine entweder der Abstand ihrer Zeilen oder ihrer Spalten mindestens drei ist?

Antwort. 51

Lösung. Will man neun Spielsteine setzen, so gibt es nur eine mögliche Lösung.

Da man nur acht Spielsteine verwenden soll, gibt es also mehr Möglichkeiten. Dazu bezeichnet man die Spalten mit A bis G und die Zeilen mit 1 bis 7.

Nun macht man eine Fallunterscheidung nach der Position des Spielsteines, der dem Zentrum am nächsten liegt.

	A	B	C	D	E	F	G
1	●			●			●
2							
3							
4	●			○			●
5							
6							
7	×	×	×	×	×	×	×

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2							
3				○			
4	●						●
5							
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2				○			
3							
4	●						●
5				×			
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●			○			●
2							
3							
4	●						●
5							
6							
7	●			●			●

Ist dieser direkt im Zentrum, also in $D4$, dann müssen alle anderen Spielsteine am Rand liegen. Aufgrund der gegebenen Abstoßungsbedingung werden sechs Steine regelmäßig eingesetzt und die letzten beiden haben Freiheiten in der letzten Reihe. Ist die letzte Reihe $A7 - G7$, in der zwei Spielsteine mit Abstand zu setzen sind, dann ergeben sich $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Möglichkeiten. Bei allen vier möglichen Rotationen werden wiederum vier Stellungen wiederholt (wenn acht Spielsteine auf dem Gitter liegen), so dass sich mit einem Spielstein genau in der Mitte $4 \cdot 10 - 4 = 36$ Möglichkeiten ergeben.

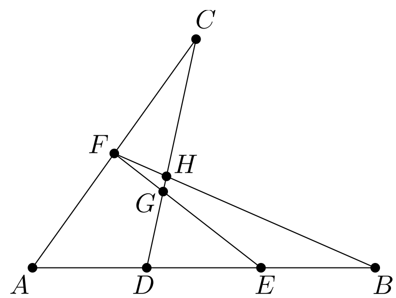
Hat der mittlere Spielstein Abstand 1 von der Mitte, so setzt man ihn zuerst auf $D3$ und zählt dann alle Rotationen. Da keine Spielsteine zwischen $B1$ und $F1$ sein können, müssen sechs auf $A1$, $A4$, $A7$, $G1$, $G4$ und $G7$ liegen und der letzte auf $D6$ oder $D7$. Also gibt es zwei Möglichkeiten für den letzten Stein und damit acht Möglichkeiten nach Rotation. Hat der mittlere Spielstein Abstand 2, dann legt man ihn zunächst auf $D2$. Es ergeben sich ähnliche Positionen wie vorher, der letzte Stein kann sich nun auf $D5$, $D6$ oder auf $D7$ befinden. Die Position $D5$ hat man vorher schon gezählt und $D6$ ist symmetrisch zu $D2$; bei der Rotation ergeben sich nur $4 + 2 = 6$ Möglichkeiten.

Mit Abstand 3 von der Mitte ergibt sich nur eine Möglichkeit alle Steine regelmäßig am Rand zu verteilen.

Zusammen sind das $36 + 8 + 6 + 1 = 51$ Möglichkeiten.

Aufgabe 56J / 46S. Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte A, B und C, wobei die Strecke AB durch die Punkte D und E in drei gleiche Teile geteilt wird. Außerdem sei F der Mittelpunkt der Strecke AC und die Strecken EF bzw. BF schneiden die Strecke CD in den Punkten G bzw. H.

Bestimme die Fläche $F_{\triangle FGH}$ des Dreiecks $\triangle FGH$, wenn $F_{\triangle DEG} = 18$ ist.



Antwort. $\frac{9}{5}$

Lösung. Die gegebene Figur erinnert an den Satz des Menelaos angewendet auf das Dreieck $\triangle ADC$ und die jeweils kollinearen Punkte F, G und E bzw. F, H und B. Also gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1 \\ \iff \quad & \frac{3}{-2} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{HC}} \cdot 1 = -1 \\ \iff \quad & 3 \cdot \overline{DH} = 2 \cdot \overline{HC} \end{aligned}$$

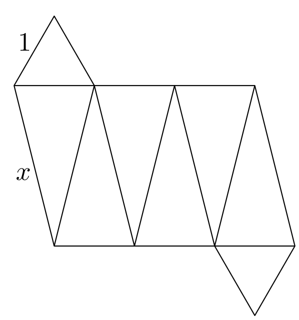
und

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1 \\ \iff \quad & \frac{2}{-1} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{GC}} \cdot 1 = -1 \\ \iff \quad & 2 \cdot \overline{DG} = \overline{GC} \end{aligned}$$

Also ist $\overline{DH} = \frac{2}{5} \cdot \overline{DC}$ und $\overline{DG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DC}$ und somit $\overline{GH} = \frac{1}{15} \cdot \overline{DC}$. Aufgrund des Strahlensatzes ist das Lot von F auf DC halb so lang wie das Lot von A auf DC, welches wegen $\overline{AD} = \overline{DE}$ genauso lang ist wie das Lot von E auf DC. Folglich ergibt sich $F_{\triangle FGH} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot F_{\triangle DEG} = \frac{9}{5}$.

Aufgabe 57J / 47S. Die Oberfläche eines Körpers besteht aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 und aus sechs gleichschenkligen Dreiecken mit Schenkellänge x und Basislänge 1 wie in der Abbildung.

Bestimme x, wenn das Volumen des Körpers 6 ist.



Antwort. $\frac{5\sqrt{39}}{3}$

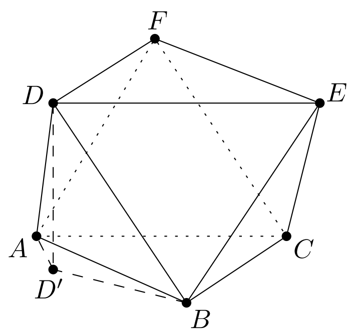
Lösung. Betrachte zuerst ein reguläres Oktaeder mit Seitenlänge 1. Zur Berechnung seines Volumens wird es in zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge 1 zerlegt. Die Dreieckseiten dieser Pyramiden haben eine Höhe von $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und die Pyramiden damit eine Höhe von $\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Das Volumen einer Pyramide beträgt daher $\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ und das Volumen des Oktaeders ist $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
Faltet man das gegebene Netz, so ergibt sich nichts anderes als ein reguläres Oktaeder, das entlang einer Achse senkrecht zu einer Seitenfläche um einen Faktor k gestreckt wird. Da die Streckung nur in einer Dimension erfolgt, vergrößert sich das Volumen auch um den Faktor k. Dieser Streckungsfaktor k ergibt sich einfach aus dem Verhältnis zwischen neuem und altem Volumen:

$$k = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

Bezeichnet man die Ecken der beiden in jedem Fall gleichseitigen Dreiecke des Oktaeders mit A, B, C und D, E, F, so entstehen durch die Projektion der Punkte D, E, F auf die Ebene, die durch A, B und C aufgespannt wird, die Punkte D', E' und F'. Dadurch erhält man das regelmäßige Sechseck $AD'BE'CF'$.
Aus $\overline{AB} = 1$ ergibt sich $\overline{AD'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und

$$\overline{AD} = \sqrt{h^2 + \overline{AD'}^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}},$$

wobei $h = \overline{DD'}$ der Abstand der gleichseitigen Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ ist.



Ist $\overline{AD} = 1$, wie beim regulären Oktaeder, so ist $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Die Höhe des gestreckten Oktaeders ist k-mal länger, also $h_k = \frac{18}{\sqrt{3}}$. Setzt man dies in obige Formel ein, so erhält man

$$\overline{AD} = \sqrt{h_k^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{325}{3}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{39}}{3}.$$