1J. feladat Petike menő srác az iskolában, így mindig csak felemás színű zoknikat hord. Ruhásszekrénye mélyén összesen 30 darab piros színű, 40 darab zöld színű és 40 darab kék színű zokni található, azonban a szekrény egy sötét padláshelységben helyezkedik el. Petike egyesével veszi ki a zoknikat a szekrényből anélkül, hogy meg tudná állapítani a kivett zokni színét. Legalább hány zoknit kell kivennie ahhoz, hogy biztosan legyen nála 8 pár felemás színű zokni. (Egy zoknit legfeljebb csak egy párba lehet beleszámolni.)

Eredmény: 48

Megoldás: Ha Petike kiveszi az összes zöld színű zoknit, valamint 7 darab piros színűt, akkor még éppen nem áll a rendelkezésére 8 felemás színű pár, így 47 kivett zokni még nem feltétlen elégséges. De hogyha 48 darab zoknit vesz ki, akkor minden bizonnyal van legalább $\frac{48}{3} = 16$ egyforma színű kivett zokni, és van továbbá legalább $48 - 8 = 40$ kivett zokni, amelynek a színe ettől különbözik, így biztosan tud majd Petike 8 felemás színű zoknipárt összeállítani.

2J. feladat Legyenek x és y pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $x^2 + 2y^2 = 2468$. Adjuk meg x-et, hogyha tudjuk, hogy egyetlen megfelelő (x, y) pár létezik. Segítségképpen: $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

Eredmény: 30

Megoldás: A megadott $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$ azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$2468 = 2(28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2.$$

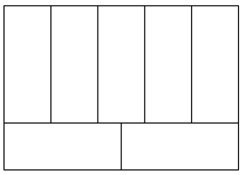
Mivel tudjuk, hogy egyetlen megfelelő számpár létezik, így azt kapjuk, hogy $x = 30$.

3J. feladat Digitális óránk a pontos időt órákban és percekben mutatja a „24 órás” formátumnak megfelelően. Egy nap során hány percben lehet rajta látni az 5-ös számjegyet?

Eredmény: 450

Megoldás: Két óraérték esetén látható a teljes óra alatt az 5-ös számjegy, az 5-ös és a 15-ös érték során. Ez önmagában 120 percet jelent. A nap további részében az 5-ös számjegy minden óra utolsó 10 percében látható (ez $22 \cdot 10 = 220$ perc), valamint a fennmaradó 50 percekben még 5 további perc során lehet látni (ez még $22 \cdot 5 = 110$ perc). Tehát összesen éppen 450 percről van szó.

4J. feladat Egy 136 cm kerületű nagy téglalap az ábrán látható módon fel lett osztva 7 egybevágó kisebb téglalapra.



Mekkora a nagy téglalap területe cm^2-ben mérve?

Eredmény: 1120

Megoldás: Mivel a kis téglalapok oldalainak aránya $2 : 5$, jelöljük a hosszukat $2x$-szel és $5x$-szel. A nagy téglalap oldalainak hossza tehát $10x$ és $7x$, így a nagy téglalap kerülete $2 \cdot (10x + 7x) = 34x$. Ez alapján tehát $x = 4$, vagyis a nagy téglalap területe $10 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1120$.

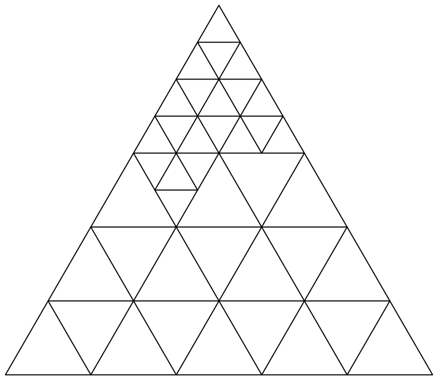
5J. feladat Csokoládés dobozunk alakja éppen egy s cm oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög. Összesen $2n$ darab egyenlő oldalú háromszög alakú csokoládé van a dobozban, amik együtt kitöltik a rendelkezésre álló helyet: n darab 1 cm oldalhosszúságú és n darab 2 cm oldalhosszúságú. Mekkora a lehető legkisebb szóba jöhető s értéke?

Eredmény: 10

Megoldás: Legyen a a kicsi, 1 cm oldalhosszúságú háromszög alakú csokoládé területe. Ekkora a nagyobb csokoládé területe $4a$, az összes csokoládé együttes területe tehát $na + 4na = 5na$, a doboz területe pedig s^2a hiszen a doboz alakja is hasonló a kis csokoládé alakjához, a hasonlóság aránya pedig éppen s. Tehát azt kaptuk, hogy $5n = s^2$, így s az 5 többszöröse lehet csupán.

Belátható, hogy nem lehet 5 nagy csokoládét elhelyezni az 5 cm oldalhosszúságú dobozban, emiatt $s \neq 5$. Azonban

20 kicsi, és 20 nagy csokoládét már egyszerűen el lehet helyezni egy 10 cm oldalhosszúságú dobozban.



6J. feladat Petike most már felnőtt, emiatt jelenleg csak egyforma színű zoknikat hajlandó viselni. A nagymamája jóvoltából rengeteg új zoknit is kapott, így immáron 20 barna színű, 30 piros színű, 40 zöld színű, 40 kék színű, 30 fekete színű és 20 fehér színű zokni található a ruhásszekrényében. Azonban a szekrénye továbbra is a sötét padlástérben van. Legalább hány zoknit kell Petikének kivennie ahhoz, hogy biztosan legyen 8 pár páronként egyforma színű zoknija, hogyha továbbra sem látja, hogy milyen színű zoknikat vesz ki? (Egy zoknit legfeljebb csak egy párba lehet beleszámolni.)

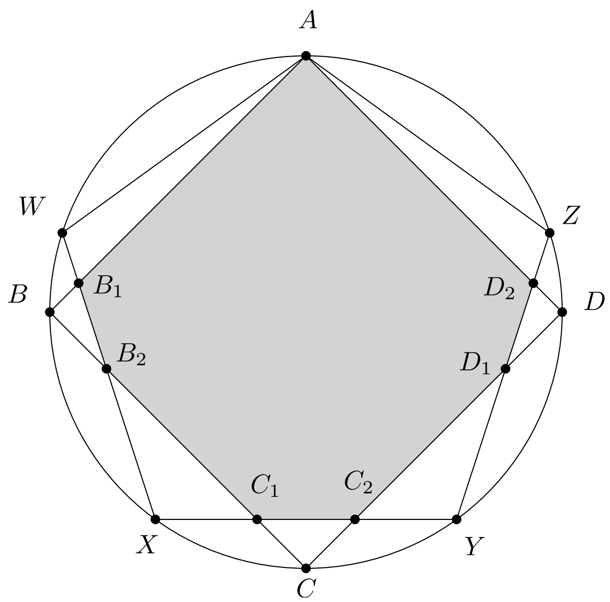
Eredmény: 21

Megoldás: Egyfelől tetszőleges számú zokni esetében a kiválasztott zoknik száma előáll a páros sok, egymással párt formáló zoknik számának, valamint a néhány további, pár nélküli zokni számának az összegeként (ez utóbbi szám a színek száma miatt legfeljebb 6). Ha Petike 21 zoknit vesz ki, akkor nem lehetséges, hogy van 6 olyan kivett zokni, aminek nincsen párja, hiszen $21 - 6 = 15$ nem páros. Így legfeljebb 5 darab pár nélküli zokni van nála, a fennmaradó zoknik pedig $\frac{21-5}{2} = 8$ darab páronként egyforma színű párt alkotnak. Másfelől pedig 20 zokni kivétele nem elégséges, mivel lehet, hogy ekkor Petike például kivett 7 pár fehér zoknit, valamint 6 további zoknit, minden színből egyet. Vagyis a megoldás 21.

7J. feladat Egy négyzet és egy szabályos ötszög ugyanazon köréírt körrel rendelkeznek, továbbá van egy közös csúcsuk is. Mekkora a legnagyobb belső szöge annak a sokszögnek, amely a szóban forgó négyzet és szabályos ötszög metszeteként áll elő?

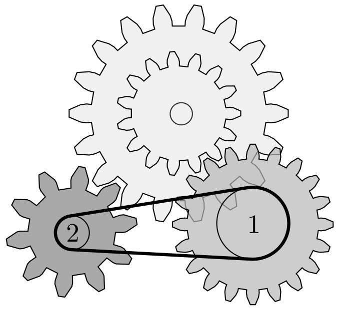
Eredmény: 153°

Megoldás: Jelöljük a csúcsokat az ábrának megfelelően. Ekkor az $AB_1B_2C_1C_2D_1D_2$ sokszög lesz a négyzet és a szabályos ötszög metszete.



Mivel az alakzat az AC egyenesre szimmetrikus, így elegendő meghatározni a belső szögeket az A, B_1, B_2 és C_1 csúcsoknál. Világos, hogy az első értéke éppen 90° a legutolsóé pedig 135°. Mivel B_2D_1 párhuzamos XY-nal, azt kapjuk, hogy $D_1B_2B_1\sphericalangle = YXW\sphericalangle = 108°$, továbbá, mivel $C_1B_2D_1\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 45°$ ($B_2D_1 \parallel BD$), a B_2-nél levő belső szög 153°. Végül a B_1BB_2 háromszög derékszögű, ami alapján könnyen meghatározható, hogy a B_1-nél levő belső szög 117°. Tehát a legnagyobb szög ezek közül 153°.

8J. feladat Az 1-gyel jelzett kör átmérője 48 mm. Mekkora legyen a 2-vel sorszámozott kör átmérője, hogy a berendezés működőképes legyen?



Eredmény: 20 mm

Megoldás: A fogaskerekek megszámolásával könnyen meghatározható, hogy az 1-es kör egy teljes fordulata a kettős fogaskerék $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$-nyi fordulatát eredményezi. Hasonló okoskodással a kettős fogaskerék egy teljes fordulata esetén a 2-es kör $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ fordulatot tesz meg. Emiatt az 1-es kör egy teljes fordulata a 2-es kör $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$-nyi fordulatát eredményezi. Tehát a 2-vel sorszámozott kör kerülete az 1-gyel sorszámozott kör kerületének $\frac{5}{12}$-ed része kell, hogy legyen. A kerületek aránya megegyezik az átmérők arányával, ami alapján könnyen meghatározható, hogy a 2-es kör átmérője $\frac{5}{12} \cdot 48$ mm $= 20$ mm.

9J. feladat A 62 napos júliusi és augusztusi nyári vakációjára Robi pontos tervet készített arról, hogy mely napokon fog hazudni, és mely napokon fog igazat mondani. Valamennyi $1 \leq k \leq 62$ esetén a vakáció k-adik napján azt mondta, hogy legalább k napon tervezett hazudni. Hányszor hazudott ezen kijelentések során?

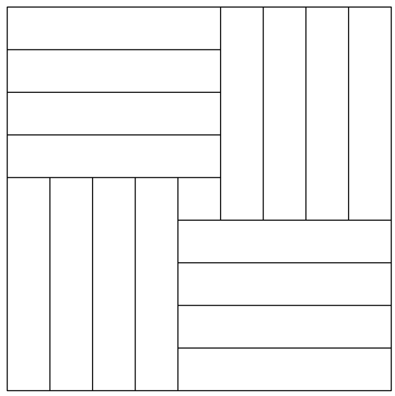
Eredmény: 31

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha Robi igazat mondott egy nap, akkor az összes azt megelőző napon igazat kellett mondania. Tehát hogyha csupán $k < 31$ napon mondott igazat, akkor az ellentmondásba kerülne azzal a ténnyel, hogy $62 - k > 31$ napon hazudott. Hasonlóan, ha több, mint 31 napon mondott igazat, akkor túl keveset kellett volna hazudnia. Következésképpen pontosan 31 napon hazudott.

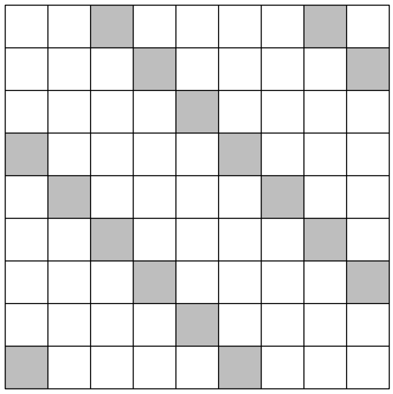
10J. feladat A torpedó játékban az ellenfelünk elrejtett egy anyahajót, aminek egy 5×1 vagy 1×5 méretű blokk felel meg valahol a 9×9-es táblán. Legalább hányszor kell lőnünk (tehát kiválasztanunk egy cellát a táblán) ahhoz, hogy biztosan eltaláljuk az anyahajót legalább egyszer?

Eredmény: 16

Megoldás: A 9×9-es tábla ábrának megfelelő felosztása mutatja, hogy 16 lövés szükséges, hiszen minden 5×1-es téglalapot legalább egyszer el kell találnunk.



De 16 lövés elegendő is, amint az az alábbi ábráról leolvasható.



Így a megoldás 16.

11J / 1S. feladat Mi a legnagyobb lehetséges értéke azon a, b és c különböző pozitív egész számok legnagyobb közös osztójának, amelyekre fennáll, hogy $a + b + c = 2015$?

Eredmény: 155

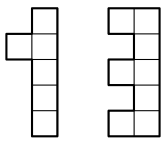
Megoldás: Mivel $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015 = a + b + c = \text{lnko}(a, b, c) \cdot (a_0 + b_0 + c_0)$ alkalmas különböző pozitív egész a_0, b_0 és c_0 számokra, ezért $a_0 + b_0 + c_0 \geq 6$. Emiatt $\text{lnko}(a, b, c)$ értéke legfeljebb $5 \cdot 31 = 155$ lehet. Ez a maximum elérhető, hogyha tetszőleges, 13 összegű különböző pozitív egészeket választunk. Például $a_0 = 1$, $b_0 = 5$ és $c_0 = 7$ választással $a = 1 \cdot 155$, $b = 5 \cdot 155$ és $c = 7 \cdot 155$, s egy megfelelő számhármashoz jutunk.

12J / 2S. feladat Egy vasüzem ellátásáért felelős vonat egy mozdonyból (ami mindig a vonat elején található) és 6 tehervagonból áll, ez utóbbiak mindegyike vagy szenet, vagy vasat tartalmaz rakományként. Ádám le akarta fotózni a vonatot, de nem sikerült a teljes szerelvényt lefényképeznie, csupán egy vasat szállító vagon, és közvetlenül mögötte két szenet szállító vagon látszik a fényképén. A különböző tehervagonok nem teljesen szimmetrikusak, így biztos, hogy a fémet szállító vagon volt a három közül legelöl. Hány féle különböző vonatot lehet lefényképezni úgy, hogy ugyanazt a képet kapjuk, mint amit Ádámnak sikerült?

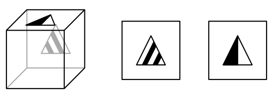
Eredmény: 31

Megoldás: Négy lehetséges helyen képzelhető el a lefényképezett $V - Sz - Sz$ tehervagon-sorozat, és mindegyik esetében 2^3 féle képpen lehet kipótolni a hiányzó vagonokat. Azonban így a $V - Sz - Sz - V - Sz - Sz$ vagonkombinációt kétszer számoltuk. Tehát a különböző szóba jöhető vonatok száma $4 \cdot 8 - 1 = 31$.

13J / 3S. feladat Egy néhány azonos kockából épített tárgy hátulról nézve „1”-esnek néz ki, felülről nézve pedig „3”-asnak (lásd ábra). Hány kocka látható a tárgyban a jobb oldalról nézve, hogyha tudjuk, hogy a lehető legtöbb kockát használtuk fel a tárgy megalkotásához?



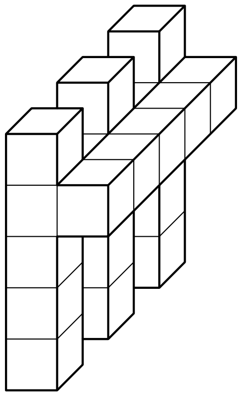
Megjegyzés: Megjegyzés: A lenti ábrán illusztrációként fel lett tüntetve egy kocka, valamint ugyanezen kocka hátulról, majd felülről nézve.



Eredmény: 17

Megoldás: Világos, hogy az objektum elfér egy két kocka széles, öt kocka magas és öt kocka hosszúságú dobozban. Vágjuk félbe, és vizsgáljuk meg a két, egyenként $1 \times 5 \times 5$ méretű részét külön-külön. Hogyha elölről nézzük az objektumot egy „1”-es tükörképét láthatjuk, tehát a jobb oldali felében egy kocka látható elölről és öt kocka látható felülről. Ez csak úgy tehető meg, hogyha egymás mögé helyezünk el sorban 5 kockát. Hasonló okoskodással a bal oldali feléről az mondható el, hogy öt kocka látható elölről, és három kocka látható felülről, tehát úgy helyezhetjük el a lehető legtöbb kockát, hogyha három oszlopban egyenként 5 kockát rakunk egymásra.

Az így kapott objektum látható az alábbi ábrán, világos módon 17 kocka látható benne jobb oldalról nézve.



14J / 4S. feladat Azt mondjuk, hogy egy n pozitív egész szám *finom*, hogyha a számjegyeinek összege osztható 17-tel, és ugyanez teljesül $(n+10)$-re is. Melyik a legkisebb finom szám?

Eredmény: 7999

Megoldás: Jelöljük $Q(r)$-rel az r szám számjegyeinek összegét. Hogyha az n számban a tizesek helyiértékén 9-től különböző számjegy áll, akkor $Q(n+10) = Q(n)+1$. Emiatt a tizesek helyiértékén szükségszerűen 9-es kell, hogy szerepeljen. Hogyha a százasok helyiértékén 9-től különböző számjegy szerepel, akkor $Q(n+10) = Q(n) - 8$, de, ha a százasok helyiértékén 9-es áll, azonban az ezresek helyiértékén nem, akkor $Q(n+10) = Q(n) - 17$, így elérhető, hogy mind $Q(n)$, mind pedig $Q(n+10)$ osztható legyen 17-tel. Ahhoz, hogy n a lehető legkisebb legyen, tegyük fel, hogy a fentebb vázolt helyzet áll fenn, továbbá, hogy $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$. A tizesek és százasok helyiértékén álló számjegyeket nem számolva a számjegyek összege $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$, ami azt jelenti, hogy két további számjegy elegendő. Világosan látható tehát, hogy $n = 7999$ a keresett szám.

15J / 5S. feladat Egy busztársaság az A és D városok között üzemeltet buszjáratokat, a B és C városok érintésével (ebben a sorrendben). A buszjegy ára egyenesen arányos a buszon utazott távolsággal. Például, egy A várostól C városig történő buszozás ugyanannyiba kerül, mint egy A városból B városba, majd egy B városból C városba történő buszozás együttvéve. Továbbá a társaság nem forgalmaz retúrjegyeket, csak vonaljegyeket. Laura szorgalmasan gyűjti a jegyeket, az a célja, hogy minden lehetséges árú jegyet összegyűjtsön az utazás irányától függetlenül. Eddig sikeresen félretett 10, 40, 50, 60 és 70 értékű jegyeket. Mi lehet a hiányzó jegy értéke?

Eredmény: 20, 110

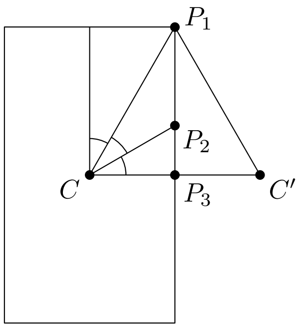
Megoldás: Tegyük fel először, hogy Lauránál van a lehetséges legdrágább jegy (tehát az A városból D városba menőé), így ennek az ára 70. Mivel ez az ár a három kisebb részhez (tehát AB-hez, BC-hez és CD-hez) tartozó jegyárak összege, amelyek közül legalább kettő már Laura tulajdonában van, látható, hogy az egyetlen lehetséges árazása ezen három jegynek: 10, 20 és 40, így a hiányzó jegyár 20. Egyszerűen megmutatható, hogy ezen árak választása mellett létezik a jegyek árainak olyan kiosztása, amely minden szükséges feltételnek eleget tesz.

Amennyiben nincsen Lauránál a legdrágább lehetséges jegy, úgy a 70 költségű jegy biztosan egy egy várost érintő utazásra szól; az egyetlen lehetséges felosztás a birtokolt jegyekkel $10+60$. Ezek alapján kikövetkeztethető, hogy a hiányzó szegmens útiköltsége 40, emiatt a leghosszabb távolság megtételének ára $10+40+60 = 110$. Újfent egyszerűen látható, hogy létezik egy minden feltételnek eleget tevő realizációja ezen árazásnak.

16J / 6S. feladat Egy óraboltban Hannának szemet szúrt egy karóra, amely egy átlátszó, négyszögletű dobozba van csomagolva úgy, hogy a doboz középpontja és az óra középpontja (a pont, ami körül a mutatók forognak) egybeesik. A doboz rövidebbik oldala 3 cm hosszú. Hannának az is feltűnt, hogy délben az óramutató a rövidebbik oldal felezőpontja felé mutat, 1 órakor pedig a doboz sarka felé. Milyen messze van a doboz határán azon pont, amelyre az óramutató 1 órakor mutat, attól a ponttól, amelyre 2 órakor mutat?

Eredmény: $\sqrt{3}$ cm

Megoldás: Legyen P_x a doboz határának azon pontja, ahova az óramutató mutat x órakor, és legyen C a doboz középpontja. Mivel $P_2CP_1\sphericalangle = P_3CP_2\sphericalangle = 30°$, ezért P_2 az egyenlő oldalú $CC'P_1$ háromszög középpontja, ahol C' a C tükörképe a P_3 pontra. Látható, hogy a keresett P_1P_2 távolság $\frac{2}{3}$-a azon egyenlő oldalú háromszög magasságának, amelynek az oldalhossza 3 cm, azaz $P_1P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3$ cm $= \sqrt{3}$ cm.



17J / 7S. feladat Adjuk meg azt a kilencjegyű számot, amelynek számjegyei az $1, 2, \ldots, 9$ számok egy olyan elrendezésben, hogy bármely két egymást követő számjegyből képzett kétjegyű szám előáll $k \cdot l$ alakú szorzatként, ahol $k, l \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Eredmény: 728163549

Megoldás: Legyenek $x, y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ különböző számjegyek. Az xy párt nevezzük *érvényes*nek, hogyha létezik $k, l \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, hogy $10x + y = kl$. Mivel az egyetlen 9-es számjegyet is tartalmazó érvényes pár a 49, a 49-es blokk szükségképpen a keresett kilencjegyű szám (z) legvégén kell, hogy szerepeljen. Két lehetséges érvényes pár van a 7-es számjeggyel, 27 és 72. Mindkettő nem szerepelhet z-ben, továbbá z legvége már ismert, így a keresett z szám 72-vel kell, hogy kezdődjön. Mivel a 8-as számjegyet tartalmazó érvényes párok a 18, 28, 48 és 81, továbbá a 4-es számjegy már fel lett használva a 49-es blokkban, egyedül a 281-es blokk képzése jöhet szóba. Így $z = 7281 \ldots 49$. Most már csak a fennmaradt három számjegyet (3, 5 és 6) kell megfelelően elhelyezni. Mivel sem 13, sem 34 nem érvényes pár, valamint az egyetlen olyan érvényes xy pár, amelyben $y = 3$ szerepel az $x \in \{5, 6\}$ megkötéssel a 63, ezért $z = 728163549$, amely eleget tesz a feladat feltevéseinek.

18J / 8S. feladat Határozzuk meg a legnagyobb p prímet, amely kisebb, mint 210 és $(210 - p)$ összetett szám!

Megjegyzés: Megjegyzés: Figyelem! Az 1 se nem prím, se nem összetett.

Eredmény: 89

Megoldás: Ahelyett, hogy a legnagyobb p prímszámot keresnénk, keressük a legkisebb megfelelő n összetett számot (tehát, hogy $210 - n$ prím). Tudjuk, hogy $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, emiatt ha n 2-vel, 3-mal, 5-tel vagy 7-tel osztható, akkor $210 - n$ is, tehát ekkor nem lehet prím. Így a legkisebb szóba jöhető összetett szám n-re 11^2, tehát $p = 210 - 121 = 89$, ami prím.

19J / 9S. feladat Egy általános iskola vezetősége elhatározta, hogy vesz valamennyi ceruzát és szétosztja az elsős tanulók között, akik három osztályban tanulnak: A, B és C. Hogyha minden tanulónak ugyanannyi ceruzát adnának, akkor mindenki kilencet kapna. Amennyiben minden ceruzát az A osztály tanulói kapnának, úgy minden tanuló ebben az osztályban harminc ceruzához jutna. Amennyiben pedig minden ceruzát a B osztály tanulóinak adnák, úgy minden itt tanuló diák harminchatot tudhatna a magáénak. Hány ceruzát kapna egy C osztályban tanuló diák, hogyha csak a C osztályban tanulók kapnák meg a ceruzákat?

Eredmény: 20

Megoldás: Legyen T a ceruzák száma összesen, és jelölje a, b és c a megfelelő osztályban tanuló diákok számát. A feladat alapján elmondható, hogy $T = 9(a + b + c)$, $T = 30a$ és $T = 36b$. Keressük a T/c értéket. Az $a = T/30$ és $b = T/36$ helyettesítésekkel élve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{3}{10}T + \tfrac{1}{4}T + 9c, \\ \tfrac{9}{20}T &= 9c, \\ \tfrac{T}{c} &= 20. \end{aligned}$$

20J / 10S. feladat Adjuk meg az összes olyan négyjegyű négyzetszámot, amelynek az első két számjegyéből, illetve az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám is nemnulla négyzetszám (az utolsó két számjegyből képzett szám első számjegye lehet nulla)!

Eredmény: 1681

Megoldás: Mivel $k \geq 50$ esetén $(k + 1)^2 - k^2 > 100$, $50^2 = 2500$ az egyetlen 25-tel kezdődő négyzetszám (hasonló igaz a 3600, 4900, 6400 és 8100 számokra is). Így a keresett szám szükségképpen 16-tal kezdődik. Az egyetlen olyan négyzetszám, amely 1600 és 1700 között van, az a $41^2 = 1681$, ami nyilvánvalóan eleget tesz a feladat feltevéseinek.

21J / 11S. feladat Egy sofőr a főúton állandó sebességgel szokott haladni két város között. Sajnos a főutat néhány szakaszon éppen javítják, így ezen részeken a sebességét 25%-kal csökkentenie kellett. Emiatt azonban annyi idő alatt, amennyi idő alatt általában megteszi a két város közötti távolságot, most csupán az útnak a hathetedét tudta megtenni. Eddig az időpontig az ideje hanyad részét töltötte a felújítás alatt álló szakaszokon történő áthaladással?

Eredmény: 4/7

Megoldás: Legyen x azon időtartam, amelyet a felújítás alatt álló szakaszokon történő áthaladással töltött. Ekkor $1 - x$ az az időtartam, amely alatt a főút többi részén haladt át. Így

$$\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + 1 - x,$$

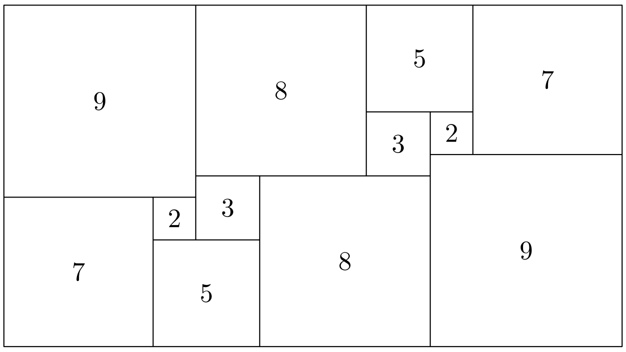
tehát $x = 4/7$.

22J / 12S. feladat Egy egész oldalhosszúságú téglalapot felosztottunk 12 négyzetre, melyeknek az oldalai 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9 és 9 egység hosszúak. Mekkora a téglalap kerülete?

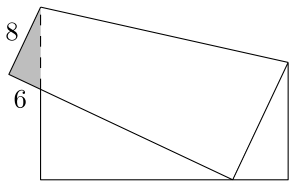
Eredmény: 90

Megoldás: A négyzetek területét összeadva azt kapjuk, hogy a téglalap területe $464 = 2^4 \cdot 29$. A téglalap mindegyik oldala legalább 9 egység hosszúságú, mivel tartalmaz 9 egység oldalhosszúságú négyzetet. Így az egyetlen lehetséges előállítása a területének szorzatalakban: $16 \cdot 29$, ami alapján a kerülete 90.

Megjegyzés: Megjegyzés: Létezik megfelelő felbontás, amint azt az ábra is mutatja:



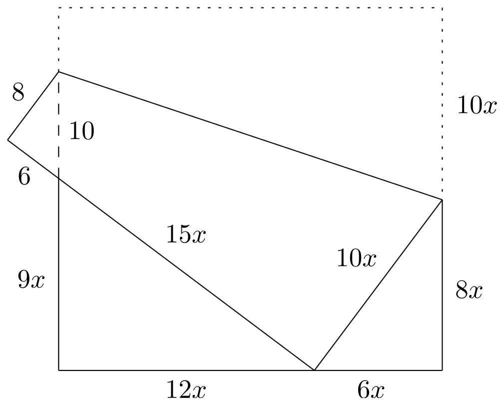
23J / 13S. feladat Négyzet alakú papírlapunkat úgy hajtjuk meg, hogy az egyik csúcsa éppen az egyik oldalára essen. Az ábráról leolvasható, hogy keletkezik egy kis háromszög, amely lelóg az eredeti négyzetről. A háromszög azon négyzeten kívül eső oldala, amelyik a hajtásléllel érintkezik, 8 cm hosszú, a másik négyzeten kívüli oldala pedig 6 cm hosszú.



Mekkora oldalhosszúsággal rendelkezik a papírlapunk?

Eredmény: 36 cm

Megoldás: A szögek alapján elmondható, hogy az ábrán szereplő összes háromszög derékszögű, továbbá egymáshoz hasonló. Hogyha a jobb alsó sarokban található háromszög oldalait $6x$-szel, $8x$-szel és Pitagorasz tétele értelmében $10x$-szel jelöljük, akkor a „visszahajtogatás” után látható, hogy a négyzetünk oldala éppen $18x$. Emiatt a bal alsó háromszög egyik oldala $18x - 6x = 12x$, amint az az alábbi ábrán is látható. Ezen háromszög másik két oldala tehát $9x$ és $15x$ hosszúságú, mivel a hasonlóság aránya 3/2. Így tehát látható, hogy a négyzetünk oldala $15x + 6$ hosszúságú, ami alapján $x = 2$. Emiatt a négyzet oldala 36 cm hosszúságú.



24J / 14S. feladat Egy öreg gőzhajó állandó sebességgel halad egy csatornán. Sanyika meg akarja határozni a hajó hosszát. Mialatt a gőzös lassan halad előre, ő mellette sétál a vízparton a hátuljától egészen az elejéig, szintén állandó sebességgel, s mindeközben összesen 240 lépést tesz meg. Ezután egyből visszafordul, és a hajó orrától egészen a tatjáig sétál ugyanazzal az állandó sebességgel, ezúttal pedig 60 lépést kellett megtennie. Milyen hosszú a hajó lépésekben mérve?

Eredmény: 96

Megoldás: Mire Sanyika visszaér a hajó hátuljához, összesen 300 lépést tett meg, a hajó pedig eközben $240 - 60 = 180$ lépést haladt előre. Így mialatt Sanyika megtesz 60 lépést, a hajó $180 : 5 = 36$ lépést halad előre. Sanyika azonban 60 lépés alatt visszaért a hajó tatjához, így a hajó szükségképpen $60 + 36 = 96$ lépés hosszúságú.

25J / 15S. feladat $137641 = 371^2$ a legkisebb olyan hatjegyű szám, amelyből kihúzható három, páronként különböző számjegy oly módon, hogy megkapjuk a négyzetgyökét: $\cancel{1}37\cancel{6}\cancel{4}1$. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen tulajdonsággal rendelkező hatjegyű számot!

Eredmény: $992016 = 996^2$

Megoldás: Legyen $(1000 - n)^2$ a keresett szám ($n \geq 1$). Az $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ esetekben ki tudjuk számítani a szám értékét, felhasználva az alábbi azonosságot: $(1000 - n)^2 = 1000 \cdot (1000 - 2n) + n^2$. Így $999^2 = 998001$, $998^2 = 996004$, $997^2 = 994009$, $996^2 = 992016$, ... Mivel a 2, 0, 1 számjegyek páronként különbözőek, valamint $99\cancel{2}\cancel{0}\cancel{1}6 = 996$ a 992016 négyzetgyöke, ezért a keresett szám a 992016.

26J / 16S. feladat Lilla beütött valamit a számológépébe, és egy háromjegyű szám jelent meg a kijelzőjén. Patrik, aki vele szemben ült, észrevette, hogy az ő nézőpontjából (tehát fejjel lefelé) egy olyan háromjegyű szám látszik a kijelzőn, amely 369-cel nagyobb a Lilla által beütöttnél. Melyik számot ütötte be Lilla?

Megjegyzés: Megjegyzés: A számológép az ábrán látható módon képes megjeleníteni a számjegyeket:

Eredmény: 596

Megoldás: Vegyük észre, hogyha egy számjegyet a feje tetejére állítunk, akkor vagy egyáltalán nem változik (0, 2, 5, 8), vagy másik számjegy lesz belőle (6, 9), vagy pedig egyáltalán nem lesz belőle számjegy (1, 3, 4, 7). Tehát egy 0, 2, 5, 8 számjegyekből álló számot a feje tetejére állítva ugyanazt a számot kapjuk, mint hogyha felcseréltük volna számjegyei sorrendjét. Ilyen feltételnek eleget tevő két háromjegyű szám különbsége osztható 99-cel, hiszen $(a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 99(c - a)$. Mivel $99 \nmid 369$, ezért a Lilla által beütött szám biztosan tartalmaz 6-ost vagy 9-est.

Ha az első számjegye 9 lenne, akkor a fejjel lefelé tekintett verziója 6-ra végződne, így a különbség csak úgy lehet 369, hogyha a számunk 7-re végződik, de a 7 nem megengedett számjegy. Hasonló érveléssel látható, hogy 9-es nem szerepelhet az egyesek helyiértékén sem, továbbá azt is láthatjuk, hogy a szám 6-sal sem kezdődhet, sőt a középső számjegye sem lehet 6. Összesen két eset maradt hátra, hogyha 9-es van a tizesek helyiértékén, vagy hogyha 6-os van az egyesek helyiértékén, de mindkét esetben ugyanahhoz a megoldáshoz jutunk, mégpedig az 596-hoz.

27J / 17S. feladat Na-boi szigetén három család él, mindegyik családnak két fiú és két leány gyermeke van. Hányféleképpen alkothat ezen 12 fiatal hat mátkapárt, hogyha testvérek egymással nem házasodhatnak össze?

Eredmény: 80

Megoldás: Jelöljük a családokat A-val, B-vel és C-vel. Hogyha az A család fiúgyermekei egy másik család (az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy B család) leánytestvérpárját veszi el, akkor az A család leánygyermekeinek szükségképpen a C család fiaihoz kell hozzámenniük, különben a C család egyik fia kénytelen lenne saját hugát vagy nővérét feleségül venni. Következik tehát, hogy a B család fiai és a C család lányai kelnek egybe, így tehát összesen $2 \cdot 2^3 = 16$ féle képpen tudnak ilyen feltevések mellett házasodni, hiszen kétféleképpen lehet párosítani a családokat és minden leánytestvérpárnak kétféle lehetőség áll rendelkezésére a megfelelő család fiai közül.

Azonban, hogyha az A család fiai különböző családok lányaival kelnek egybe, leánytestvéreiknek is ugyanezt a stratégiát kell követniük, hogy elkerüljük a családon belüli házasságokat. A két fiúnak együttesen 8 lehetősége van feleséget választania, és ugyanez teljesül a két A családbeli lányra is. Ezután a párosítás után mind a B, mind pedig a C családból rendelkezésre áll még pontosan egy fiú és egy leány, akiket összesen egyféleképpen lehet a megengedett módon párosítani. Így ebben az esetben $8 \cdot 8 = 64$ lehetőségünk van összesen.

Vagyis mindösszesen $16 + 64 = 80$ féle lehetséges házasság képzelhető el a szigeten.

28J / 18S. feladat András és Béla egy hatalmas pizzát sütöttek, amely összesen 50 darab egybevágó, körcikk alakú szeletből áll. A pizzára az olivabogyókat úgy helyezték el, hogy az óramutató járásával megyegyező körüljárással, sorban egymás után $1, 2, 3, \ldots, 50$ szem kerüljön az egyes pizzaszeletekre. Szeretnék elfelezni a teljes pizzát egy egyenes vágással a szeletek mentén, de oly módon, hogy András felén kétszer annyi olivabogyó legyen összesen, mint Béláén. Összesen hány olivabogyó található a vágás mentén található négy pizzaszeleten?

Eredmény: 68, 136

Megoldás: Sorszámozzuk a pizzaszeleteket a rajtuk található olivabogyók számának megfelelően. Világos, hogy a felezés nem történhet az 1 és 50 sorszámú szeletek (vagy éppen a 25 és 26 sorszámú szeletek) között, mivel

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) < 26 + 27 + \cdots + 50.$$

Így feltehető, hogy a felezővonal mentén fekvő szeletek sorszáma n, $n+1$, $n+25$ és $n+26$ alakú, ahol $1 \le n \le 24$. Ezen számok összege tehát $4n + 52$. Figyelembe véve, hogy $(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+25) = 25n + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 25(n+13)$ és $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 25 \cdot 51$, két lehetőség képzelhető el

$$25(n+13) = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 17 \quad \text{vagy} \quad 25(n+13) = \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 34.$$

Az első lehetőségből azt kapjuk, hogy $n = 4$, emiatt a keresett összeg $4n + 52 = 68$. A második lehetőség pedig az $n = 21$ és $4n + 52 = 136$ megoldásokat adja. Tehát a feladatnak két megoldása van, mégpedig 68 és 136.

29J / 19S. feladat Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $19p + 1$ egy egész szám köbe!

Eredmény: 421

Megoldás: Ha a p prímszám kielégíti a kívánt feltételt, akkor létezik egy $k > 2$ egész, amelyre $k^3 = 19p + 1$. Így elmondható, hogy

$$19p = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1).$$

A $k > 2$ feltétel értelmében a jobb oldalon szereplő szorzótényezők mindegyike a $19p$ valódi osztója. Mivel $19p$ két prímszám szorzata, ezért két lehetőség áll előttünk: $k - 1 = 19$, vagy $k^2 + k + 1 = 19$. Az első esetből következi, hogy $k = 20$ és $p = 400 + 20 + 1 = 421$, ami valóban prímszám. A második eset a $k^2 + k - 18 = 0$ másodfokú egyenlethez vezet, amelynek nincsen egész megoldása! Emiatt $p = 421$ az egyetlen megoldás.

30J / 20S. feladat Az $ABCD$ paralelogrammában tekintsük azt az E pontot, amely az AD oldalon helyezkedik el oly módon, hogy $2 \cdot AE = ED$, továbbá azt az F pontot, amely az AB oldalon található, és teljesül rá, hogy $2 \cdot AF = FB$. A CF és CE szakaszok a BD átlót a G és H pontokban metszik. Az így keletkező $AFGHE$ ötszög területe hányad része az $ABCD$ paralelogramma területének?

Eredmény: $\frac{7}{30}$

Megoldás: Az alábbiakban szögletes zárójellel fogjuk jelölni az egyes alakzatok területét. Mivel az EHD és a CHB háromszögek hasonlóak, ezért azt kapjuk, hogy

$$\frac{BH}{HD} = \frac{BC}{ED} = \frac{AD}{\frac{2}{3} \cdot AD} = \frac{3}{2}$$

Az FBG és a CDG háromszögek hasonlósága alapján tehát elmondható, hogy $\frac{DG}{GB} = \frac{3}{2}$. Emiatt a $DH = BG = \frac{2}{5} \cdot DB$ és a $HG = \frac{1}{5} \cdot DB$ azonosságok teljesülnek. Tekintve, hogy

$$[ECD] = \frac{2}{3}[ACD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = [FBC],$$

azt kapjuk, hogy

$$[AFGHE] = [AFCE] - [GCH] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)[ABCD] = \frac{7}{30}[ABCD].$$

31J / 21S. feladat Adjuk meg a legnagyobb olyan ötjegyű számot, amely csak nemnulla számjegyeket tartalmaz, és teljesül rá, hogy

- Az első három számjegyéből alkotott szám az utolsó két számjegyéből alkotott számnak éppen a 9-szerese.
- Az utolsó három számjegyéből alkotott szám az első két számjegyéből alkotott számnak éppen a 7-szerese.

Eredmény: 85595

Megoldás: Legyen $\overline{abcde}$ egy olyan ötjegyű szám, amelyre teljesül, hogy $\overline{abc} = 9\cdot\overline{de}$ és $\overline{cde} = 7\cdot\overline{ab}$. Ekkor

$$63\cdot\overline{de} = 7\cdot\overline{abc} = 70\cdot\overline{ab} + 7c = 10\cdot\overline{cde} + 7c = 1007c + 10\cdot\overline{de},$$

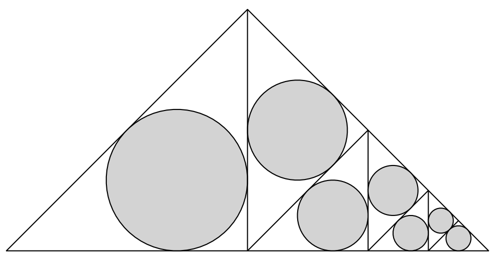
így $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Hasonlóan meghatározható, hogy $\overline{ab} = 17c$. Hogyha $c \geq 6$, akkor a $17c$ és $19c$ számok nagyobbak, mint 100. Mindezek alapján elmondható, hogy a c lehetséges legnagyobb értéke 5, vagyis $17119c$ lehetséges legnagyobb értéke 85595.

32J / 22S. feladat Tizenkét okos ember egy kör alakú asztalnál ül. Mindegyikőjük kap egy kártyát véletlenszerűen a tizenkét kártyát tartalmazó paklinkból, amelyben kilenc üres kártyalapon kívül van egy J, egy Q és egy K karakterrel ellátott speciális kártya. Mindegyikőjük megnézi a saját kártyalapját, majd továbbadja azt a jobboldali szomszédjának. Ezt szépen folytatják, mindeközben minden egyes kártyalap megtekintése után egyszerre fel kell emelnie azoknak a kezüket, akik tudják, hogy kinél melyik speciális kártya van az adott pillanatban. Négy kártyalap megtekintése után senki nem emelte fel a kezét. Az ötödik kártya megtekintése után egy ember emelte fel a kezét. Ezután x ember emelte fel a kezét hat kártyalap megtekintése után, majd pedig y ember emelte fel a kezét hét kártyalap megtekintése után. Határozzuk meg xy értékét!

Eredmény: 42

Megoldás: Az első ember, aki feltette a kezét, az első olyan ember volt, aki látta mindhárom speciális kártyát. Ez az ember szükségképpen speciális kártyát kapott az ötödik körben, mivel különben hamarabb is feltette volna már a szomszédja a kezét. Továbbá biztos, hogy az első körben is egy speciális kártya volt nála, mivel különben a baloldali szomszédja már egy körrel hamarabb láthatta volna mindhárom speciális kártyát. Jelöljük C_1-gyel az első kapott speciális kártyát, C_3-mal az ötödiknek kapott kártyát, amely szintén speciális volt és legyen C_2 a korábbi kettő között valamikor kézhez kapott speciális kártya. Az ötödik kör után pontosan azok tudják kikövetkeztetni, hogy hol jár a három speciális kártya, akiknél már járt a C_2-es speciális kártya, és még egy másik kártya, hiszen a C_1-es és C_3-as speciális kártyák helyzete mindenki számára ismert, a rajtuk szereplő karakterek azonban nem. Ezek alapján könnyen látható, hogy pontosan hat ilyen ember van a hatodik körben, és hét ilyen ember van a hetedik körben, így a keresett szorzat értéke 42.

33J / 23S. feladat Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapja 1 egység hosszúságú. Eme háromszögben az ábrán látható módon felvettünk hét körlapot:



Mekkora a körlapok összterüete?

Eredmény: $\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \pi\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} = \pi\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} = \pi\frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$

Megoldás: Hogyha egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget két egybevágó háromszögre vágunk szét, akkor a keletkezett háromszögek az eredetihez hasonlóak lesznek, a hasonlóság aránya pedig $\sqrt{2}:1$, emiatt a beírt körök sugarainak az aránya is ennyi. Így minden egyes további beírt kör területe fele akkora, mint az őt megelőző kör területe. Tehát a körök összterülete a félbevágások során nem változik semmit. Emiatt elegendő meghatározni az eredeti háromszög beírt körének a területét. Ezen kör sugara könnyen meghatározható a körhöz húzott érintőszakaszok alapján, hiszen, mivel az eredeti háromszög befogóinak a hossza éppen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Pitagorasz tétele értelmében, és az ezen oldalakhoz, mint érintőkhöz húzott sugarak egy négyzetet határoznak meg a befogókkal, a keresett sugár értéke $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, így a keresett terület

$$\pi \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}.$$

34J / 24S. feladat Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $(p + 11)$ osztója a $p(p + 1)(p + 2)$ számnak!

Eredmény: 7, 11, 19, 79

Megoldás: Mivel p prím, ezért vagy egyenlő 11-gyel (ami világos módon kielégíti a megadott feltételt), vagy pedig relatív prím $(p + 11)$-hez képest. Az utóbbi esetben a vizsgált szorzat akkor és csak akkor osztható $(p + 11)$-gyel, hogyha $(p + 1)(p + 2)$ osztható vele. Ez az egyszerűsített szorzat modulo 11 tekintve megegyezik $(-10) \cdot (-9)$-cel, emiatt $p + 11 \mid 90$. Ez pedig csupán a $p \in \{7, 19, 79\}$ esetekben teljesül.

35J / 25S. feladat Az ászkarákoknak tizennégy lábuk van összesen. Ászkarákmamának rengeteg egyforma zoknija és cipője van a gyermekei számára a közelgő hideg télre való tekintettel. Jancsi fiának kikötötte, hogy a zoknikat és a cipőket tetszőleges sorrendben húzhatja fel a lábaira, azonban minden egyes lábára előbb egy zoknit kell felhúznia, s csak utána vehet rá egy cipőt. Hányféleképpen öltözhet fel a kis Jancsika, hogyha minden lábára kell, hogy kerüljön zokni és cipő is?

Eredmény: $\frac{28!}{2^{14}}$

Megoldás: Jancsika lábainak felöltöztetése egy 28 elemű rendezett listaként kezelhető, amelynek elemei a 14 zokni és a 14 cipő, továbbá az egyes lábakhoz tartozó zoknik az ugyanahhoz a lábhoz tartozó cipőket megelőző helyen kell, hogy szerepeljenek. Az első zokni-cipő pár számára összesen $\binom{28}{2}$ lehetséges hely képzelhető el. A második zokni-cipő párnak már csak $28 - 2 = 26$ hely áll rendelkezésre, így $\binom{26}{2}$ lehetőség képzelhető el. A gondolatmenetet folytatva a tizennegyedik pár számára $\binom{2}{2} = 1$ lehetőség marad hátra, a keresett megoldás tehát

$$\binom{28}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{24}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{28!}{2^{14}}.$$

36J / 26S. feladat Legyen x egy valós szám, amelyre teljesül, hogy $x^3 + 4x = 8$. Határozzuk meg $x^7 + 64x^2$ értékét!

Eredmény: 128

Megoldás: Elegendő behelyettesíteni a $x^3 = 8 - 4x$ kifejezést a meghatározandó mennyiségbe az alábbi módon:

$$x^7 + 64x^2 = x \cdot (x^3)^2 + 64x^2 = x(8 - 4x)^2 + 64x^2 = 64x + 16x^3 = 16(x^3 + 4x) = 128.$$

37J / 27S. feladat Az egyenlő szárú ABC háromszög alapja legyen AB. Legyen D az $\angle ACB$ szög szögfelezőjének és az AB oldalnak a metszéspontja, továbbá legyen E a $\angle BAC$ szög szögfelezőjének és a BC oldalnak a metszéspontja. Határozzuk meg a $BAC\sphericalangle$ szög értékét, hogyha tudjuk, hogy $AE = 2 \cdot CD$!

Eredmény: 36°

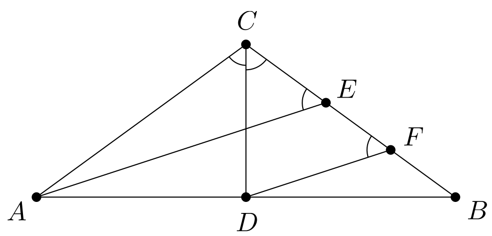
Megoldás: Legyen F azon pont a BC egyenesen, amelyre $AE \parallel DF$. Mivel $DF = \frac{1}{2}AE = CD$, ezért az FCD háromszög egyenlő szárú, alapja FC. Legyen $\varphi = BAC\sphericalangle$. Ekkor

$$AEC\sphericalangle = DFC\sphericalangle = FCD\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 90° - \varphi.$$

Továbbá $CAE\sphericalangle = \frac{1}{2}\varphi$ alapján az AEC háromszöget használva azt kaphatjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\varphi + 3(90° - \varphi) = 180°,$$

vagyis $\varphi = 36°$.



38J / 28S. feladat Legyen (a_n) valós számokból álló sorozat, amelyre $a_1 = 2015$, továbbá $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$ minden $n \geq 1$ esetén. Határozzuk meg a_{2015} értékét!

Eredmény: $\frac{1}{1008}$

Megoldás: Képezve az n-re és $(n-1)$-re vonatkozó rekurzív formula különbségét, azt kapjuk, hogy $a_n = n^2 \cdot a_n - (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$, egyszerűsítés után pedig $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$. Így

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)},$$

tehát $a_{2015} = \frac{2 \cdot 2015}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{1008}$.

39J / 29S. feladat Anna és Bea a következő játékot találták ki: két egyforma, tizenkét oldalú szabályos dobókocka oldalait ciánkék, magenta és sárga színekre festették oly módon, hogy mindhárom szín jelen van mindkét dobókockának legalább az egyik oldalán, továbbá az első dobókockán pontosan négy darab sárga színű oldal található. Hogyha ezen két dobókockát eldobva ugyanaz a szín látható legfelül rajtuk, akkor Anna nyer, különben pedig Bea. Tegyük fel, hogy a színek úgy vannak elosztva a dobókockákon, hogy a két lány egyenlő esélyekkel rendelkezik. Hány darab magenta színű oldallapja van a második dobókockának?

Eredmény: 1, 9

Megoldás: Jelöljük az egyes kockák megfelelő színű oldalainak a számát sorrendben c_1-gyel, m_1-gyel, s_1-gyel, c_2-vel, m_2-vel és s_2-vel. Tudjuk, hogy $c_1 + m_1 + s_1 = 12$, $c_2 + m_2 + s_2 = 12$, és, hogy $s_1 = 4$. Továbbá a lehetséges $12^2 = 144$ kockadobásnak pontosan a fele eredményez azonos színű oldalpárt, így

$$c_1c_2 + m_1m_2 + s_1s_2 = 72.$$

Kifejezve a bal oldali kifejezést a c_1, c_2 és m_2 változók és a fenti azonosságok segítségével, azt kapjuk, hogy

$$c_1c_2 - c_1m_2 - 4c_2 + 4m_2 + 48 = 72,$$

egyszerűsítés után pedig

$$(c_1 - 4)(c_2 - m_2) = 24.$$

Kihasználva, hogy $-3 \leq c_1 - 4 \leq 3$ és $-9 \leq c_2 - m_2 \leq 9$, elmondható, hogy $c_2 - m_2$ értéke vagy 8, vagy pedig -8, melyet összevetve a $0 < s_2 = 12 - c_2 - m_2$ feltétellel, azt kapjuk, hogy m_2 értéke vagy 1, vagy pedig 9. Egy egyszerű ellenőrzéssel könnyen meggyőződhetünk róla, hogy mindkét eset lehetséges.

40J / 30S. feladat Egy nagy kerek asztal körül $n > 24$ asszony ül, mindegyikőjük vagy mindig igazat mond, vagy mindig hazudik. Mindegyik asszony a következőket állítja:

- Ő maga igazat mond.
- A tőle 24 hellyel jobbra található asszony hazudik.

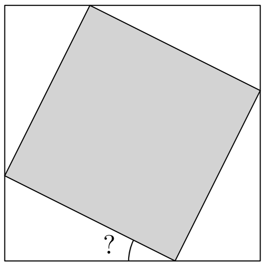
Mekkora a legkisebb n, amely esetében ez megvalósítható?

Eredmény: 32

Megoldás: Válasszunk ki egy asszonyt, és hozzá válasszuk ki a tőle 24 hellyel jobbra ülőt is, majd a tőle 24 hellyel jobbra ülőt is, és így tovább. Néhány ilyen lépés után (jelöljük a számát s-sel), visszajutunk az eredeti asszonyhoz. Világos, hogy ez az s a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy $24s$ az n egész számú többszöröse. Így $s = n/d$, ahol d az n és a 24 legnagyobb közös osztója.

Vegyük észre, hogy az asszonyok igazmondása egy ilyen lépegetés során szükségképpen váltakozik, tehát egy asszony akkor és csak akkor igazmondó, hogyha a tőle 24 hellyel jobbra ülő asszony hazug. Hogyha s páratlan lenne, ez ellentmondáshoz vezetne, így s biztosan páros. Tehát n-nek osztója kell legyen egy olyan 2-hatvány, amely a 24-nek már nem osztója. Ezek alapján az n legkisebb lehetséges értéke a 32, könnyen ellenőrizhető, hogy ennyi hellyel létezik megfelelő ültetés.

41J / 31S. feladat Két négyzet közös középponttal rendelkezik, valamint a kisebbik négyzet csúcsai a nagyobbik oldalain találhatóak. Hogyha a kisebbik négyzetet elhagyjuk a nagyobbikból, akkor négy darab egymással egybevágó háromszög marad hátra, továbbá minden egyes hátramaradt háromszög területe a nagy négyzet területének egy tizenketted része. Mekkora fokokban mérve a legkisebb belső szöge egy ilyen hátramaradt háromszögnek?



Eredmény: $15°$

Megoldás: Jelöljük a hátramaradt háromszög befogóinak a hosszát a-val és b-vel (feltehető, hogy $a \leq b$), az átfogóját pedig c-vel. Könnyen látható, hogy a kisebbik négyzet területe éppen kétharmada a nagyobbik négyzet területének, így egy hátramaradt háromszög területe éppen a kisebbik négyzet területének a nyolcada, azaz

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}c^2.$$

Legyen a szóban forgó háromszög legkisebb belső szöge α. Ekkor $a = c\sin\alpha$, valamint $b = c\cos\alpha$, tehát

$$c^2 = 4ab = 4c^2\sin\alpha\cos\alpha = 2c^2\sin 2\alpha,$$

így

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

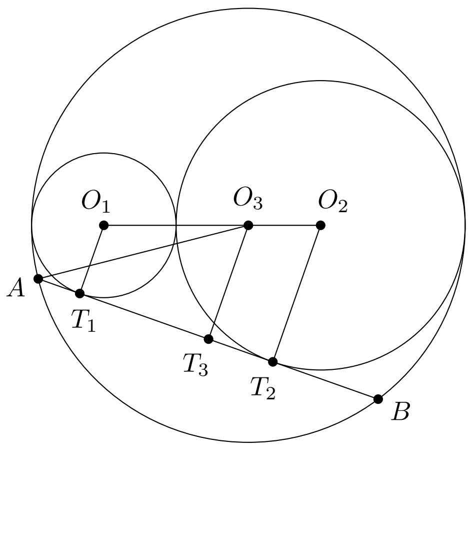
Mivel $\alpha \leq 45°$, ezért világos, hogy $2\alpha = 30°$, ami alapján $\alpha = 15°$.

42J / 32S. feladat Az ω_3 kör sugara 3 egység, ezen kört belülről érintik az ω_1 és ω_2 körök, melyeknek a sugara 1, illetve 2 egység. Emellett az ω_1 és ω_2 egymást kívülről érintik. Az ω_3-on található A és B pontokat úgy választjuk meg, hogy az AB szakasz egy közös külső érintője legyen az ω_1 és ω_2 köröknek. Mekkora az AB szakasz hossza?

Eredmény: $\frac{4}{3}\sqrt{14}$

Megoldás: Legyenek az ω_1, ω_2 és ω_3 körök középpontjai rendre O_1, O_2 és O_3, továbbá legyenek T_1, T_2 és T_3 az O_1, O_2 és O_3 középpontokból az AB szakaszhoz húzott merőlegesek talppontjai (tehát T_1 és T_2 az AB érintőszakasz ω_1-hez, illetve ω_2-höz tartozó érintési pontja). Mivel $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$, $O_1T_1 = 1$, $O_2T_2 = 2$, valamint $O_1O_3 = 2O_2O_3$, továbbá O_1, O_2 és O_3 egy egyenesre esnek, világos, hogy $O_3T_3 = \frac{5}{3}$ (a hasonló háromszögek alapján). Alkalmazva Pitagorasz tételét a AO_3T_3 háromszögre, azt kapjuk, hogy

$$AB = 2AT_3 = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}.$$



43J / 33S. feladat Oidipusz, a rettenthetetlen hős, egy napon összetalálkozott a mágikus szfinxszel, aki az alábbi rejtvényt adta fel neki: a szfinx választott egy kétjegyű egész S számot. Oidipusz választhatott három darab egyjegyű egész számot, $a < b < c$-t és megkérdezhette, hogy az S szám osztható-e velük. Minden egyes választott szám esetében kapott egy igen-nem választ a kérdésére. Ezek után Oidipusz kétségbe esett, mivel pontosan két megfelelő szám létezett az általa kiderített oszthatóságok alapján. Szerencsére a szfinx rájött, hogy hibázott, és téves választ adott neki a b számmal való oszthatósággal kapcsolatban. Így már Oidipusz egyértelműen meg tudta határozni a keresett számot. Mi volt ez a S szám?

Eredmény: 84

Megoldás: A feladat alapján elmondható, hogy pontosan három olyan kétjegyű szám van, amely eleget tesz a megkívánt a-val és c-vel való oszthatósági szabálynak (kettő közülük a szfinx eredeti válaszának felel meg, egy pedig a módosított válasznak). Továbbá az is világos, hogy mind az a-ra vonatkozó kérdésre, mind pedig a c-re vonatkozó kérdésre igenlő választ kellett kapnia, különben biztos, hogy háromnál több lehetséges kétjegyű szám kerülne elő. Tehát ezen három szám biztos, hogy $\text{lkkt}(a, c) = m$ többszörösei. A korábbiak alapján látható, hogy $25 \leq m \leq 33$, de csupán két olyan m érték van ezek között, amely két számjegynek a legkisebb közös többszöröse, mégpedig: $28 = \text{lkkt}(4, 7)$ és $30 = \text{lkkt}(5, 6)$. Az utóbbi eset nem lehetséges, mivel $c - a \geq 2$, következésképpen $a = 4$ és $c = 7$. Hogyha b értéke 5 lenne, akkor nincsen olyan kétjegyű szám, amely mind a-val, mind b-vel, mind pedig c-vel is osztható lenne egyszerre. $b = 6$ esetében pedig a b-re vonatkozó kérdésre adott nemleges válasz megfelel a 28 és 56 számoknak, míg az igenlő válasz esetében az $S = 84$ számot kapjuk megoldásnak.

44J / 34S. feladat Négy ember halad az utcán, mindegyikőjük állandó sebességgel. Az első autót vezet, a második motorkerékpárral utazik, a harmadik egy kis robogóval közlekedik, a negyedik pedig biciklit teker. Az autós délben, 12 órakor találkozott a robogóval, délután 2-kor a biciklissel és délután 4-kor a motorkerékpárossal. A motorkerékpáros délután 5-kor talákozott a robogóssal és délután 6-kor a kerékpározó személlyel. Mikor találkozott a bicikli és a robogó?

Eredmény: Délután 3 óra 20 perc

Megoldás: Mivel az idő folyását nem befolyásolja a választott referenciapont, ezért feltehető, hogy az autó egyáltalán nem is mozog. Ezen feltevés mellett a motorkerékpárnak egy órába telt az autóval történő találkozástól számítva a robogóval összefutni, a robogónak pedig öt órára volt szüksége mindehhez, tehát a motorkerékpár ötször olyan gyorsan haladt, mint a robogó. Hasonló okoskodással meghatározható, hogy a motorkerékpár kétszer olyan gyors volt, mint a bicikli, tehát a robogó és a bicikli sebességének az aránya $2 : 5$.

Amennyiben a robogónak t időre volt szüksége, hogy az autótól eljusson a biciklivel történő találkozási pontig, akkor a biciklinek ugyanehhez a táv megtételéhe $t - 2$ órára volt szüksége. A megfelelő idők aránya éppen a sebességek arányának a reciproka, tehát

$$\frac{t-2}{t} = \frac{2}{5},$$

azaz $t = 10/3$. Kihasználva, hogy a robogó az autóval délben, 12 órakor találkozott, látható, hogy a keresett időpont délután 3 óra 20 perc.

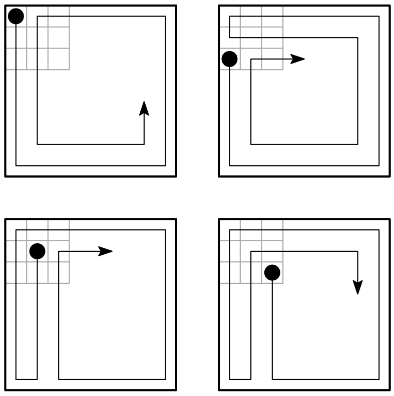
45J / 35S. feladat Lakosztályunk padlóján egy négyzet alakú szőnyeg van kiterítve, amelynek oldalai huszonkét méter hosszúak. Egy automata porszívó azt a feladatot kapta, hogy porszívózza ki a szőnyeget. A könnyebbség kedvéért a szőnyeg fel van osztva 484 darab egységnyi négyzetre. Az automata porszívó egységenként takarít az alábbi szabályoknak megfelelően:

- Ha végzett egy egység kitakarításával, arra újfent már nem mehet rá.
- Egy irányba halad mindaddig, amíg el nem ér a szőnyeg széléig, vagy egy már korábban kitakarított egységig.
- Hogyha irányt kell váltania, és két lehetséges opció is a rendelkezésére áll, azt választja, amelyiket szeretné.

Kezdetben az automatát elhelyezzük egy egységen, ahonnan a rendelkezésre álló irányok bármelyikébe folytathatja a munkáját. Hány darab egység van a szőnyegen, amelyről indulva be tudja fejezni a teljes szőnyeg takarítását, hogyha nem szükséges, hogy a szőnyeg szélén végezzen?

Eredmény: 20

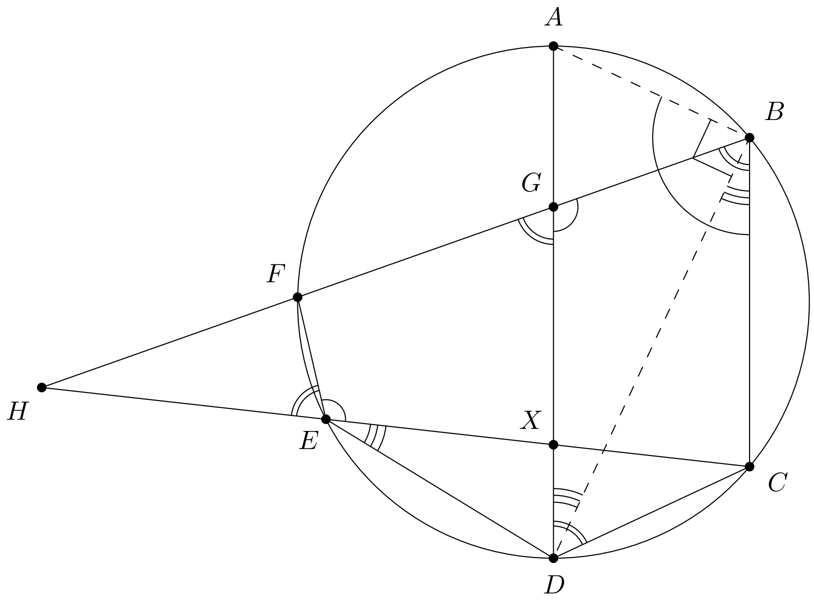
Megoldás: Hogyha az automata porszívó nem valamelyik 3×3 egységnyi négyzet alakú sarokrészből kezd, akkor biztosan fog maradni egy ki nem takarított egység, amikor ugyanis az automata elhagyja a szőnyeg szélét (ami legkésőbb a hetedik fordulásnál bekövetkezik), a fennmaradó, még ki nem tisztított egységek két különálló részre bomlanak szét. Hasonló érveléssel kizárhatóak az $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ és $(3, 2)$ koordinátáknál található egységek, valamint a többi sarokban a velük szimmetrikusan található társaik is az alkalmas kezdőegységek sorából. Azonban az $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 1)$ és $(1, 3)$ koordinátájú egységek megfelelő kezdőhelynek bizonyulnak, szimmetriai megfontolásokból a nekik megfelelő, másik sarokban található egységek is jók lesznek. Tehát összesen $4 \cdot 5 = 20$ megfelelő kezdőegység van a szőnyegen.



46J / 36S. feladat Vegyük fel az óramutató járásával megegyezően sorban az A, B, C, D, E és F pontokat az ω körön. Tegyük fel, hogy AD az ω egy átmérője, BF pedig messe az AD és CE szakaszokat a G és H pontokban. Legyenek továbbá $FEH\sphericalangle = 56°$, $DGB\sphericalangle = 124°$ és $DEC\sphericalangle = 34°$. Mekkora a $\angle CEB$ szög?

Eredmény: 22°

Megoldás: A középponti és kerületi szögek tétele értelmében $CDB\sphericalangle = CEB\sphericalangle$, így elegendő a $CDB\sphericalangle$ szög értékét meghatározni. Legyen X az AD és a CH szakaszok metszéspontja. Vegyük észre, hogy $124° + 56° = 180°$, valamint, hogy $34° + 56° = 90°$. Így tehát $EXGF$ húrnégyszög, ami miatt $AD \parallel BC$. Az ABD háromszög derékszögű, továbbá $DEC\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, vagyis $ABC\sphericalangle = 124°$. Tekintve, hogy $BDA\sphericalangle = DBC\sphericalangle = 34°$ és $CDA\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle = 56°$ ($ADCB$ húrnégyszög), azt kapjuk, hogy $CEB\sphericalangle = CDB\sphericalangle = 56° - 34° = 22°$.



47J / 37S. feladat Tíz felnőtt – öt feleség, és a férjeik – részt vett összesen E eseményen. Tudjuk, hogy egy házaspár sem vett részt ugyanazon az eseményen. Azt is tudjuk, hogy minden lehetséges nem házas pár (azonos nemű párokat is beleértve) részt vett közösen pontosan egy eseményen, valamint, hogy pontosan egy személy volt pontosan két esemény résztvevője. Mekkora az E lehetséges legkisebb értéke?

Eredmény: 14

Megoldás: Jelöljük a házaspárokat rendre (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2) és (e_1, e_2)-vel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a_1 volt az a személy, aki pontosan két eseményen vett részt, továbbá azt is feltehetjük, hogy ezen két esemény közül az elsőn jelen volt b_1, c_1, d_1 és e_1 is, míg a második eseményen a párjaik vettek részt a_1-gyel közösen. Minden további eseményen a $b_1, b_2, \ldots, e_1, e_2$ emberek közül legfeljebb kettő vehetett részt egyszerre, így kellett, hogy legyen legalább 12 esemény még. Továbbá, hogyha a_2 részt vesz bármely 4 diszjunkt eseményen ezek közül, akkor a feladatnak megfelelő szétosztást kapjuk, tehát a legkisebb lehetséges E érték a 14.

48J / 38S. feladat Az iskolában Daniék a következő feladatot kapták: a tanárnő adott nekik egy háromjegyű $\overline{abc}$ számot, amelyre teljesült, hogy $0 < a < b < c$. A feladatuk az volt, hogy szorozzák meg 6-tal, majd cseréljék fel a tízesek és a százasok helyiértékén álló számjegyet. Dani tévedésből a 6-tal való szorzás előtt cserélte fel a számjegyeket, de az eredménye így is helyes lett. Határozzuk meg $\overline{abc}$-t!

Eredmény: 678

Megoldás: Tekintve, hogy $0 < a < b$, elmondható, hogy $b \geq 2$, valamint, hogy $6 \cdot \overline{bac} > 1200$, így a Dani által kapott eredmény egy négyjegyű szám kell, hogy legyen, $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$. Másrészt viszont tudjuk, hogy $6 \cdot \overline{abc} = \overline{dfeg}$. A két azonosságot egymásból kivonva tehát

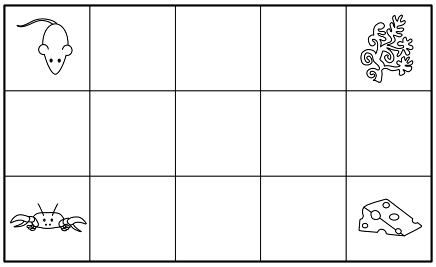
$$6(\overline{bac} - \overline{abc}) = \overline{defg} - \overline{dfeg}.$$

Így $540(b - a) = 90(e - f)$, azaz $6(b - a) = e - f$. Mivel e és f számjegyek, ezért $e - f \leq 9$. Tehát $e - f = 6$, és $b - a = 1$ ($b - a > 0$, hiszen $b > a$). Behelyettesítve a $b = a + 1$ azonosságot az $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$ egyenletbe, látható, hogy

$$\overline{defg} = 6(100(a + 1) + 10a + c) = 660(a + 1) - 6(10 - c).$$

Ez azt jelenti, hogy $\overline{defg}$ legalább 6-tal, de legfeljebb 54-gyel tér el a 660 egy megfelelő többszörösétől. Tudva, hogy $e - f = 6$ és $6 \mid \overline{defg}$, továbbá végignézve a lehetséges $a = 1, 2, \ldots, 7$ eseteket, meghatározható az összes potenciális $\overline{defg}$: 1932, 1938, 2604, 3930, 3936, 4602 és 4608. Ezek közül csupán a $\overline{defg} = 4608$ esetében kapjuk, hogy a $\overline{bac} = \overline{defg}/6 = 768$ számnak csupa nemnulla számjegyei vannak. Könnyen leellenőrizhető, hogy $6 \cdot \overline{abc} = 6 \cdot 678 = 4068 = \overline{dfeg}$.

49J / 39S. feladat Tekintsünk egy 5×3-as rácsot. A rács bal felső sarkában ül egy kisegér, aki el akar jutni a jobb alsó sarokban található sajthoz. Emellett a rács bal alsó sarkában ül egy rákocska, aki pedig a jobb felső sarokban található algalevelet szemelte ki magának. A két állat egyszerre mozog a rácson. Minden másodpercben az egér egy rácsnyit halad jobbra vagy lefelé, a rák pedig egy rácsnyit halad jobbra vagy felfelé. Hányféleképpen érhetik el a céljukat úgy, hogy útközben ne találkozzanak?



Eredmény: 70

Megoldás: Vegyük észre, hogy a két állat csupán a középső sorban tud összetalálkozni. Ezen felül az állatok által megtett utat egyértelműen meghatározzák a középső sorban általuk érintett négyzetek. Világosan látható, hogy az állatok csak akkor nem találkoznak, hogyha a középső sorban tekintett útvonalrészleteik nem metszik egymást, tehát a középső sor diszjunkt szakaszpárjainak a száma érdekel minket végső soron.

Először is tekintsük azt az esetet, amikor is a két állat középső sorban megtett útszakasza között van legalább egy nem használt négyzet. Ekkor a keresett párok száma megadható a $2 \cdot \binom{6}{4}$ képlettel, mivel először is ki kell választani azt a négy függőleges négyzetoldalt, amelyek közre fogják fogni a két állat útját a középső sorban, majd pedig el kell dönteni, hogy melyik állat melyik részt fogja használni (az első állat az első két függőleges oldal közötti négyzet(ek)en halad át, a második állat pedig a fennmaradó kettő közöttin). Amennyiben pedig nincsen kihagyott négyzet a két útrész között, akkor ezt $2 \cdot \binom{6}{3}$ féle módon tudják kivitelezni, immáron három függőleges oldalnak megfelelően.

Összesen tehát $2 \cdot \binom{6}{4} + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$ megengedett útvonalpár van.

50J / 40S. feladat Adjuk meg azon 1000-nél nem nagyobb n pozitív egész számok számát, amelyekre $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ az n egy osztója.

Megjegyzés: Megjegyzés: A $\lfloor x \rfloor$ kifejezés az x egészrészét jelenti, azaz a legnagyobb olyan egész számot, amely nem nagyobb, mint x.

Eredmény: 172

Megoldás: Vegyük észre, hogy $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$ akkor és csak akkor, ha $k^3 \leq n \leq (k + 1)^3 - 1$. Az ennek a kitételnek megfelelő $3k^2 + 3k + 1$ darab számból, minden k-adik osztható k-val, k^3-től kezdődően így összesen $3k + 4$ ilyen szám áll a rendelkezésünkre. Már csak annyi a dolgunk, hogy összeadjuk ezen darabszámokat minden lehetséges k-ra, melyre $(k + 1)^3 - 1 \leq 1000$ (azaz $k \leq 9$), valamint még 1-et hozzá kell adnunk az 1000 miatt, ami világos módon teljesíti a feladat feltételét. Tehát a keresett darabszám

$$1 + \sum_{k=1}^{9} (3k + 4) = 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 172.$$

51J / 41S. feladat Adjuk meg az összes olyan valós m számot, amelyre az alábbi egyenlet gyökei egy derékszögű háromszög oldalhosszainak feleltethetőek meg:

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

Eredmény: 281/2

Megoldás: Legyenek a megadott egyenlet gyökei a, b és c, ezen számok a feladat értelmében egy derékszögű háromszög oldalhosszainak is megfeleltethetőek. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $0 < a, b < c$, így Pitagorasz tétele értelmében fennáll az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés. A Viete formulák alkalmazásával (vagy az $(x - a)(x - b)(x - c)$ szorzat kibontásával és vizsgálatával) azt kapjuk, hogy

$$15\sqrt{2} = a + b + c, \quad m = ab + ac + bc, \quad 195\sqrt{2} = abc.$$

Négyzetre emelve a $15\sqrt{2} - c = a + b$ kifejezést, azt kapjuk, hogy $450 - 30\sqrt{2}c = 2ab$. Az egyenletet c-vel megszorozva, majd behelyettesítve a kapott $abc = 195\sqrt{2}$ összefüggést, az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk

$$\sqrt{2}c^2 - 15c + 13\sqrt{2} = 0,$$

melynek gyökei $c_1 = \sqrt{2}$ és $c_2 = 13\sqrt{2}/2$. A $0 < a, b < c$ és $abc = 195\sqrt{2}$ feltételek értelmében csak a $c = 13\sqrt{2}/2$ gyök valódi, a keresett m szám tehát

$$m = ab + ac + bc = \frac{1}{2} \cdot ((a + b + c)^2 - 2c^2) = \frac{1}{2} \cdot 450 - c^2 = 281/2.$$

52J / 42S. feladat Egy kosárban zöld és piros almák találhatóak, legalább egy darab piros, és legalább két darab zöld alma van benne. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alma piros negyvenkétszer akkora, mint annak a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen (visszatevés nélkül) kiválasztott alma közül mindkettő zöld. Hány zöld és hány piros alma van a kosárban?

Eredmény: 4 zöld és 21 piros

Megoldás: Legyen z a zöld almák száma a kosárban, és legyen p a piros almák száma. A feladat állítása a következő alakban is megadható:

$$\frac{p}{z + p} = 42 \cdot \frac{z \cdot (z - 1)}{(z + p) \cdot (z + p - 1)},$$

azaz

$$p^2 + (z - 1)p - 42z \cdot (z - 1) = 0.$$

Ez utóbbi kifejezés tekinthető egy p változójú, z paraméterrel megadott másodfokú egyenletnek. A diszkriminánsa,

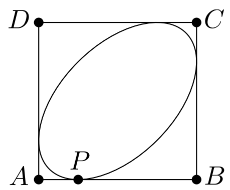
$$(z - 1)^2 + 168z \cdot (z - 1) = 169z^2 - 170z + 1$$

egy egész szám négyzete kell, hogy legyen, különben a gyökök irracionális számok. Tekintve, hogy $z \geq 2$, az alábbi egyenlőtlenségekhez jutunk

$$(13z - 6)^2 = 169z^2 - 156z + 36 > 169z^2 - 170z + 1 > 169z^2 - 208z + 64 = (13z - 8)^2.$$

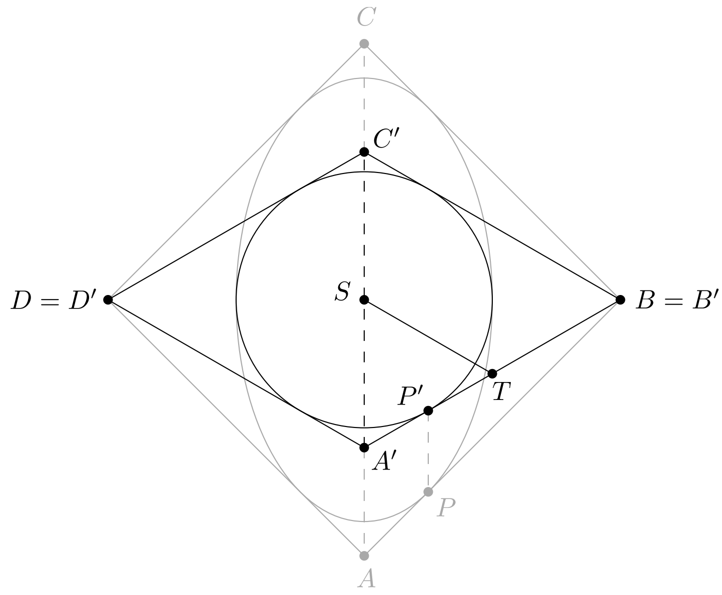
Így $169z^2 - 170z + 1$ meg kell, hogy egyezzen a $(13z - 7)^2$ kifejezéssel, ami alapján $12z = 48$, így $z = 4$. Ekkor a másodfokú egyenlet gyökei -24 és 21, de mivel $p > 0$, az egyetlen lehetséges megoldás az $p = 21$. Tehát 4 zöld és 21 piros alma van a kosárban.

53J / 43S. feladat Pénzes Pál, egy nagyon gazdag úriember, új úszómedencét szeretne a kertjében. Szereti a szimmetrikus dolgokat, így a kertészének azt parancsolta, hogy egy ellipszis alakú medencét hozzon neki létre egy 10 m × 10 m-es $ABCD$ négyzet alakú területen belül. A medencének mind a négy négyzetoldalt érintenie kell, ráadásul az AB oldalt az A csúcstól 2,5 m-re elhelyezkedő P pontban. A kertész pontosan tudja, hogyan ássa ki az ellipszis alakú medencének a helyet, hogyha adva vannak az ellipszis fókuszpontjai, valamint egy pont az ellipszisen. Megállapította, hogy a szimmetrikus elrendezés miatt csupán a fókuszpontok közötti távolságra van szüksége. Segítsünk a kertésznek azzal, hogy meghatározzuk méterben mérve a kívánt távolságot!



Eredmény: 10

Megoldás: Zsugorítsuk mind a négyzetet, mind az ellipszist az AC oldal mentén addig, amíg az ellipszisből kör nem lesz, és jelöljük az így keletkező új pontokat az eredeti jelölések vesszőzött alakjával. Továbbá, legyen S az AC felezőpontja, T pedig az $A'B'$-é.



Mivel $A'P' = \frac{1}{4}A'B'$, látható, hogy $A'P' = P'T$, tehát $SA' = ST$. Ezek alapján $A'C' = B'C'$, valamint az $A'B'C'$ háromszög egyenlő oldalú. Emiatt a zsugorítás aránya

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Mindezekből könnyen meghatározható, hogy a kör sugara (ami mellesleg éppen az eredeti ellipszis fél kistengelyének hossza, b) megegyezik $\frac{1}{4}AC$-vel. A fél nagytengely hossza, a pedig megkapható a fél kistengely hosszának és a kicsinyítés arányának a hányadosaként. Az a és b hosszok ismeretében már csak annyi a dolgunk, hogy meghatározzuk a fókuszpontok távolságát, amelyet az $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ mennyiség (excentricitás) kétszereseként tudunk megadni.

54J / 44S. feladat Az (a_n) sorozatot a következőképpen definiáljuk. Legyen $a_1 = 1$, továbbá

$$a_n = \lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}\rfloor$$

minden $n > 1$ esetében. Határozzuk meg a_{1000} értékét!

Megjegyzés: Megjegyzés: Az $\lfloor x \rfloor$ kifejezés az x egészrészét jelenti, azaz a legnagyobb olyan egész számot, amely nem nagyobb, mint x.

Eredmény: 495

Megoldás: Az első néhány elemet kiírva $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \dots)$ észrevehető, hogy az 1-es szám négyszer ismétlődik meg, a nála nagyobb számok pedig már csak kétszer vagy háromszor ismétlődnek. Igazoljuk indukcióval, hogy a háromszor megjelenő számok éppen a kettőhatványok lesznek!

Tegyük fel, hogy leírtuk a sorozat elemeit egészen az n szám ($n > 1$) legelső megjelenéséig, és tegyük fel, hogy a fentebb leírt módon viselkedett ezidáig a sorozat. Legyen k a legnagyobb olyan egész, amelyre $2^k < n$. Ekkor az összes leírt szám összege nem más, mint

$$s_1 = (1 + 2 + \dots + n) + (1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k) + 1 = n^2 + 2^{k+1}.$$

Mivel $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2n < 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, így $s_1 < (n + 1)^2$, tehát a sorozat következő eleme $\lfloor\sqrt{s_1}\rfloor = n$.

Határozzuk meg a sorozat soron következő elemét is. Most az összeg $s_2 = s_1 + n = n^2 + n + 2^{k+1}$. Ha $2^{k+1} < n + 1$, akkor $s_2 < (n + 1)^2$, tehát a soron következő elem szintén n. Azonban k a legnagyobb olyan egész szám, amelyre teljesül, hogy $2^k < n$, emiatt $2^{k+1} \geq n$. Vagyis ez az eset csak a $2^{k+1} = n$ egyenlőség fennállása esetén teljesülhet. Hogyha n nem egy kettőhatvány, akkor a soron következő elem $n + 1$ lesz, mivel $2^{k+1} < 2n < 3n + 4$, ami ekvivalens azzal, hogy $n^2 + n + 2^{k+1} < (n + 2)^2$.

Még azt kell megmutatni, hogy $n = 2^{k+1}$ esetén háromszor fordul elő az n mielőtt $n + 1$ megjelenhetne. Ez azonban könnyen látható, hiszen ha kiszámítjuk a következő összeget is: $s_3 = s_2 + n = n^2 + 2n + 2^{k+1} = n^2 + 3n$, láthatjuk, hogy $(n + 1)^2 < s_3 < (n + 2)^2$. Ezzel az indukciós lépést is igazoltuk, tehát meghatározható, hogy $a_{1000} = 495$ (mivel $500 = a_{1010} = a_{1009}$).

55J / 45S. feladat Határozzuk meg azon 4×4-es nemnegatív egész számokat taralmazó táblázatok számát, amelyekre teljesül, hogy

- minden sorban és minden oszlopban legfeljebb két nemnulla szám található,
- minden sorban és minden oszlopban az ott található számok összege 3.

Eredmény: 576

Megoldás: Vegyük észre, hogy minden, a feladatnak megfelelő táblázat egyértelműen felbomlik két olyan 4×4-es táblázat elemenkénti összegére, amelyek közül az egyik minden sorban és minden oszlopban pontosan egy darab 1-est tartalmaz, a másik pedig minden sorban és minden oszlopban pontosan egy darab 2-est tartalmaz. Megfordítva pedig, egy ilyen táblapár elemenkénti összege világos módon a feladat feltételeinek eleget tevő táblázatot ad ki. Tehát a keresett darabszám $(4!)^2 = 576$.