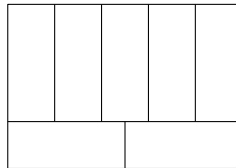


Ülesanne 1J. Väike Peeter kannab alati jalas erinevat värvi sokke. Tema riidekapis, mis asub pimedas keldris, on 30 punast, 40 rohelist ja 40 sinist sokki. Peeter võtab kapist sokke ühekaupa ilma sokkide värvi nägemata. Vähemalt mitu sokki ta peab välja võtma, et ta saaks neist hiljem kindlasti moodustada kaheksa eri värvi sokkidest koosnevat paari? Ühtegi sokki ei tohi lugeda rohkem kui ühte paari kuuluvaks.

Ülesanne 2J. Olgu x ja y positiivsed täisarvud, mis rahuldavad võrrandit $x^2 + 2y^2 = 2468$. Leia x , kui on teada, et leidub vaid üks sobiv paar (x, y) ja $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

Ülesanne 3J. Digitaalne kell näitab aega tundides ja minutites kahekümneneljatunniformaadis. Mitu minutit ööpäeva jooksul esineb numbrite seas 5?

Ülesanne 4J. Suur riskülik ümbermõõduga 136 cm on lõigatud seitsmeks võrdseks riskülikuks, nagu näidatud joonisel.



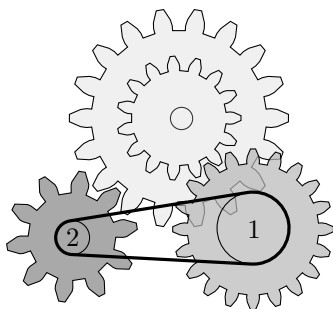
Millega võrdub suure risküliku pindala cm^2 ?

Ülesanne 5J. Võrdkülgse kolmnurga kujulise šokolaadikarbi küljepikkus on s cm. Karp on tihedasti täidetud $2n$ võrdkülgse kolmnurga kujulise šokolaaditükiga, millest n on küljepikkusega 1 cm ja n on küljepikkusega 2 cm. Mis on arvu s vähim võimalik väärtus?

Ülesanne 6J. Väike Peeter on suureks kasvanud, nii et nüüd kannab ta jalas alati sama värvi sokke. Tal on ka palju uusi sokke, nii et praegu on tema riidekapis 20 pruuni, 30 punast, 40 rohelist, 40 sinist, 30 musta ja 20 valget sokki. Riidekapp on aga endiselt pimedas keldris. Vähemalt mitu sokki peab ta välja võtma, et ta saaks neist hiljem kindlasti moodustada kaheksa sama värvi sokkidest koosnevat paari, kui ta sokkide välja võtmise ajal nende värvi ei näe? Ühtegi sokki ei tohi lugeda rohkem kui ühte paari kuuluvaks.

Ülesanne 7J. Ruudul ja korrapärasel viisnurgal on ümberringjoon ja üks tipp ühised. Leia nende kahe hulknurga ühisosaks oleva hulknurga suurima sisenurga suurus.

Ülesanne 8J. Ringjoone 1 on läbimõõt 48 mm. Milline peab olema ringjoone 2 läbimõõt, et kogu seade töötaks?



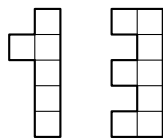
Ülesanne 9J. Valevorst Robert järgis oma 62-päevase suvepuhkuse jooksul ettevalmistatud plaani, mis jagas puhkuse päevadeks, mil Robert alati valetas, ja päevadeks, mil ta rääkis alati tõtt. Oma puhkuse k -ndal päeval (iga $k = 1, 2, \dots, 62$ korral) teatas ta, et plaan näeb ette valetada vähemalt k päeval. Mitmel päeval Robert tegelikult valetas?

Ülesanne 10J. Laevade pommitamise mängus on meie vastane peitnud kusagile ruudustikku suurusega 9×9 lennukikandja: tüki suurusega 5×1 või 1×5 ruutu. Mis on vähim arv laske, mis on vaja teha, et kindlasti lennukikandjat vähemalt üks kord tabada, s.t. mis on vähim arv ruute, mis on vaja ruudustikus valida, et vähemalt üks neist kattuks lennukikandja positsiooniga?

Ülesanne 11J / 1S. Leia võrrandit $a + b + c = 2015$ rahuldavate erinevate positiivsete täisarvude a, b, c maksimaalne võimalik ühine tegur.

Ülesanne 12J / 2S. Raudtööstuse rong koosneb vedurist (mis on alati rongi ees) ning kuuest vagunist, millest igaüks veab kas sütt või rauamaaki. Ants tegi rongist pildi, kuid pildile mahtus rong vaid osaliselt: pildil oli näha ainult rauamaagi vagunit, millele järgnes kaks kivisöe vagunit. Vagunid ei olnud täiesti sümmeetrilised, nii et võis eristada, et üks vagun on esimene neist kolmest. Mitu erinevat rongi saab nii pildistada, et tekiks täpselt selline pilt nagu Antsul?

Ülesanne 13J / 3S. Ühesuurustest kuubikujulistest klotsidest koosnev keha meenutab tagantvaates numbrit 1 ja ülaltvaates numbrit 3 (vt joonist). Mitu klotsi on näha keha paremalt vaadates, kui on teada, et keha sisaldab võimalikult palju klotse?



Märkus. Järgneval joonisel on kujutatud kuup, selle tagantvaade ja ülaltvaade.



Ülesanne 14J / 4S. Olgu positiivne täisarv *maitsev*, kui tema numbrite summa jagub 17ga ja sama kehtib arvu $n + 10$ kohta. Leia vähim maitsev arv.

Ülesanne 15J / 5S. Bussifirma opereerib linnade A ja D vahelist liini, mis peatub ka linnades B ja C (järjestuses A, B, C, D). Sõidupileti hind on võrdeline läbitud vahemaa pikkusega. Näiteks pilet linnast A linna C maksab samapalju kui piletid linnast A linna B ja linnast B linna C kokku. Firma ei müü kaheotsapileteid. Agar bussipiletite koguja Liisa soovib kokku saada kõigi võimalike hindadega piletid (sõidusuund pole oluline). Praeguseks on tal olemas piletid hinnaga 10, 40, 50, 60 ja 70. Leia kõik võimalused, milline saab olla puuduva hinnaga pileti hind.

Ülesanne 16J / 6S. Kellakaupluses meeldib Helenile kell, mis on pakitud läbipaistvasse ristkülikukujulisse karpi nii, et karbi keskpunkt ja kella keskpunkt (kus kohtuvad osutid) langevad kokku. Karbi lühim külg on 3 cm pikk. Ta pani tähele, et kell 12 näitab tunniosuti täpselt karbi lühema külje keskpunkti, kell 1 aga näitab karbi nurka. Kui kaugel üksteisest on kaks punkti karbi serval, kuhu tunniosuti näitab vastavalt kell 1 ja kell 2?

Ülesanne 17J / 7S. Leia numbrite $1, 2, \dots, 9$ ümberjärjestamisel saadav üheksakohaline arv, mille iga kahe kõrvutise numbri poolt moodustatud kahekohaline arv esitub korrutisena $k \cdot l$, kus $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Ülesanne 18J / 8S. Leia suurim algarv p , mis on väiksem kui 210, nii et arv $210 - p$ oleks kordarv.

Märkus. Arv 1 ei ole ei algarv ega kordarv.

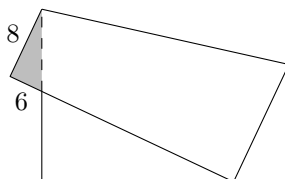
Ülesanne 19J / 9S. Algekooli juhtkond otsustas osta kindla arvu pliiatseid ja jagada need esimese klassi õpilastele kolmes paralleelis A, B ja C. Kui kõik õpilased saaks pliiatseid võrdselt, saaks iga õpilane 9 pliiatsit. Kui kõik pliiatsid antaks võrdselt A-klassi õpilastele, saaks iga selle klassi õpilane 30 pliiatsit, ja kui kõik pliiatsid antaks võrdselt B-klassi õpilastele, saaks iga selle klassi õpilane 36 pliiatsit. Mitu pliiatsit saaks iga C-klassi õpilane, kui pliiatsid jagatakse võrdselt selle klassi õpilaste vahel?

Ülesanne 20J / 10S. Leia kõik sellised neljakohalised arvud, mis on mingi täisarvu ruuduks, et arvud, mis koosnevad nii kahest esimesest kui kahest viimasest numbrist, on omakorda mingite positiivsete täisarvude ruudud, kusjuures teine kahenumbrilistest arvudest tohib alata ka nullist.

Ülesanne 21J / 11S. Autojuht tahtis sõita jääva kiirusega mööda maanteed ühest linnast teise. Kahjuks olid mõned maanteelõigud remondis ja juht pidi neid lõike läbides sõitma veerandi võrra väiksema kiirusega. Seetõttu oli tal ajaks, kui ta oli kavatsenud sihtkohta jõuda, läbitud ainult kuus seitsmendikku teekonnast. Millise osa sõiduajast oli ta selleks hetkeks sõitnud remonditavatel teelõikudel?

Ülesanne 22J / 12S. Riskülik, mille küljepikkused on täisarvud, jagati kaheteistkümneks ruuduks järgmiste küljepikkustega: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Mis on risküliku ümbermõõt?

Ülesanne 23J / 13S. Ruudukujuline paberileht on kokku murtud nii, et üks tipp on täpselt ühel külgedest. Vaatleme joonisel halliks värvitud kolmnurka. Murdejoone naabriks oleva ruudust välja jääva kolmnurga külje pikkus on 8 cm, teise ruudust välja jääva külje pikkus on aga 6 cm.



Leia ruudu küljepikkus.

Ülesanne 24J / 14S. Vana aurulaev liigub mööda kanalit konstantse kiirusega. Siim soovib leida aurulaeva pikkust. Kui laev aeglaselt liigub, jalutab ta konstantse kiirusega piki kallast laeva ahtrist laeva ninani, lugedes kokku 240 sammu. Siis ta koheselt pöörab ringi ning jalutab tagasi kuni laeva ahtrini, lugedes kokku 60 sammu. Milline on aurulaeva pikkus sammudes?

Ülesanne 25J / 15S. $137641 = 371^2$ on vähim kuuekohaline arv, mille kolme erineva numbriga kustutamisel jääb järele tema ruutjuur: ~~137641~~. Leia suurim selline kuuekohaline arv.

Ülesanne 26J / 16S. Linda sisestas midagi oma kalkulaatorisse, ja ekraanile ilmus kolmekohaline täisarv. Patrick, kes istus tüdruku vastas, märkas, et tema vaatepunktist (tagurpidi) nägi see välja täpselt nagu kolmekohaline arv, mis on 369 võrra suurem arvust, mis kalkulaatorisse sisestati. Mis arvu sisestas Linda kalkulaatorisse?

Märkus. Kalkulaatoril on seitsmesegmendiline ekraan, mis tähendab, et numbrid näevad välja nagu järgneval joonisel:



Ülesanne 27J / 17S. Na-boi saarel elab kolm perekonda, igaiühes kasvab kaks poissi ja kaks tüdrukut. Mitmel viisil saavad need 12 last moodustada 6 paari, kui ei samast soost ega ka samast perest paarid pole lubatud?

Ülesanne 28J / 18S. Hansuke ja Greteke küpsetasid hiiglasuure ringikujulise pitsa ja jagasid selle 50 võrdseks ringi sektori kujuliseks viiluks. Nad puistavad pitsale oliive nii, et nende arvud viiludel päripäeva lugedes on $1, 2, 3, \dots, 50$. Seejärel poolitavad nad kogu pitsa ühe sirge lõikega, mis ei tükelda ühtki viilu, nii et Hansuke saab kaks korda rohkem oliive kui Greteke. Leia kõik võimalused, milline saab olla oliivide koguarv jaotussirge naabriks oleval neljal viilul.

Ülesanne 29J / 19S. Leia kõik algarvud p , mille korral $19p + 1$ on täisarvu kuup.

Ülesanne 30J / 20S. Rööpkülikus $ABCD$ asub punkt E küljel AD nõnda, et $2 \cdot AE = ED$, ja punkt F küljel AB nõnda, et $2 \cdot AF = FB$. Sirged CF ja CE lõikavad diagonaali BD vastavalt punktides G ja H . Kui suur osa rööpküliku $ABCD$ pindalast on kaetud viisnurgaga $AFGHE$?

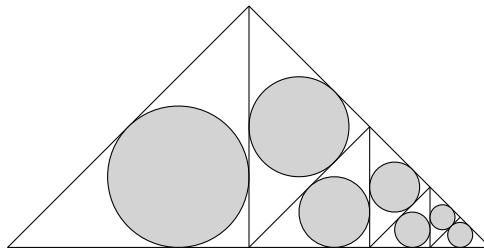
Ülesanne 31J / 21S.

Leia suurim viiekohaline arv, mille kõik numbrid on nullist erinevad ja mis rahuldab järgmisi tingimusi.

- Esimesest kolmest numbrist moodustuv arv on 9 korda suurem kui kahest viimasest numbrist moodustuv arv.
- Kolmest viimasest numbrist moodustuv arv on 7 korda suurem kui kahest esimesest numbrist moodustuv arv.

Ülesanne 32J / 22S. Kaksteist tarka istub ümmarguse laua ümber. Neile jagati juhuslikult 12 kaarti (igaüks sai ühe), millest üheksa on tühjad ning kolmele erilisele kaardile on märgitud tähed J , Q ja K . Igaüks vaatab oma kaarti ning annab seejärel selle edasi oma parempoolsele naabrile. Alati pärast oma kaardi vaatamist palutakse tõsta käsi neil, kes teavad täpselt, mis eriline kaart on kelle käes. Pärast neljanda kaardi vaatamist ei tõstnud kätt keegi. Pärast viiendat vaatamist tõstis käe täpselt üks tark. Pärast kuuendat vaatamist tõstis käe x inimest ning pärast seitsmendat vaatamist y inimest. Leia xy .

Ülesanne 33J / 23S. Võrdhaarsesse täisnurksesse kolmnurka, mille aluse pikkus on 1, on joonestatud seitse ringi:



Mis on ringide pindala kokku?

Ülesanne 34J / 24S. Leia kõik algarvud p , mille puhul $p + 11$ jagab arvu $p(p + 1)(p + 2)$.

Ülesanne 35J / 25S. Puutäidel on 14 jalga. Puutäiemal on varutud hulganisti ühesuguseid sokke ja kingi, et valmistuda algava külma aastaaja vastu. Ta selgitab väiksele Puutäi-Jimile, et igasse jalga tuleb panna kõigepealt sokk ja alles seejärel king, muus osas pole sokkide ja kingade jalgapanemise järjekord tähtis. Mitmel erineval viisil saab väike Puutäi-Jim riietuda?

Ülesanne 36J / 26S. Olgu x selline reaalarv, et $x^3 + 4x = 8$. Leia avaldise $x^7 + 64x^2$ väärtus.

Ülesanne 37J / 27S. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk alusega AB . Nurga ACB poolitaja ja sirge AB lõikuvad punktis D ning nurga BAC poolitaja ja sirge BC lõikuvad punktis E . On teada, et $|AE| = 2 \cdot |CD|$. Leia nurga BAC suurus.

Ülesanne 38J / 28S. Olgu antud reaalarvude jada (a_n) , mille korral $a_1 = 2015$ ja $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n$ iga $n \geq 1$ korral. Leia a_{2015} .

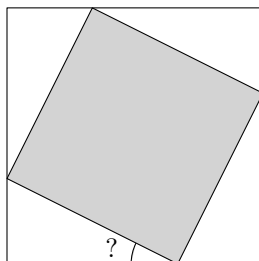
Ülesanne 39J / 29S. Keit ja Harriet leiutasid järgmise mängu. Nad värvivad 2 korrapärase 12-tahukakujulise täringu tahud tsüaniini, magenta ja kollasega, nii et iga värv esineb vähemalt ühel kummagi täringu tahul ning esimesel täringul on täpselt 4 tahku kollased. Kui mängijad viskavad korraga kumbki oma täringut ja need peatuvad sama värvi tahul, siis võidab Keit, vastasel korral võidab Harriet. On teada, et värvid jaotuvad nii, et tüdrukutel on võrdne võimalus võita. Leia kõik võimalused, mitu magentaga kaetud tahku saab olla teisel täringul.

Ülesanne 40J / 30S. Suure ümmarguse laua taga istub $n > 24$ naist, kelle seast igaüks räägib alati kas tõtt või alati valetab. Iga naine väidab enda kohta järgmist:

- Ta räägib alati tõtt.
- Naine, kes istub temast 24 kohta paremal, on valetaja.

Leia vähim n , mille korral see on võimalik.

Ülesanne 41J / 31S. Kahel ruudul on ühine keskpunkt ja väiksema ruudu tipud asuvad suurema külgedel. Suurest ruudust väiksema väljalõikamisel jääb järgi neli kongruentset kolmnurka, millest igaühe pindala on kaheteistkümnendik suure ruudu pindalast. Mis on kolmnurkade väikseima nurga suurus?



Ülesanne 42J / 32S. Ringjoon ω_3 raadiusega 3 puutub seesmiselt ringjooni ω_1, ω_2 , mille raadiused on vastavalt 1 ja 2. Lisaks ω_1 ja ω_2 puutuvad väliselt. Ringjoone ω_3 peal on valitud punktid A, B , nii et kõõl AB on ringjoonte ω_1 ja ω_2 ühine väline puutuja. Leia kõõlu AB pikkus.

Ülesanne 43J / 33S. Sfinks annab Oidipusele järgmise mõistatuse. Sfinks mõtleb ühe kahekohalise arvu S . Oidipus võib valida kolm ühekohalist arvu a, b, c ($a < b < c$) ja küsida, kas S jagub nendega. Sfinks vastab talle iga kord „jah“ või „ei“.

Pärast vastuste saamist oli Oidipus meeleheitel, sest mõistis, et leidub täpselt kaks arvu, mis rahuldavad jaguvustingimusi. Kuid siis teatas Sfinks, et oli vastuses arvu b kohta eksinud. Õnneks sai Oidipus selle lisainformatsiooni abil leida otsitava arvu S täie kindlusega. Leia arv S .

Ülesanne 44J / 34S. Neli inimest liiguvad mööda teed konstantse kiirusega. Esimene sõidab autoga, teine mootorrattaga, kolmas skuuriga ja neljas rattaga. Auto kohtus skuuriga kell 12 päeval, rattaga kell 14 ja mootorrattaga kell 16. Mootorrattas kohtus skuuriga kell 17 ja rattaga kell 18. Mis kell kohtusid rattas ja skuurer?

Ülesanne 45J / 35S. Saali põrandat katab ruudukujuline vaip küljepikkusega 22 meetrit. Vaipa pannakse puhastama robottolmuimeja. Vaip on jagatud 484 ühikruuduks ja robot puhastab neid ruute ühekaupa, järgides järgmisi reegleid:

- kui robot on ühikruudu ära puhastanud, et tohi ta hiljem enam selle peale liikuda;
- robot ei muuda oma liikumise suunda, välja arvatud juhul, kui talle jääb ette vaiba serv või varem puhastatud ühikruut;
- kui robot peab liikumissuunda muutma ja tal on selleks kaks võimalust, võib ta teha ükskõik kumma valiku.

Alguses paigutatakse robot mingile ruudule ja ta võib valida mistahes vaba vaiba külgedega paralleelse liikumissuuna. Kui palju on ühikruute, millelt alustades saab robot kogu vaiba ära puhastada? Robot ei pea puhastamise lõpuks jõudma vaiba servale.

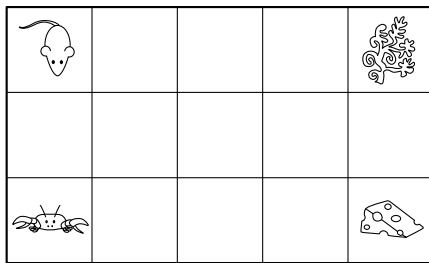
Ülesanne 46J / 36S. Asugu ringjoonel ω punktid A, B, C, D, E, F kellaosuti liikumise suunas. Lisaks eeldame, et kõõl AD on ringjoone ω diameeter, kõõl BF lõikab kõõlusi AD ja CE vastavalt punktides G ja H , ning $\angle FEH = 56^\circ$, $\angle DGB = 124^\circ$ ja $\angle DEC = 34^\circ$. Leia $\angle CEB$.

Ülesanne 47J / 37S.

Kümme inimest – viis naist ja nende abikaasad – võtsid osa E üritusest. On teada, et ükski abielupaar ei võtnud osa samast üritusest, iga ülejäänud inimeste paar (k.a samast soost koosnevad) võtsid osa täpselt ühest ühisest üritusest ning leidub inimene, kes osales ainult kahel üritusel. Leia vähim võimalik ürituste arv E .

Ülesanne 48J / 38S. Õpilastele anti kolmekohaline arv \overline{abc} , mille korral $0 < a < b < c$. Ülesanne oli seda arvu korrutada arvuga 6 ja siis vahetada sajaliste number künneliste numbriga. Juku tegi vea ja vahetas numbrid enne korrutamist, aga sai õige tulemuse! Leia \overline{abc} .

Ülesanne 49J / 39S. Mõõtmetega 5×3 ruudustiku ülemises vasakpoolses ruudus on hiir, kes tahab jõuda alumises parempoolses ruudus asuva juustutükini. Alumises vasakpoolses ruudus on krabi, kes tahab jõuda ülemises parempoolses ruudus asuvate vetikateni. Hiir ja krabi liiguvad igal sekundil samaaegselt: hiir ühe ruudu võrra paremale või alla, krabi ühe ruudu võrra vasakule või üles. Mitmel viisil saavad loomad jõuda oma toiduni ilma samale ruudule sattumata?



Ülesanne 50J / 40S. Leia positiivsete täisarvude $n \leq 1000$ arv, mille korral arv $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ jagab arvu n .
Märkus. Sümbol $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa, ehk suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x .

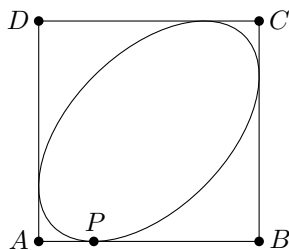
Ülesanne 51J / 41S. Leia kõik reaalarvud m , mille korral võrrandi

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

lahendid on mingi täisnurkse kolmnurga küljepikkusteks.

Ülesanne 52J / 42S. Korvis on rohelised ja punased õunad, seejuures nende hulgas vähemalt üks punane ja vähemalt kaks rohelist. Tõenäosus, et juhuslikult valitud õun on punane on 42 korda suurem, kui tõenäosus, et kaks juhuslikult valitud õuna (tagasipanekuta) on mõlemad rohelised. Kui palju rohelisti ja kui palju punaseid õune on korvis?

Ülesanne 53J / 43S. Miljonär tahab lasta oma aeda ehitada ellipsikujulise ujumisbasseini. Bassein peab asuma mõõtmetega $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ ruudu $ABCD$ sees ja puutama ruudu kõiki külgi; puutepunkt P küljega AB peab asuma 2.5 m kaugusel punktist A . Miljonäri aednik teab, kuidas konstrueerida ellipsit, kui on antud fookused ja punkt ellipsil; tänu sümmeetriale on tal vaja teada ainult fookuste vahelist kaugust. Leia see kaugus meetrites.



Ülesanne 54J / 44S. Jada (a_n) on antud seostega $a_1 = 1$ ja $a_n = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \rfloor$ kui $n > 1$. Leia a_{1000} .

Märkus. Sümbol $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa, ehk suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x .

Ülesanne 55J / 45S. Leia kõigi selliste 4×4 tabelite arv, mille iga element on mittenegatiivne täisarv, ning

- iga rida ja iga veerg sisaldab ülimalt kaks nullist erinevat arvu;
- iga rea ja iga veeru elementide summa on 3.