Zadanie 1J. Piotr ma sztabkę złota o rozmiarach $2 \times 3 \times 4$. Jako początkujący kowal stopił sztabkę i z płynnego złota stworzył trzy jednakowe sześciany. Jaka jest długość krawędzi sześcianów Piotra?

Wynik. 2

Rozwiązanie. Objętość oryginalnej sztabki wynosi $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Skoro wszystkie sześciany mają taką samą objętość, to jest ona równa $\frac{24}{3} = 8$. Objętość sześcianu jest trzecią potęgą długości jego krawędzi, więc jego krawędź musi mieć długość $\sqrt[3]{8} = 2$.

Zadanie 2J. W noworocznych obchodach uczestniczyły 43 osoby. Bar sprzedawał sok, piwo i szampana. Podczas nocy 25 osób piło piwo, 19 osób piło szampana, a 12 osób piło równocześnie piwo i szampana. Pozostali byli kierowcami, więc pili jedynie sok. Nikt nie mieszał soku z piwem lub szampanem. Ile osób piło tylko sok?

Wynik. 11

Rozwiązanie. Oznaczmy przez s, p i c liczbę osób, które piły odpowiednio tylko sok, tylko piwo i tylko szampana. Nikt nie pił równocześnie piwa i soku, więc osoby, które piły tylko piwo to ci, którzy pili piwo i nie pili szampana. Zatem $p = 25 - 12 = 13$, a także $c = 19 - 12 = 7$ z tego samego powodu. Co więcej, osoby, które piły tylko jeden napój, to wszyscy poza tymi, którzy pili równocześnie piwo i szampana, więc $s + p + c = 43 - 12 = 31$. Ostatecznie, $s = 31 - p - c = 31 - 13 - 7 = 11$.

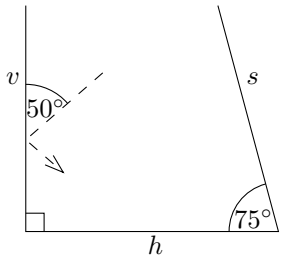
Zadanie 3J. Pijąc jedną szklankę czarnej herbaty zyskuje się kofeinę na 1 godzinę. Pijąc jedną szklankę kawy zyskuje się kofeinę na 4 godziny. W jakim stosunku należy wymieszać czarną herbatę i kawę, by uzyskać pełną szklankę zawierającą kofeinę na 2 godziny?

Wynik. 2:1

Rozwiązanie. Oznaczmy przez k ilość kofeiny na jedną godzinę. Wtedy szklanka czarnej herbaty zawiera k, kawy zawiera $4k$, a naszym celem jest uzyskanie $2k$ w jednej szklance. Możemy na to spojrzeć jak na wlewanie x szklanek herbaty i $1 - x$ szklanek kawy do jednego kubka. Potrzebujemy, żeby zachodziła równość $x \cdot 1k + (1 - x) \cdot 4k = 2k$, czyli $x + 4 - 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Szukany stosunek jest więc równy

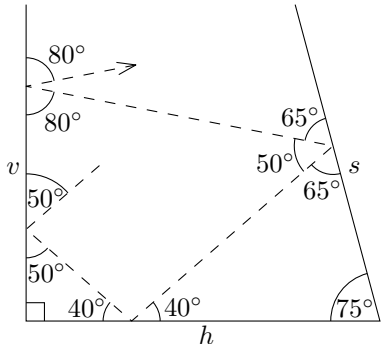
$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 : 1.$$

Zadanie 4J. Przedstawione na obrazku lustra v i h są do siebie prostopadłe. Kąt między lustrami h i s ma miarę 75 stopni. Promień światła padł na lustro v pod kątem 50 stopni. Następnie odbił się od luster h i s w tej kolejności. Pod jakim kątem padnie teraz na lustro v, jeśli kąt odbicia jest zawsze równy kątowi padania?



Wynik. 80

Rozwiązanie. Zaczniemy od narysowania trajektorii promienia i spróbujemy wyznaczyć jak najwięcej kątów. Pierwszy kąt odbicia ma miarę $50°$, ponieważ kąt padania jest równy kątowi odbicia. Jaki jest kąt padania na lustro h? Wiemy, że suma kątów w trójkącie wynosi $180°$, więc $x + 50° + 90° = 180°$, stąd $x = 40°$. Ponieważ kolejny kąt odbicia jest równy kątowi padania, to on także ma miarę $40°$. Jaki jest kąt padania na lustro s? Jak wcześniej, musi zachodzić $y + 40° + 75° = 180°$, a więc kąt padania (i także odbicia) na lustro s wynosi $y = 65°$. Pod jakim kątem padnie promień ponownie na lustro v? Rozważmy czworokąt stworzony przez te trzy lustra i odcinek promienia pomiędzy lustrami s i v. Suma kątów w tym czworokącie wynosi $360°$, co prowadzi do równania $z + 90° + 75° + (180° - 65°) = 360°$. Rozwiązując je, dostajemy że kąt padania na lustro v ma miarę $z = 80°$.



Zadanie 5J. W 2013 roku sklep sprzedał 235 międzygalaktycznych statków kosmicznych. W każdym miesiącu sprzedano 20, 16 lub 25 sztuk. Oblicz w ilu miesiącach sklep sprzedał dokładnie odpowiednio 20, 16 i 25 międzygalaktycznych statków kosmicznych.

Wynik. 4, 5, 3

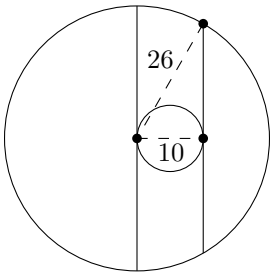
Rozwiązanie. Niech a, b i c oznaczają liczbę miesięcy kiedy sprzedano odpowiednio 20, 16 i 25 statków kosmicznych. Zatem $20a + 16b + 25c = 235$. Prawa strona tego równania jest podzielna przez 5, więc lewa także musi być. Oczywiście $20a + 25c$ jest wielokrotnością 5, więc musi nią też być $16b$. Skoro $5 \nmid 16$, to musi zachodzić $5 \mid b$. Są tylko trzy możliwości:

- $b = 0$. Wtedy $c = 12 - a$ i dostajemy $20a + 25(12 - a) = 235$, czyli $4a + 60 - 5a = 47$. Stąd $a = 13$, co nie jest możliwe, gdyż sumarycznie jest tylko 12 miesięcy.
- $b = 5$. Wtedy $a = 7 - c$ i podstawiając dostajemy $80 + 5c = 95$. Rozwiązaniem jest $a = 4$, $c = 3$.
- $b = 10$. Wtedy $a = 2 - c$ i $200 + 5c = 35$, co nie jest możliwe.

Zadanie 6J. Dwa okręgi mają promienie 5 i 26. Mniejszy z nich przechodzi przez środek większego. Rozważmy najdłuższą i najkrótszą cięciwę większego okregu spośród tych, które są styczne do mniejszego okręgu. Jaka jest ich różnica długości?

Wynik. 4

Rozwiązanie. Dłuższą cięciwą jest średnica dużego okręgu, więc jej długość wynosi 52. Krótszą jest ta, której odległość od środka okręgu jest największa. Odległość ta może być maksymalnie 10, ponieważ cięciwa musi być styczna do mniejszego okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa długość krótszej cięciwy wynosi $2 \cdot \sqrt{26^2 - 10^2} = 48$, więc szukana różnica długości jest równa $52 - 48 = 4$.

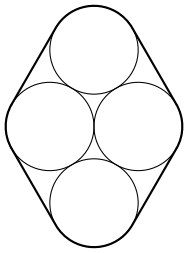


Zadanie 7J. Collin Farrel urodził się w poprzednim wieku w Sennej Kotlinie. Wiemy, że jego wiek w 1999 roku był taki sam jak suma cyfr roku jego urodzenia. W którym roku urodził się Collin Farrel?

Wynik. 1976

Rozwiązanie. Niech $10x + y$ będzie jego wiekiem w 1999. Ponieważ urodził się w XX wieku, suma cyfr roku jego urodzenia wynosi $1 + 9 + (9 - x) + (9 - y)$, zatem $28 - x - y = 10x + y$, czyli $28 = 11x + 2y$. Skoro $0 \leq x, y \leq 9$, to jedynym rozwiązaniem jest $x = 2$, $y = 3$, więc urodził się w $1999 - 23 = 1976$.

Zadanie 8J. Ciasna opaska jest naciągnięta na cztery koła o promieniu 1, które są parami styczne (oprócz górnego i dolnego), jak na diagramie poniżej. Jaka jest długość opaski?



Wynik. $8 + 2\pi$

Rozwiązanie. Opaskę możemy podzielić na dwa rodzaje części: *proste* i *zaokrąglone*. Sumaryczna długość zaokrąglonych części jest taka jak pełny obwód koła, czyli 2π. Długość prostego odcinka opaski pomiędzy dwoma kołami jest dokładnie taka, jak odległość między punktami styczności opaski i kół, która z kolei jest równa odległości pomiędzy środkami kół, czyli 2. Z symetrii opaski otrzymujemy, że jej pełna długość wynosi $4 \cdot 2 + 2\pi = 8 + 2\pi$.

Zadanie 9J. Nauczyciel pewnego sportu zawsze ustawia swoją klasę robaków zgodnie z liczbą nóg, które posiadają, od najmniejszej do największej. W ostatnich zawodach uczestniczyli robak Robcio oraz cztery inne robaki, które miały odpowiednio 6, 3, 10 i 9 nóg. Wiemy, że kiedy byli ustawieni w odpowiedniej kolejności, środkowy robak miał tyle samo nóg, ile wynosiła średnia liczba nóg całej piątki robaków. Wyznacz wszystkie możliwe liczby nóg Robcia.

Wynik. 2, 7, 17

Rozwiązanie. Niech m będzie liczbą nóg środkowego robaka, a x liczbą nóg Robcia. Mamy więc $m = \frac{6+3+10+9+x}{5} = 5 + \frac{3+x}{5}$. Środkowy robak musi mieć 6, 9 lub x nóg, więc możemy sprawdzić wszystkie możliwości. Przykładowo, jeśli środkowy ma x nóg, to otrzymujemy $x = m = 5 + \frac{3+x}{5} \Leftrightarrow 5x = 25+3+x \Leftrightarrow x = 7$. Podobnie rozważamy pozostałe przypadki.

Zadanie 10J. Dla niezerowych cyfr X i Y przez $\overline{XY}$ oznaczamy liczbę, której reprezentacja w systemie dziesiętnym to XY. Wiedząc, że niezerowe cyfry A, B, C spełniają równość $\overline{AA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{ABC}$, wyznacz $\overline{ABC}$.

Wynik. 198

Rozwiązanie. Porównując cyfry jedności otrzymujemy, że $A + B + C = C + f$, gdzie f jest równe 0, 10 lub 20. Skoro A, B sa niezerowymi cyframi, to możliwe jest tylko $A + B = 10$. Podobnie rozważając cyfrę dziesiątek dostajemy $A + B + C + 1 = B + 10$, gdzie 1 pochodzi z dodawania przy cyfrze jedności. Stąd $A + C = 9$. Na koniec przenosząc 1 do cyfry setek dostajemy $A = 1$, a więc $B = 9$ i $C = 8$.

Zadanie 11J / 1S. Słynny kolekcjoner ciał niebieskich Buggo z powodu kryzysu ekonomicznego zmuszony był do sprzedaży jednej trzeciej swojej kolekcji. Zaraz po tym oddał córce 3 planety układu słonecznego. Nieco później odsprzedał jedną trzecią swojej pozostałej kolekcji, a następnie przekazał żonie dwa księżyce Jowisza i dwa księżyce Saturna. Kiedy ponownie sprzedał jedną trzecią swoich pozostałych ciał niebieskich oraz Marsa z dwoma księżycami, w jego kolekcji pozostało tylko 9 planet systemu Alfa Centauri. Ile ciał niebieskich Buggo miał na początku?

Wynik. 54

Rozwiązanie. Niech x będzie początkową liczbą ciał niebieskich Buggo. Napiszmy wyrażenie opisujące ich liczbę na poszczególnych etapach:

$$x,\ \tfrac{2}{3}x,\ \tfrac{2}{3}x - 3,\ \ldots,\ \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{2}{3}x - 3\big) - 4\big) - 3 = 9.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$x = \tfrac{3}{2}\big(\tfrac{3}{2}\big(\tfrac{3}{2}(9 + 3) + 4\big) + 3\big) = 54.$$

Zadanie 12J / 2S. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą większą niż 2014, której nie można zapisać jako sumy dwóch palindromów.
Uwaga: Palindrom to liczba, która jest taka sama czytana od lewej do prawej i od prawej do lewej.

Wynik. 2019

Rozwiązanie. Jeśli liczbę większą niż 2014 da się zapisać jako sumę dwóch palindromów, to jeden z nich jest liczbą czterocyfrową. Takich palindromów nie jest wiele: $1001,\ 1111, \ldots, 1991,\ 2002$ (inne są za duże). Możemy zapisać liczby do 2018 następująco $2015 = 1551 + 464$, $2016 = 1441 + 575$, $2017 = 1331 + 686$ i $2018 = 1221 + 797$. Dlaczego nie możemy zapisać 2019 w taki sposób? Gdyby się dało, mielibyśmy $2019 = \overline{1AA1} + \overline{BCB}$, gdzie A, B i C są cyframi. Stąd $B = 8$ i $A + C = 1$ lub $A + C = 11$. Pierwszy przypadek implikuje, że $\overline{1AA1} + \overline{8C8} < 2000$, a drugi przypadek daje $A + 8 + 1 = 10$ (cyfra setek), więc $A = 1$ i $C = 10$ – sprzeczność. Zatem szukaną liczbą jest 2019.

Zadanie 13J / 3S. Vodka dał Ondrowi zagadkę numeryczną. Wybrał cyfrę X i powiedział „Myślę o trzycyfrowej liczbie podzielnej przez 11. Cyfrą setek jest X, a cyfrą dziesiątek 3. Znajdź cyfrę jedności." Ondro szybko zorientował się, że został oszukany i nie ma takiej liczby. Jaką cyfrę X wybrał Vodka?

Wynik. 4

Rozwiązanie. Rozważając dobrze znaną regułę podzielności przez 11, upraszczamy problem do wyznaczenia dla jakiej cyfry X nie istnieje taka cyfra Y (cyfra jedności), że $(X + Y) - 3$ jest podzielne przez 11. To z kolei sprowadza się do znalezienia X takiego, że zachodzi $0 < X + Y - 3 < 11$ dla każdej cyfry Y, co jest spełnione tylko dla $X = 4$.

Zadanie 14J / 4S. Cztery liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek $a < b < c < d$. Jeśli rozważymy wszystkie sześć możliwych par tych liczb i policzymy ich sumy, otrzymamy sześć różnych liczb, spośród których najmniejsze cztery to 1, 2, 3 i 4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby d.

Wynik. 3.5, 4

Rozwiązanie. Dwie najmniejsze sumy to $a+b$ i $a+c$, więc $a+b = 1$ i $a+c = 2$. Podobnie, dwie największe sumy to $c + d$ i $b + d$, mamy więc dwa przypadki:

- $a + d = 3$, $b + c = 4$: Wtedy mamy $2b = (a + b) - (a + c) + (b + c) = 1 - 2 + 4$, więc $b = 1.5$, co oznacza, że $a = -0.5$ i $d = 3.5$.
- $b + c = 3$, $a + d = 4$: Te same obliczenia dają nam $b = 1$, więc $a = 0$ i $d = 4$.

Zadanie 15J / 5S. Jack ma dwa razy więcej lat niż Jill miała, gdy Jack był w obecnym wieku Jill. Kiedy Jill będzie w obecnym wieku Jacka, będą mieć w sumie 90 lat. Ile lat ma Jack?

Wynik. 40

Rozwiązanie. Niech x oznacza wiek Jacka, a y wiek Jill. Pierwszy warunek oznacza $x = 2(y - (x - y))$, więc $3x = 4y$. Drugi warunek oznacza $((x - y) + y) + ((x - y) + x) = 90$, co implikuje $3x - y = 90$. Zatem $x = 40$ i $y = 30$.

Zadanie 16J / 6S. Liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli $a_1 = 10$ oraz $a_{a_2} = 100$, to jaką wartość ma $a_{a_{a_3}}$?

Wynik. 820

Rozwiązanie. Wiemy, że k-ty wyraz ciągu arytmetycznego można zapisać jako $a_k = a_1 + (k - 1)d = 10 + (k - 1)d$. Stąd $a_2 = 10 + d$, więc

$$= a_{a_2} = a_{10+d} = 10 + (9 + d)d = 10 + 9d + d^2.$$

Z założenia mamy $a_{a_2} = 100$, stąd $100 = 10 + 9d + d^2$. Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania kwadratowego jest $d = 6$. Czyli $a_k = 4 + 6k$ i pozostały nam już tylko obliczenia: $a_3 = 4 + 18 = 22$, $a_{a_3} = a_{22} = 4 + 132 = 136$ i ostatecznie $a_{a_{a_3}} = a_{136} = 4 + 816 = 820$.

Zadanie 17J / 7S. Ulubiona liczba Natalii posiada wszystkie poniższe własności:

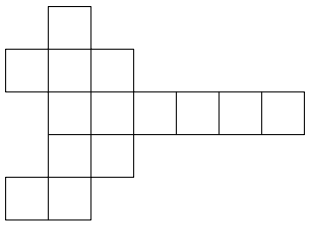
- ma 8 różnych cyfr;
- jej cyfry czytane od lewej do prawej występują w kolejności malejącej;
- jest podzielna przez 180.

Jaka jest ulubiona liczba Natalii?

Wynik. 97654320

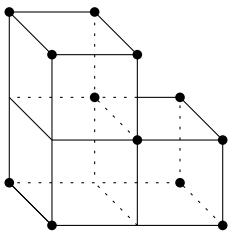
Rozwiązanie. Liczba Natalii jest podzielna przez 20, więc cyfrą jedności jest 0, a cyfra dziesiątek jest parzysta. Jednak nie może to być 4, 6 ani 8, ponieważ wówczas nie wystarczy nam cyfr do stworzenia liczby ośmiocyfrowej (z uwagi na drugi warunek), więc cyfrą dziesiątek jest 2. Następnie rozstrzygamy, której z cyfr $3, 4, \ldots, 9$ musi brakować, by zapewnić podzielność przez 9. Ponieważ $0 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 = 44$, musimy pominąć cyfrę 8. Ostatecznie, korzystając z drugiego warunku, wnioskujemy, że ulubiona liczba Natalii to 97654320.

Zadanie 18J / 8S. Kika lubi budować modele trójwymiarowych brył z papieru w kratkę. Ostatnim razem wycięła kształt przedstawiony na obrazku poniżej. Następnie skleiła go w taki sposób, że żadne dwa kwadraty się nie pokrywały, utworzona bryła nie miała dziur oraz miała niezerową objętość. Ile wierzchołków miała bryła, którą złożyła Kika?
Uwaga: Za wierzchołki uznajemy wierzchołki otrzymanej bryły, a nie punkty kratowe papieru.



Wynik. 12

Rozwiązanie. Widzimy, że jeśli spojrzymy na otrzymaną bryłę z przodu, zobaczymy tyle samo kwadratów, co gdybyśmy patrzyli z tyłu. Podobnie z góry i dołu oraz lewej i prawej. Niech a, b, c oznaczają liczby kwadratów widocznych z góry, z prawej i z przodu. Wówczas musi zachodzić równość $2(a + b + c) = 14$, gdyż bryła jest za mała by miała niewidoczne kwadraty. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \leq b \leq c$. Wtedy mamy 4 możliwości (a, b, c): $(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$ oraz $(2, 2, 3)$. Nierówność $c \leq ab$ eliminuje dwie możliwości i pozostają tylko dwie: prostopadłościan $1 \times 3 \times 3$ oraz kształt litery L. Nie może to być prostopadłościan, więc jedyną możliwością jest kształt litery L, który ma 12 wierzchołków.

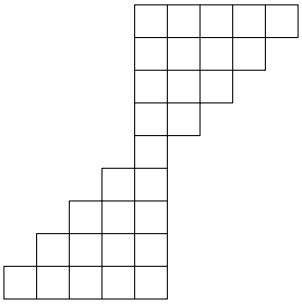


Zadanie 19J / 9S. Wyznacz wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, że $ab = \mathrm{NWD}(a, b) + \mathrm{NWW}(a, b)$, gdzie $\mathrm{NWD}(a, b)$ to największy wspólny dzielnik liczb a i b, a $\mathrm{NWW}(a, b)$ to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b.

Wynik. (2, 2)

Rozwiązanie. Niech $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Rozważając dzielniki pierwsze a i b, otrzymujemy (ogólną) zależność $\mathrm{NWW}(a, b) = ab/d$, więc $ab = d + ab/d$, czyli $(d - 1)ab = d^2$. Ponieważ $a, b \geq d$ i $d > 0$, otrzymujemy $a = b = d$ i $d - 1 = 1$, zatem $(a, b) = (2, 2)$.

Zadanie 20J / 10S. Żaba porusza się po przedstawionym poniżej diagramie składającym się 29 kwadratów jednostkowych. W każdym kroku skacze albo do kwadratu przylegającego powyżej (jeśli taki istnieje), albo do kwadratu znajdującego się bezpośrednio powyżej i po prawej od jej obecnej pozycji (jeśli taki istnieje). Żaba zaczyna w jednym z pięciu kwadratów w dolnym rzędzie i skacze dopóki nie dojdzie do górnego rzędu. Ile różnych ścieżek od dolnego do górnego rzędu może obrać żaba?



Wynik. 256

Rozwiązanie. Dla każdego kwadratu jednostkowego znajdujemy liczbę możliwych dróg dotarcia do niego. W dolnym rzędzie do każdego kwadratu mamy tylko jedną drogę. W drugim rzędzie dla każdego kwadratu mamy dwie drogi – z dołu lub po skosie. Podobnie są 4 możliwości dla kwadratów z trzeciego rzędu, 8 dla kolejnego i 16 możliwości dla kwadratu w środkowym rzędzie. Teraz możemy wykorzystać symetrię diagramu – jest tyle samo dróg dotarcia z dołu do środka, co z góry do środka. Dlatego odpowiedź to $16 \cdot 16 = 256$.

Zadanie 21J / 11S. Palo chodzi wzdłuż przekątnych ośmiokąta foremnego. Jego spacer zaczyna się w wierzchołku ośmiokąta i prowadzi przez wszystkie przekątne tak, że po każdej z nich przechodzi dokładnie raz. Ile różnych takich spacerów może zrobić Palo?

Wynik. 0

Rozwiązanie. Gdy Palo wejdzie do wierzchołka innego niż pierwszy i ostatni, musi z niego wyjść nieużywaną wcześniej przekątną. Liczba przekątnych wychodzących z każdego wierzchołka jest nieparzysta (wynosi 5), dlatego Palo nie może przejść po wszystkich przekątnych wychodzących z pewnego wierzchołka. Zatem nie ma żadnego takiego spaceru.

Zadanie 22J / 12S. Krata G składająca się z 2014×2014 pól jednostkowych ma lewy dolny róg położony w punkcie o współrzędnych $(0, 0)$, a prawy górny róg w $(2014, 2014)$. Prosta p przechodzi przez punkty o współrzędnych $(0, 0)$ i $(2014, 2019)$. Ile pól jednostkowych G przecina prosta p?
Uwaga: Prosta *przecina* pole jeśli ma co najmniej dwa punkty wspólne z nim. Na przykład przekątna kraty G przecina 2014 pól jednostkowych.

Wynik. 4023

Rozwiązanie. Skoro prosta p przechodzi przez punkty $(0, 0)$ i $(2014, 2019)$, to również przechodzi przez każdy punkt (x, y), dla którego $x/y = 2014/2019$. Liczby 2014 i 2019 są względnie pierwsze, więc p nie przechodzi przez żaden wierzchołek pola jednostkowego pomiędzy $(0, 0)$ a $(2014, 2019)$. Innymi słowy, kiedykolwiek p przecina pewną linię kraty, to wchodzi do wnętrza nowego pola jednostkowego. Prosta p opuszcza kratę G w punkcie $(2014^2/2019, 2014)$. Do tego czasu przecina 2013 poziomych linii kraty i $\lfloor 2014^2/2019 \rfloor = 2009$ pionowych linii kraty. Zatem przejdzie przez pole jednostkowe w lewym dolnym rogu, a następnie przez $2013 + 2009$ innych pól jednostkowych. Sumarycznie daje to $1+2013+2009 = 4023$ pola jednostkowe.

Zadanie 23J / 13S. Wypukły n-kąt ma jeden kąt o pewnej mierze, a wszystkie pozostałe $n - 1$ kątów ma miarę 150 stopni. Jakie są możliwe wartości liczby n? Wypisz wszystkie możliwości.

Wynik. 8, 9, 10, 11, 12

Rozwiązanie. Każdy n-kąt może być pocięty na $n-2$ trójkąty, więc suma jego kątów wewnętrznych wynosi $(n - 2)180$ stopni. Mamy więc $(n - 2)180^\circ = 150^\circ(n - 1) + x$, czyli $n = x/30^\circ + 7$, gdzie $0^\circ < x < 180^\circ$ jest pewnym kątem wypukłym. Zatem $8 \leq n \leq 12$.

Zadanie 24J / 14S. Jeśli boki a, b, c trójkąta spełniają równość

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c},$$

to jaki jest kąt pomiędzy bokami b i c?

Wynik. $60°$

Rozwiązanie. Po wymnożeniu przez mianowniki uzyskujemy

$$3(a^2 + ab + ac + bc) = 2a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + ac) + 2bc,$$

czyli $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Z twierdzenia cosinusów mamy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. Stąd $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, więc $\alpha = 60°$.

Zadanie 25J / 15S. Wyznacz wszystkie liczby całkowite między 1 a 200, których różne dzielniki pierwsze sumują się do 16. Przykładowo, suma różnych dzielników pierwszych liczby 12 to $2 + 3 = 5$.

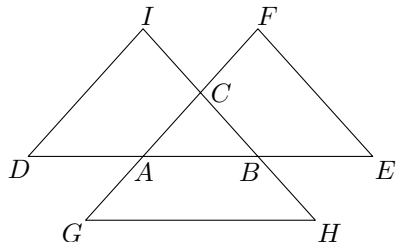
Wynik. 66, 132, 198, 55, 39, 117

Rozwiązanie. Liczba 16 może być zapisana jako suma różnych liczb pierwszych na następujące sposoby:

$$16 = 2 + 3 + 11 = 3 + 13 = 5 + 11.$$

Pierwszy podział odpowiada liczbom postaci $2^a 3^b 11^c$, gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi; tylko $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$ oraz $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$ są mniejsze lub równe 200. Drugi podział daje nam $3 \cdot 13 = 39$, $3^2 \cdot 13 = 117$, a z ostatniego uzyskujemy $5 \cdot 11 = 55$.

Zadanie 26J / 16S. Długości boków na diagramie spełniają równości $DA = AB = BE$, $GA = AC = CF$ i $IC = CB = BH$. Co więcej, $EF = DI = 5$ i $GH = 6$. Jakie jest pole trójkąta ABC?



Wynik. 3

Rozwiązanie. Odcinek AC łączy środki DB i BI. Zatem jego długość musi wynosić $AC = DI/2 = 2.5$. Podobnie $CB = EF/2 = 2.5$ oraz $AB = GH/2 = 3$. Trójkąt ABC jest ostrokątny i jego pole może więc być policzone z twierdzenia Pitagorasa

$$\sqrt{AC^2 - (AB/2)^2} \cdot AB/2 = \sqrt{6.25 - 2.25} \cdot 1.5 = 3.$$

Zadanie 27J / 17S. Liczbę pierwszą p nazwiemy *mocną* jeśli jeden z poniższych warunków jest spełniony:

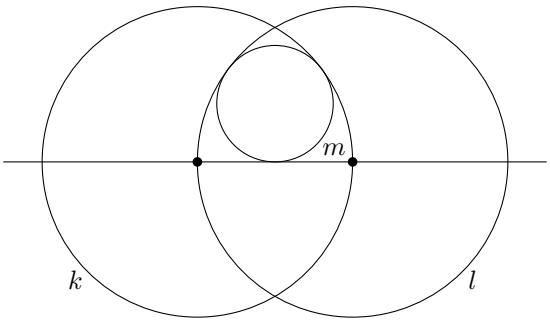
- p jest jednocyfrowa; lub
- usuwając pierwszą cyfrę p uzyskujemy mocną liczbę pierwszą oraz usuwając ostatnią cyfrę p uzyskujemy mocną liczbę pierwszą.

Przykładowo, 37 jest mocną liczbą pierwszą, gdyż usuwając jej pierwszą cyfrę otrzymujemy 7, usuwając ostatnią cyfrę dostajemy 3, a obie liczby 3 i 7 są mocnymi liczbami pierwszymi. Znajdź wszystkie mocne liczby pierwsze.

Wynik. 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373

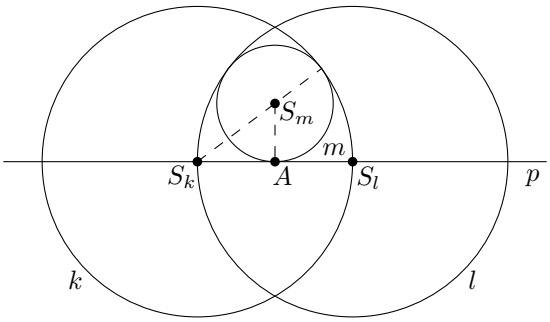
Rozwiązanie. Jednocyfrowe mocne liczby pierwsze (1MLP) to 2, 3, 5 i 7.
Dwucyfrowe mocne liczby pierwsze (2MLP) można uzyskać przez połączenie dwóch 1MLP w liczbę pierwszą. Jest 16 takich możliwości. Po odrzuceniu liczb parzystych, podzielnych przez 5 lub 11 oraz liczb 27 i 57 pozostają nam 23, 37, 53 i 73. Wyznaczmy teraz trzycyfrowe mocne liczby pierwsze (3MLP). Usuwając pierwszą lub ostatnią cyfrę otrzymujemy 2MLP. Czyli musimy mieć dwie 2MLP takie, że druga cyfra pierwszej jest równa pierwszej cyfrze drugiej z nich. Jedyne możliwości to 237, 537, 737 i 373. Spośród nich tylko 373 jest liczbą pierwszą. Czterocyfrowych mocnych liczb pierwszych (4MLP) nie ma, ponieważ po usunięciu pierwszej i ostatniej cyfry musielibyśmy uzyskać 3MLP, czyli 373, co jest niemożliwe. Zatem nie mogą istnieć także mocne liczby pierwsze mające więcej niż 4 cyfry. Ostatecznie, jedynymi mocnymi liczbami pierwszymi są 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 i 373.

Zadanie 28J / 18S. Niech k i l będą dwoma okręgami o promieniu 16 takimi, że każdy z nich przechodzi przez środek drugiego, a p prostą łączącą środki tych okręgów. Okrąg m jest wewnętrznie styczny do okregów k i l oraz do prostej p. Wyznacz długość promienia okręgu m.



Wynik. 6

Rozwiązanie. Niech S_k, S_l i S_m będą środkami odpowiednio okręgów k, l i m, a r promieniem okręgu m. Wiemy, że S_k, S_m i punkt styczności m i k leżą na jednej prostej, więc $S_kS_m = 16 - r$. Niech A będzie punktem styczności m i p. Z symetrii mamy $S_kA = S_lA = \frac{16}{2} = 8$. Oczywiście $S_mA = r$ i prosta S_mA jest prostopadła do p, więc z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $\triangle S_kAS_m$ otrzymujemy $8^2 + r^2 = (16 - r)^2$, co oznacza, że $r = 6$.

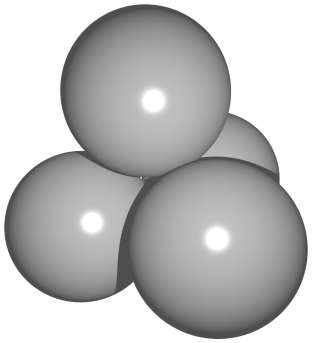


Zadanie 29J / 19S. Ile jest sześciocyfrowych liczb całkowitych dodatnich, w których każda cyfra występuje tyle razy, jaka jest wartość tej cyfry? Przykładem takiej liczby jest 133232.

Wynik. 82

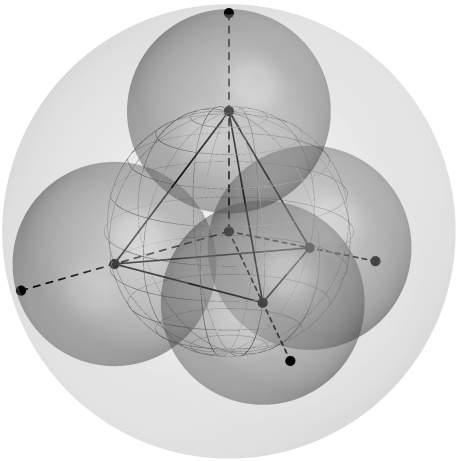
Rozwiązanie. Najpierw zauważmy, że suma różnych cyfr tej liczby musi wynosić 6. Widzimy, że 0 nie może w niej wystąpić, więc jedyne możliwości to $6 = 6$; $1 + 5 = 6$; $1 + 2 + 3 = 6$ i $2 + 4$. Przeanalizujmy je po kolei. Dla cyfry $\{6\}$ jedyną liczbą jest 666666. Dla cyfr $\{1, 5\}$ mamy 6 możliwości (dla każdej pozycji cyfry 1). Dla cyfr $\{2, 4\}$ mamy $\binom{6}{2} = 15$ możliwości, ponieważ wybieramy dwie pozycje dla cyfry 3. Na koniec, dla cyfr $\{1, 2, 3\}$ mamy $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ możliwości, bo najpierw wybieramy pozycję dla 1, a potem dwie pozycje dla 2 z pozostałych pięciu. Sumarycznie mamy $1 + 6 + 15 + 60 = 82$ różnych liczb.

Zadanie 30J / 20S. By potwierdzić swoją reputację fajnego człowieka, E.T. skleił ze sobą cztery kule o promieniu 1 tak, że były parami styczne. Jaki jest promień najmniejszej sfery, która zawiera wszystkie cztery kule E.T.?



Wynik. $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Rozwiązanie. Kiedy zmniejszymy promień szukanej sfery o 1, otrzymamy sferę C opisaną na czworościanie foremnym T utworzonym przez środki zadanych kul. Zauważmy, że krawędzie T są długości 2. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że wysokości ścian T mają długość $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość wysokości T uzyskując $\sqrt{4 - (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$. Wiadomo (lub możemy po raz trzeci użyć twierdzenia Pitagorasa), że środek C leży w jednej czwartej wysokości, co oznacza, że promień C ma długość $\frac{\sqrt{6}}{2}$, a szukany promień to $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Zadanie 31J / 21S. Wyznacz liczbę par liczb całkowitych dodatnich (x, y) spełniających $y < x \leq 100$ takich, że liczby $x^2 - y^2$ i $x^3 - y^3$ są względnie pierwsze.

Wynik. 99

Rozwiązanie. Użyjmy wzorów $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ i $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. By uzyskać liczby względnie pierwsze musimy mieć $x - y = 1$, więc $y = x - 1$. Podstawiając za y, szukamy takiego x, że $\mathrm{NWD}(2x-1, 3x^2-3x+1) = 1$. Po odjęciu $(x-1)(2x-1)$ od drugiej liczby dostajemy $\mathrm{NWD}(2x-1, x^2) = 1$. Przypuśćmy, że istnieje liczba pierwsza p, która dzieli $2x-1$ i x^2. Wtedy $p \mid x$ i $p \mid 2x-1$, więc $p \mid 1$. Czyli nie istnieje taka liczba p, a więc $\mathrm{NWD}(2x-1, 3x^2-3x+1) = 1$ dla każdego $x \geq 1$. Zatem, $y = x-1$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym. Szukane pary to $(2,1), (3,2), \ldots, (100,99)$ i jest ich 99.

Zadanie 32J / 22S. Rozważmy liczbę zaczynającą się od 122333444455555... i kontynuowaną w taki sposób, że każdą liczbę naturalną wypisujemy tyle razy ile wynosi jej wartość. Zatrzymujemy się po napisaniu 2014 cyfr. Jaka jest ostatnia cyfra tej liczby?

Wynik. 4

Rozwiązanie. Liczby jednocyfrowe zajmują dokładnie $1+2+\ldots+9=45$ pozycji. Dwucyfrowe zajęłyby $2(10+11+\ldots+99)=2(\frac{99\cdot 100}{2}-\frac{9\cdot 10}{2})=9900-90=9810$. Zatem osiągniemy 2014 cyfr pisząc liczby dwucyfrowe. Zauważmy, że szukamy cyfry na pozycji parzystej, więc musimy znać tylko cyfrę dziesiątek liczby zajmującej 2014-tą pozycję. Ostatnia cyfra jaką napiszemy to cyfra dziesiątek najmniejszego n takiego, że $45+2(10+11+\ldots+n)>2014$. Widzimy, że $40<n<50$, zatem ostatnią cyfrą jest 4.

Zadanie 33J / 23S. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia N, dla której równanie $(x^2-1)(y^2-1)=N$ ma co najmniej 2 różne rozwiązania takie, że $0<x\leq y$ oraz x i y są liczbami całkowitymi?

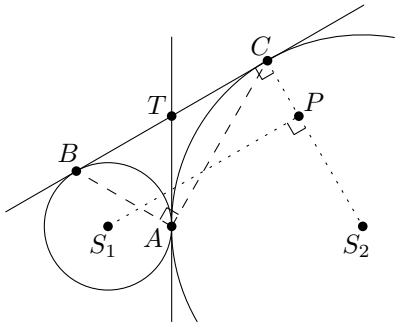
Wynik. 360

Rozwiązanie. Wypiszmy jakie wartości może przyjąć (t^2-1) – są to 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, itd. Chcemy znaleźć dwie pary z takim samym iloczynem tak, by był on jak najmniejszy. Zauważmy, że $3\cdot 120=15\cdot 24$. Widać, że jest to najmniejszy iloczyn z 3 w jednej z par. Iloczyny bez czynnika równego 3 mniejsze niż 360 to $8\cdot 8$, $8\cdot 15$, $8\cdot 24$, $8\cdot 35$ i $15\cdot 15$, ale żadne z nich nie są równe. Zatem szukaną liczbą N jest 360.

Zadanie 34J / 24S. Dwa okręgi o promieniach 1 i 3 są styczne w punkcie A. Ich wspólna styczna (nieprzechodząca przez A) jest styczna do nich w punktach B i C. Wyznacz wartość wyrażenia $AB^2+BC^2+AC^2$.

Wynik. 24

Rozwiązanie. Niech S_1 będzie środkiem mniejszego okręgu, S_2 środkiem większego, a T punktem gdzie prosta BC przecina wspólną styczną przechodzącą przez A. Zauważmy, że $TC=TA=TB$, co oznacza, że trójkąt ABC jest prostokątny, a stąd $AB^2+AC^2=BC^2$. Przesuńmy teraz odcinek BC tak, że B przejdzie na S_1 i oznaczmy przez P miejsce gdzie przejdzie punkt C. Zauważmy, że $CP=S_1B=1$, a twierdzenie Pitagorasa daje nam $BC^2=S_1P^2=(S_1A+S_2A)^2-(S_2C-CP)^2=12$, czyli odpowiedzią jest 24.



Zadanie 35J / 25S. Znajdź największą taką liczbę pierwszą p, że $p^p \mid 2014!$.

Wynik. 43

Rozwiązanie. Niech q będzie liczbą pierwszą. Czynniki $2014!$ podzielne przez q to $q, 2q, \ldots, \lfloor 2014/q\rfloor q$. Oznaczając $m=\lfloor 2014/q\rfloor$, mamy $q^m \mid 2014!$. Jeśli $q>m$ to $q^2>2014$, więc $q^{m+1}\nmid 2014!$, czyli również $q^q\nmid 2014!$. Jeśli $q\leq m$, to $q^q\mid 2014!$. Zatem szukamy największej liczby pierwszej p takiej, że $p\leq\lfloor 2014/p\rfloor$, czyli $p^2\leq 2014$, co oznacza, że $p=43$.

Zadanie 36J / 26S. Rozważmy tabelę składającą się z 2 kolumn i 2014 wierszy. Iloma sposobami można tę tabelę pomalować 3 kolorami tak, aby żadne dwie komórki o wspólnej krawędzi nie miały tego samego koloru?

Wynik. $6\cdot 3^{2013}$

Rozwiązanie. Najpierw pokolorujmy dolny wiersz w dowolny sposób. Możemy to zrobić na $3\cdot 2=6$ możliwości. Zauważmy teraz, że jeśli pewien wiersz ma kolory (a,b), to najbliższy wyższy wiersz musi mieć (b,a), (b,c) lub (c,a), niezależnie od kolorów niższych wierszy. Zatem w pierwszym wierszu mamy 6 możliwych pokolorowań, a na każdym kolejnym 3, niezależnie od wcześniejszych wierszy. Sumarycznie mamy więc $6\cdot 3^{2013}$ różnych sposobów kolorowania.

Zadanie 37J / 27S. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią m, dla której $5m$ jest piątą potęgą liczby całkowitej, $6m$ jest szóstą potęgą liczby całkowitej, a $7m$ jest siódmą potęgą liczby całkowitej.

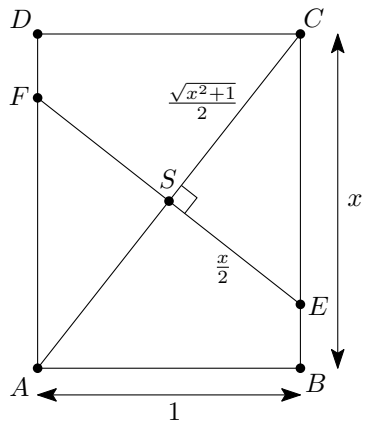
Wynik. $5^{84}6^{35}7^{90}$

Rozwiązanie. Zapiszmy m w postaci $m = 5^a6^b7^cd$, gdzie d nie jest podzielna przez 5, 6 ani 7. Skoro $5m$ jest piątą potęgą, to 5 dzieli $a+1$, b i c. Analogicznie $6|a, b+1, c$ oraz $7|a, b, c+1$. Równocześnie d musi być 5., 6. i 7. potęgą, a skoro szukamy najmniejszej takiej liczby m, to $d = 1$. Liczba a jest podzielna przez 42, a $a+1$ przez 5, więc najmniejszą taką a jest 84. Analogicznie znajdujemy $b = 35$ i $c = 90$. Ostatecznie, szukaną liczbą jest $5^{84}6^{35}7^{90}$.

Zadanie 38J / 28S. Składamy prostokątną kartkę papieru w taki sposób, żeby dwa przeciwległe rogi (po przekątnej) pokryły się, tworząc w ten sposób *zgięcie*, czyli odcinek widoczny na papierze. Okazuje się, że długość tego zgięcia jest taka sama jak długość dłuższego boku prostokąta. Jaki jest stosunek długości dłuższego boku do krótszego boku prostokąta?

Wynik. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Rozwiązanie. Oznaczmy istotne punkty jak na obrazku. Prostokąty podobne dadzą nam taki sam wynik, więc możemy założyć, że $AB = 1$. Zadanie polega teraz na znalezieniu $x = BC$. Najpierw zauważmy, że $EF \perp AC$, ponieważ EF jest osią symetrii AC. Z symetrii dostajemy też $ES = FS = \frac{x}{2}$, a z twierdzenia Pitagorasa $CS = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. Trójkąty ABC oraz ESC są podobne, więc $\frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. To oznacza, że $x^4 - x^2 - 1 = 0$, skąd po podstawieniu $z = x^2$ znajdujemy jedyne dodatnie rozwiązanie $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.



Zadanie 39J / 29S. Mamy 20 kolorowych kuleczek, z których każda jest żółta, niebieska, zielona bądź czerwona. Zakładając, że dwie kuleczki tego samego koloru są nierozróżnialne, ile najwięcej może być niebieskich, jeśli wiadomo, że możemy ułożyć wszystkie kuleczki wzdłuż prostej na dokładnie 1140 różnych sposobów?

Wynik. 17

Rozwiązanie. Niech b, y, g i r oznaczają odpowiednio liczbę niebieskich, żółtych, zielonych i czerwonych kuleczek. Jest $\binom{20}{r}$ różnych sposobów rozmieszczenia czerwonych kulek. Pozostaje $20-r$ pozycji na zielone kulki, więc jest $\binom{20-r}{g}$ różnych sposobów rozmieszczenia ich po ustawieniu czerwonych. Podobnie żółte kulki mogą zostać rozmieszczone na $\binom{20-r-g}{y}$ różnych sposobów po ustawieniu czerwonych i zielonych. Pozostałe niebieskie kulki wypełniają wolne miejsca. Szukamy więc najmniejszego $y+g+r$ takiego, że

$$\binom{20}{r}\binom{20-r}{g}\binom{20-r-g}{y} = 1140.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$1140 = \frac{20(20-1)\cdots(b+1)}{r!g!y!}.$$

Jeśli $b \geq 18$, to licznik jest równy co najwyżej $20 \cdot 19 = 380$, więc liczba sposobów jest mniejsza niż 1140. Dla $b = 17$ liczba 1140 może być osiągnieta biorąc $y = 3$, $g = 0$, $r = 0$.

Zadanie 40J / 30S. Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geq 3$ takie, że n-kąt foremny może być podzielony na (co najmniej dwa) wielokąty foremne.

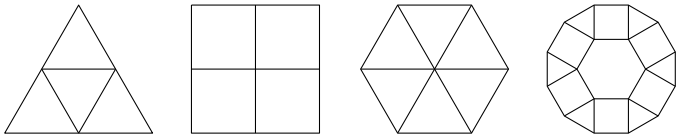
Wynik. 3, 4, 6, 12

Rozwiązanie. Najpierw zauważmy, że trójkąt równoboczny może być podzielony na 4 mniejsze trójkąty równoboczne, kwadrat można podzielić na cztery mniejsze kwadraty, a sześciokąt foremny można podzielić na 6 mniejszych trójkątów równobocznych.

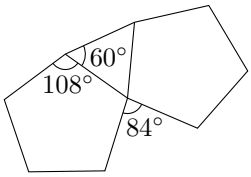
Rozważmy n-kąt foremny dla $n \neq 3, 4, 6$. Miary kątów wewnętrznych wielokątów foremnych dla 3, 4, 5 i 6 wierzchołków wynoszą odpowiednio $60°$, $90°$, $108°$ oraz $120°$. Musimy nimi „wypełnić" kąt wewnętrzny n-kąta używając mniejszego n-kąta lub dwóch wielokątów o co najwyżej pięciu wierzchołkach. Jednakże pierwsza opcja pozostawia kąt ostry inny niż $60°$, co nie może być wypełnione.

Zatem, kąty wewnętrzne n-kąta muszą być wypełnione albo trójkątem i kwadratem albo trójkątem i pięciokątem. Odpowiadające im kąty wewnętrzne to $150°$ oraz $168°$, czyli n jest równe 12 lub 30.

Jest możliwe podzielenie dwunastokąta foremnego: Naprzemiennie umieszczamy kwadraty i trójkąty równoboczne na bokach wielokąta i sześciokąt foremny w środku.



Podzielenie 30-kąta nie jest możliwe. W podziale musiałby być pięciokąt na co drugim boku. Dwa takie pięciokąty stykałyby się w wierzchołku z jednym kątem równym $60°$, więc pozostały kąt miałby miarę $84°$, co nie może być wypełnione.



Zadanie 41J / 31S. Na szachownicy 5×5 w lewym dolnym rogu stoi wieża. W każdym ruchu może się poruszać tylko w prawo albo tylko w górę o dowolną (niezerową) liczbę pól. Iloma sposobami wieża może dojść do prawego górnego rogu? Dwie drogi uważamy za różne, jeśli ciągi pól, w których zatrzymuje się wieża są różne.

Wynik. 838

Rozwiązanie. Dla każdego pola obliczamy liczbę dróg dojścia do niego. Jest tylko jeden sposób dojścia do lewego dolnego rogu (pusty ciąg ruchów). Dla każdego innego pola S stosujemy następujące rozumowanie. Rozważamy ciąg ruchów prowadzących do S i wykluczamy ostatni ruch. Przed nim wieża musiała być w polu T poniżej lub po lewej od pola S. Z drugiej strony, kiedykolwiek wieża dochodzi do pola T poniżej lub po lewej od S, to dodając jeden ruch dostajemy drogę do S. Zatem, znając liczbę dróg dojścia do wszystkich takich pól T, wystarczy je zsumować by dostać liczbę dróg dojścia do S.
Przeprowadzamy więc następującą procedurę: Najpierw piszemy 1 w lewym dolnym rogu szachownicy, a następnie wielokrotnie stosujemy zasadę „Znajdź pole, którego wszystkie pola na dole i po lewej są wypełnione i wpisz w nim sumę tych wartości." Szukana liczba znajdzie się w prawym górnym rogu.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Zadanie 42J / 32S. Jaka jest cyfra setek liczby 11^{2014}?

Wynik. 2

Rozwiązanie. Z dwumianu Newtona

$$11^{2014} = (1+10)^{2014} = \binom{2014}{0} \cdot 1 + \binom{2014}{1} \cdot 10 + \binom{2014}{2} \cdot 100 + 1000 \cdot \sum_{k=3}^{2014} \binom{2014}{k} \cdot 10^{k-3}.$$

Musimy policzyć to wyrażenie modulo 1000 i wziąć pierwszą cyfrę. Mamy zatem

$$11^{2014} \equiv 1 + 2014 \cdot 10 + 1007 \cdot 2013 \cdot 100 \equiv 1 + 140 + 7 \cdot 3 \cdot 100 \equiv 241, \pmod{1000}$$

czyli szukaną cyfrą setek jest 2.

Zadanie 43J / 33S. Konik polny skacze po wierzchołkach trójkąta równobocznego. W każdym ruchu, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem, wybiera jeden z pozostałych dwóch wierzchołków i skacze do niego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dziesiątym skoku konik polny wróci do wierzchołka, w którym zaczął?

Wynik. $\frac{171}{512}$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez A wierzchołek początkowy, a przez a_i prawdopodobieństwo, że konik polny będzie w wierzchołku A po i skokach (więc $a_0 = 1$). Wyznaczmy wzór rekurencyjny na a_{i+1} znając a_i: Jeśli skok $i+1$ zakończył się w A, to poprzedni nie i konik polny musiał wybrać „poprawny" wierzchołek spośród dwóch możliwości, więc

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}(1 - a_i)$$

lub równoważnie

$$a_{i+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_i - \frac{1}{3}\right).$$

Skoro $a_0 = 1/3 + 2/3$, dostajemy

$$a_i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i,$$

a zatem

$$a_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 512} = \frac{171}{512}.$$

Zadanie 44J / 34S. Kiedy Parsley zaczyna rąbać drzewa ma 100 energii. W każdej minucie może wybrać pomiędzy dwiema możliwościami:

- Wyrąbać n drzew, gdzie n to jego aktualna energia. To go męczy, przez co jego energia spada o 1.
- Odpocząć i zyskać 1 energii. Tak może zrobić dowolnie wiele razy.

Jaka jest maksymalna liczba drzew jaką może Parsley wyciąć w ciągu 60 minut?

Wynik. 4293

Rozwiązanie. Jeśli Parsley spędzi minutę na odpoczynku, a w następnej minucie będzie ścinał drzewa, zetnie o jedno drzewo więcej niż gdyby najpierw ścinał, a potem odpoczywał. W obu przypadkach jego energia się nie zmieni. Zatem, by zmaksymalizować liczbę ściętych drzew, zaczyna od r minut odpoczynku, po czym ścina przez $60 - r$ minut, dla pewnego r. Sumaryczna liczba ściętych drzew jest więc równa

$$(r+100)+(r+99)+\ldots+(r+100-(60-r-1)) = \frac{(r+100+2r+41)}{2} \cdot (60-r) = -\frac{3}{2}((r-6.5)^2 - 2862.25).$$

Maksimum jest osiągnięte gdy $(r-6.5)^2$ jest najmniejsze, to jest dla $r = 6$ lub $r = 7$. W tym przypadku Parsley wytnie $\frac{3}{2} \cdot 2862 = 4293$ drzewa.

Zadanie 45J / 35S. Rozważmy zbiór $\sqrt{\mathbb{N}} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}$, czyli zbiór pierwiastków kwadratowych z liczb całkowitych dodatnich. Niech S będzie zbiorem liczb rzeczywistych a, dla których równocześnie $a \in \sqrt{\mathbb{N}}$ oraz $36/a \in \sqrt{\mathbb{N}}$. Jaki jest iloczyn wszystkich elementów zbioru S?

Wynik. 6^{25}

Rozwiązanie. Jeśli $a = \sqrt{n_{a,1}}$ oraz $36/a = \sqrt{n_{a,2}}$ dla pewnego $n_{a,1}, n_{a,2} \in \mathbb{N}$, to $n_{a,1}n_{a,2} = 36^2$. Dzięki tej obserwacji możemy obliczyć szukany iloczyn następująco:

$$\prod_{a\in S} a = \sqrt{\prod_{a\in S} n_{a,1}} = \sqrt{\prod_{n|36^2} n} = \sqrt{\prod_{0\le k_1,k_2\le 4} 2^{k_1}3^{k_2}} = \sqrt{\prod_{0\le k_2\le 4} 2^{10}3^{k_2}} = \sqrt{2^{50}3^{50}} = 6^{25}.$$

Zadanie 46J / 36S. Jakie jest prawdopodobieństwo, że iloczyn losowo wybranych 2014 cyfr będzie podzielny przez 10?

Wynik. $1 - (\frac{5}{10})^{2014} - (\frac{8}{10})^{2014} + (\frac{4}{10})^{2014}$

Rozwiązanie. Szukamy prawdopodobieństwa, że iloczyn jest równocześnie podzielny przez 2 i 5. Obliczmy prawodopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Prawdopodobieństwo, że iloczyn nie jest podzielny przez 2 wynosi $a = (5/10)^{2014}$ (wszystkie czynniki muszą być nieparzyste). Prawdopodobieństwo, że iloczyn nie jest podzielny przez 5 jest równe $b = (8/10)^{2014}$ (nie może wystąpić 0 ani 5), a prawdopodobieństwo, że iloczyn nie jest podzielny przez 2 ani 5 to $c = (4/10)^{2014}$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $1 - a - b + c$, ponieważ dwukrotnie odjęliśmy prawdopodobieństwo niepodzielności przez 2 i 5 i dlatego musieliśmy je dodać.

Zadanie 47J / 37S. Wyznacz wartość wyrażenia

$$\lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2013}\rfloor + \ldots + \lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor.$$

Uwaga: $\lfloor x\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą niż x.

Wynik. -2002

Rozwiązanie. Zapiszmy to wyrażenie w postaci

$$\begin{aligned}&\lfloor 2014\sqrt[3]{0}\rfloor + \left(\lfloor 2014\sqrt[3]{1}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-1}\rfloor\right) + \ldots + \left(\lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\rfloor\right) = \\ &\quad = \left(\lfloor 2014\sqrt[3]{1}\rfloor - \lceil 2014\sqrt[3]{1}\rceil\right) + \left(\lfloor 2014\sqrt[3]{2}\rfloor - \lceil 2014\sqrt[3]{2}\rceil\right) + \ldots + \left(\lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor - \lceil 2014\sqrt[3]{2014}\rceil\right),\end{aligned}$$

gdzie $\lceil x\rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą niemniejszą niż x. Zauważmy, że jeśli x jest liczbą całkowitą, to $\lfloor x\rfloor - \lceil x\rceil$ jest równe zero, a w przeciwnym przypadku wynosi -1. Ponieważ pierwiastek sześcienny liczby całkowitej jest liczbą całkowitą lub niewymierną, to szukana suma wynosi minus liczba liczb między 1 a 2014 (włącznie), które nie są sześcianami. Skoro $12^3 = 1728 < 2014$ i $13^3 = 2197 > 2014$, to jest dokładnie 12 sześcianów miedzy 1 a 2014, więc szukaną wartością jest $-(2014 - 12) = -2002$.

Zadanie 48J / 38S. Borys obliczał sumę $1 + 2 + 3 + \ldots + 2012$. Jednakże, zapomniał dodać niektórych liczb i otrzymał liczbę podzielną przez 2011. Ania obliczała sumę $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013$, zapomniała dodać tych samych liczb co Borys i otrzymała liczbę N podzielną przez 2014. Jaki jest stosunek N/A?

Wynik. $2/3$

Rozwiązanie. Liczbą Borysa jest $N - 2013$, więc

$$N \equiv 2013 \equiv 2 \pmod{2011}$$

i $N \equiv 0 \pmod{2014}$. Podobnie możemy postąpić z liczbą $2A$:

$$2A = 2013 \cdot 2014 \equiv 0 \pmod{2014}$$

i $2A \equiv 2 \cdot 3 = 6 \pmod{2011}$. Skoro $2A$ jest podzielne przez 3 (z podzielności przez 2013), a 2011 i 2014 nie są, to możemy podzielić powyższe kongruencje dla A przez 3. Okazuje się, że $2A/3$ spełnia wszystkie warunki liczby N. Z drugiej strony, żadne inne N nie jest możliwe, gdyż odległość od najbliższej liczby spełniającej te kongruencje dla N wynosi $2011 \cdot 2014 > A$. Zatem $N/A = 2/3$.

Zadanie 49J / 39S. Gramy w grę za pomocę 16 kart ułożonych w rzędzie. Każda karta jest z jednej strony czarna, a z drugiej czerwona. Ruch polega na wybraniu grupy sąsiadujących kart (możliwe, że zawierającej tylko 1 kartę), w której karta położona najbardziej z lewej jest czarna, a reszta kart jest czerwona, a następnie obróceniu wszystkich kart z tej grupy na drugą stronę. Gra kończy się gdy nie można już wykonać ruchu. Ile najwięcej ruchów można wykonać w trakcie tej gry?

Wynik. $2^{16} - 1$

Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie rząd 16 kart jako liczbę binarną, gdzie czarna strona odpowiada cyfrze 0, a czerwona cyfrze 1. Ruchowi w naszej grze odpowiada binarne dodanie pewnej liczby całkowitej dodatniej tak, że suma pozostaje mniejsza niż 2^{16}. Zatem gra może mieć co najwyżej $2^{16} - 1$ ruchów. Taka liczba ruchów może być osiągnięta: rozważmy początkowy stan składający się z samych zer (czyli wszystkich kart czarnych) i sekwencję ruchów odpowiadającą dodawaniu 1 w każdym ruchu.

Zadanie 50J / 40S. Trójkąt prostokątny ma wszystkie boki będące liczbami całkowitymi, przy czym jedna z jego przyprostokątnych ma długość 2014^{14}. Ile takich trójkątów istnieje?

Wynik. $\frac{27\cdot 29^2-1}{2}$

Rozwiązanie. Oznaczmy długość drugiej przyprostokątnej przez b, a przeciwprostokątnej przez c. Z twierdzenia Pitagorasa $(c-b)(c+b) = 2014^{28}$. Wszystkie długości boków są liczbami całkowitymi, więc problem polega na obliczeniu na ile sposobów możemy zapisać 2014^{28} jako iloczyn dwóch różnych parzystych dzielników. Muszą być parzyste, gdyż liczby $c-b$ i $c+b$ mają tą samą parzystość, więc są parzyste. Muszą być różne, bo $c - b = c + b$ oznacza, że $b = 0$. Mamy $2014^{28} = 2^{28} \cdot 19^{28} \cdot 53^{28}$, więc jest $27 \cdot 29 \cdot 29 - 1$ par dzielników spełniających warunki. Wiedząc, że musimy także uwzględnić nierówność $c - b < c + b$, dostajemy $\frac{27\cdot 29^2-1}{2}$ możliwych trójkątów.

Zadanie 51J / 41S. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, która nie może być zapisana jako suma 11 lub mniej (niekoniecznie różnych) silni?

Wynik. 359

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba $n \in \mathbb{N}$ może być jednoznacznie zapisana w postaci $n = \sum_{k=1}^{N} a_k k!$ dla pewnego N zależnego od n i $a_k \in \mathbb{N}$ takich, że $a_k \leq k$, gdyż $(k + 1)k! = (k + 1)!$. Na przykład $43 = 1+3\cdot 3!+4!$. Szukany problem może być więc przeformułowany na problem znalezienia najmniejszego n, dla którego $\sum_{k=1}^{N} a_k = 12$. Na to pytanie można łatwo odpowiedzieć, gdyż odpowiadające a_k wynoszą $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$ oraz $a_5 = 2$, tak więc $n = \sum_{k=1}^{5} a_k k! = 359$.

Zadanie 52J / 42S. W turnieju szachowym każdy z graczy gra przeciwko każdemu innemu dokładnie raz. Ponadto, gracze uzgodnili, że partia nie może się zakończyć remisem. Nazwijmy grupę czterech graczy *uporządkowaną* jeśli jest w niej wyraźny wygrany i wyraźny przegrany, tj. osoba, która w tej grupie wszystko wygrała i osoba, która wszystko przegrała. Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n taką, że każdy turniej z n graczami zawiera grupę czterech graczy, która jest uporządkowana.

Wynik. 8

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że dla 8 uczestników średnia liczba zwycięstw pojedynczego gracza to 3.5, więc musi być gracz v, który wygrał 4 (co najmniej) razy – z graczami a_1, a_2, a_3 oraz a_4. Podobnie, wśród tych czterech graczy musi być taki, który wygrał z co najmniej dwoma, więc możemy założyć, że a_1 pokonał a_2 i a_3. Ktoś wygrał mecz pomiędzy a_2 i a_3, możemy założyć, że a_2. Zauważmy, że grupa $\{v, a_1, a_2, a_3\}$ jest uporządkowana. Zatem szukane $n \leq 8$.

W rzeczywistości $n = 8$, ponieważ mniejsza liczba uczestników dopuszcza turniej bez grupy uporządkowanej wielkości 4. By to udowodnić, załóżmy bez straty ogólności, że jest 7 graczy $a_0, \ldots, a_6$. Dla każdego $0 \leq i \leq 6$ niech gracz a_i wygrywa mecz z graczem a_j dla $j = (i + 1) \mod 7$, $(i + 2) \mod 7$ oraz $(i + 4) \mod 7$. Jedynymi możliwymi kandydatami na uporządkowaną grupę są czwórki z pewnym graczem i trzema graczami, których on pokonał. Jednakże takie grupy nie są uporządkowane.

Zadanie 53J / 43S. Wybrałem dwie liczby całkowite ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Następnie powiedziałem Piotrowi ich iloczyn, a Dominikowi ich sumę. Potem wywiązała się następująca rozmowa:

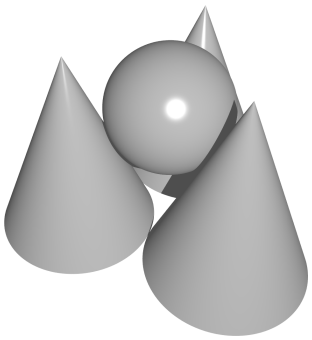
- Piotr: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Dominik: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Piotr: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Dominik: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Piotr: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Dominik: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Piotr: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Dominik: „Nie wiem, jakie są to liczby.”
- Piotr: „Już wiem, jakie to są liczby.”

Jakie liczby wybrałem?

Wynik. 2, 8

Rozwiązanie. Wiedząc, że istnieje rozwiązanie, obaj gracze musieli zachowywać się w pełni racjonalnie. Wypisali sumy i iloczyny wszystkich par ze zbioru $\{1, \ldots, 9\}$. Gdyby Piotr widział tam tylko raz liczbę, którą usłyszał, to ustaliłby od razu jakie były początkowe liczby. To się nie stało, więc Dominik może zignorować wszystkie pary, które mają unikalny iloczyn. Teraz, gdyby Dominik miał sumę, która występuje tylko raz, to również poznałby początkowe liczby. Tak też się nie stało, więc Piotr może wykreślić wszystkie pary, które mają unikalną sumę. W taki sposób możemy kontynuować dalej, do uzyskania odpowiedzi.

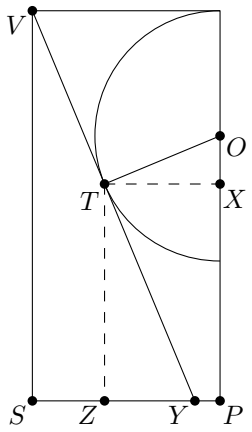
Zadanie 54J / 44S. Na stole stoją trzy jednakowe stożki o parami stycznych podstawach, pomiędzy którymi umieszczono kulę. Kula jest takiej wielkości, że jej najwyższy punkt leży na tej samej wysokości co wierzchołki stożków. Jaki jest promień kuli, jeśli podstawa stożków ma promień równy 50, a ich wysokość wynosi 120?



Wynik. $\frac{200\sqrt{3}}{9}$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez r promień kuli, a przez O jej środek. Wybierzmy jeden ze stożków i oznaczmy środek jego podstawy przez S, jego wierzchołek przez V, a punkt styczności z kulą przez T. Niech b będzie płaszczyzną, w której leżą podstawy stożków. Niech P będzie rzutem prostokątnym O na b, X punktem na prostej OP takim, że odcinek TX jest równoległy do b, a Y będzie punktem przecięcia prostej VT i podstawy wybranego stożka. Na koniec oznaczmy przez Z rzut prostokątny T na b.

Z twierdzenia Pitagorasa $VY = 130$. Skoro kula jest styczna do stożków, to odcinek VY jest prostopadły do TO. Dlatego $\triangle TXO$ jest podobny do $\triangle VSY$ i stąd $OX = \frac{5}{13}r$ oraz $TX = \frac{12}{13}r$. Zatem $TZ = 120 - \frac{18}{13}r$. Z podobieństwa $\triangle VYS$ i $\triangle TYZ$ mamy $YZ = (120 - \frac{18}{13}r) \cdot \frac{5}{12} = 50 - \frac{15}{26}r$, a stąd $SZ = \frac{15}{26}r$. Z drugiej strony $PZ = TX = \frac{12}{13}r$. Zauważmy, że środki podstaw stożków tworzą trójkąt równoboczny o boku długości 100, dla którego P jest środkiem ciężkości. Zatem $SP = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ oraz $SZ = \frac{100\sqrt{3}}{3} - \frac{12}{13}r$. Mając dwie równości na SZ, obliczamy $\frac{100\sqrt{3}}{3} - \frac{12}{13}r = \frac{15}{26}r$, co oznacza, że $r = \frac{200\sqrt{3}}{9}$.



Zadanie 55J / 45S. Wyobraźmy sobie klatkę dla królików utworzoną z 7×7 komórek. Na ile sposobów możemy umieścić tam 8 nierozróżnialnych zrzędliwych królików tak, aby każde dwa króliki były oddalone od siebie o co najmniej 3 komórki w pionie lub co najmniej 3 komórki w poziomie?

Wynik. $36 + 8 + 6 + 1 = 51$

Rozwiązanie. Nazwijmy kolumny tej klatki literami A–G, a rzędy liczbami 1–7. Rozważmy położenie królika znajdującego się najbliżej środka. Jeśli środkowa komórka (D4) jest zajęta, to wszystkie pozostałe króliki muszą być umieszczone na obwodzie klatki. Analizując możliwe położenia uzyskamy, że jest 36 takich możliwości. Rozważmy teraz przypadek królika umieszczonego w D3. Mamy 2 możliwości w zależności od tego, czy D6 czy D7 jest zajęta. Z symetrii dostajemy, że w zależności od zajęcia D3, D5, C4 lub E4 mamy sumarycznie 8 możliwości. Jeśli zajęte jest D2, to mamy 2 możliwości (zajęcie D6 lub D7) niewystępujące w poprzednim przypadku, gdyż trzecia, polegająca na zajęciu D5, była liczona już wcześniej. Sumarycznie umieszczenie królika w D2, D6, B4 lub F4 daje nam 6 nieliczonych wcześniej możliwości. Jeśli zajęte jest C3, B2 lub C2 (lub symetryczne do nich), to nie istnieje sposób umieszczenia pozostałych 7 królików. Ostatni przypadek to kiedy wszystkie króliki są umieszczone na obwodzie, co można zrobić na 1 sposób. Sumarycznie mamy więc $36 + 8 + 6 + 1 = 51$ możliwości.

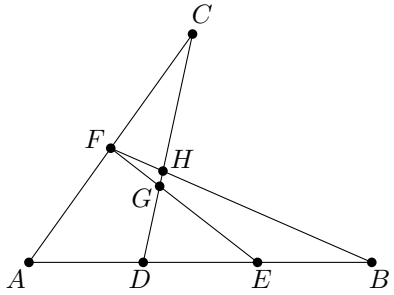
	A	B	C	D	E	F	G
1	●			●			●
2							
3							
4	●			○			●
5							
6							
7	×	×	×	×	×	×	×

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2							
3				○			
4	●						●
5							
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2				○			
3							
4	●						●
5				×			
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●			○			●
2							
3							
4	●						●
5							
6							
7	●			●			●

Zadanie 56J / 46S. Dane są trzy niewspółliniowe punkty A, B i C. Odcinek AB jest podzielony na trzy równe części punktami D i E. Punkt F jest środkiem odcinka AC. Proste EF i BF przecinają prostą CD odpowiednio w punktach G i H. Jakie jest pole $\triangle FGH$, jeśli pole $\triangle DEG$ wynosi 18?

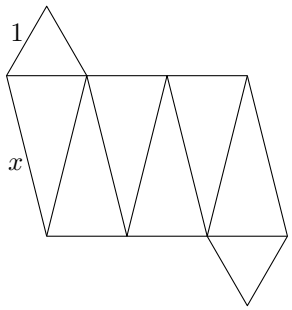


Wynik. $\frac{9}{5}$

Rozwiązanie. Rozwiążemy ten problem umieszczając w wierzchołkach masy. Intuicja fizyczna jest taka, że dwie masy balansują się w punkcie będącym środkiem ciężkości wtedy i tylko wtedy gdy iloczyny masy i odległości punktu od środka ciężkości są równe. Jeśli w wierzchołku B umieścimy masę 1, a w wierzchołkach A i C masy 2, to wtedy $\triangle ABC$ balansuje się na prostej BF i na prostej CD. Zatem balansuje się w punkcie H, gdzie te proste się przecinają. Gdy zastąpimy masy z punktów A i C pojedynczą masą 4 w punkcie F, to trójkąt wciąż balansuje się w H. Zatem $\frac{BH}{HF} = 4$.

Następnie rozważmy $\triangle BDF$. Umieszczając masy 1 w punktach B i D oraz masę 4 w punkcie F dostajemy, że ten trójkąt balansuje się w punkcie G. Używając podobnego argumentu pokazujemy, że $\frac{EG}{GF} = 2$ oraz $\frac{DG}{GH} = 5$. Ponieważ $\triangle DEG$ i $\triangle FHG$ mają równe kąty przy wierzchołku G, to stosunek pól trójkątów $\triangle DEG$ i $\triangle FHG$ wynosi $\frac{DG}{FG} \cdot \frac{EG}{HG} = 2 \cdot 5 = 10$. Zatem pole $\triangle FGH$ jest równe $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$.

Zadanie 57J / 47S. Powierzchnia pewnej bryły składa się z dwóch trójkątów równobocznych o bokach długości 1 oraz sześciu trójkątów równoramiennych o ramionach długości x i podstawie długoci 1, jak na poniższym obrazku. Jaka jest wartość x, jeśli objętość tej bryły wynosi 6?



Wynik. $\frac{5\sqrt{39}}{3}$

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw ośmiościan foremny o krawędzi długości 1, tj. $x = 1$. By policzyć jego objętość, podzielmy go na dwa ostrosłupy o podstawie kwadratu i krawędziach długości 1. Taki ostrosłup ma wysokość $\sqrt{2}/2$, więc jego objętość wynosi

$$\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

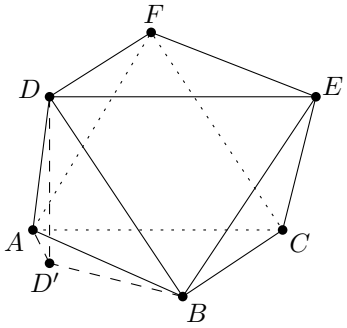
Zatem objętość ośmiościanu foremnego to $\sqrt{2}/3$.

Zauważmy, że zadana bryła może być otrzymana z ośmiościanu foremnego przez rozciągnięcie go w kierunku prostopadłym do pary przeciwległych ścian. Niech k będzie współczynnikiem tego rozciągnięcia. Rozciągamy ośmiościan w tylko jednym wymiarze, więc jego objętość zwiększy się dokładnie k razy. Skoro objętość zadanej bryły wynosi 6, to mamy $k = 9\sqrt{2}$.

Oznaczmy wierzchołki nierozciągniętych trójkątów przez A, B, C oraz D, E, F w taki sposób, że jeśli zrzutujemy punkty D, E, F na płaszczyznę ABC i oznaczymy rzuty odpowiednio przez D', E', F', to $AD'BE'CF'$ będzie sześciokątem foremnym. Ponieważ $AB = 1$, to $AD' = \sqrt{3}/3$ oraz

$$AD = \sqrt{h^2 + AD'^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}},$$

gdzie h jest wysokością bryły (opuszczonej na ABC).



Stosując ten wzór dla ośmiościanu foremnego ($AD = 1$) otrzymujemy $h_{\text{for}} = \sqrt{2/3}$. Wysokość rozciągniętego ośmiościanu jest k razy dłuższa, tj. $h_{\text{roz}} = 18/\sqrt{3}$. Podstawiając do powyższego wzoru dostajemy

$$AD = \sqrt{h_{\text{roz}}^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{325}{3}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{39}}{3}.$$