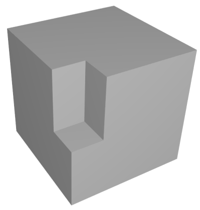
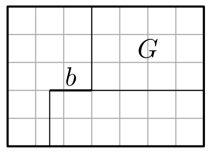
1. Feladat Van egy kocka alakú szikladarabunk, aminek a térfogata $216\,\mathrm{m}^3$. Hány négyzetméter lesz a szikla felszíne, miután kivágunk belőle egy $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ méretű téglatestet az ábrán látható módon?



Eredmény. 216

Megoldás. Mivel $6^3 = 216$, a kocka oldalhossza $6\,\mathrm{m}$. A hiányzó rész nem változtatja meg a kocka felszínét, tehát a felszín $6 \cdot 6^2 = 216\,\mathrm{m}^2$.

2. Feladat Két jó barát, Csabi és Jani megnyerték a lottót, és vettek közösen egy 35×25 méteres, téglalap alakú telket. Egy ikerházat akarnak építeni, és egy közös kertet. A G-vel jelölt kert területe $300\,\mathrm{m}^2$. Az alaprajz terve az ábrán látható:



(Két szomszédos rácsvonal távolsága 5 m.) Mennyivel kell a b falnak belógnia az egyik házrészből a másikba, hogy a két barátnak jutó alapterületek egyenlőek legyenek?

Eredmény. $8.75\,\mathrm{m}$

Megoldás. Egy házrész alapterülete kiszámítható úgy, mint $35\,\mathrm{m} \cdot 25\,\mathrm{m} - 300\,\mathrm{m}^2 = 575\,\mathrm{m}^2$ fele, ami $287.5\,\mathrm{m}^2$ lesz. Mivel a téglalap alakú ház egyik oldala $10\,\mathrm{m}$ hosszú, ezért a másik oldalnak $28.75\,\mathrm{m}$ hosszúnak kell lennie. Így $b = 8.75\,\mathrm{m}$ a megoldás.

3. Feladat A kis Marci le akar menni a strandra. A szekrényében az alábbi a csupa különböző kellékek vannak: 5 úszónadrág, 3 szalmakalap, 4 napszemüveg és 5 póló. Hogy megfeleljen a strandszabályoknak, kötelező fürdőnadrágot felvennie. A szalmakalap, napszemüveg és póló viselése nem kötelező, de ha már felvesz valamit, akkor is csak minden kategóriából legfeljebb egyet. Hányféle megfelelő módon tud Marci megjelenni a strandon?

Eredmény. 600

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha valamelyik kellékből egyiket sem veszi fel, az is tekinthető egy újabb kelléknek. Például a szalmakalapok esetében Marci dönthet úgy, hogy nem visel kalapot, az első kalapot veszi fel, a másodikat vagy a harmadikat, ami összesen 4 lehetőséget ad a kalapok esetében. Ugyanígy 5 lehetőség közül választhat a napszemüvegeknél, és 6 lehetőségből a pólóknál. Mivel Marcinak kötelező fürdőnadrágot viselnie, ezért összesen $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600$ különböző megfelelő öltözékben jelenhet meg a strandon.

4. Feladat Laura egy esőerdőbe ment nyaralni. Minden nap vagy délelőtt, vagy délután, vagy egész nap esett az eső. A vakáció alatt 13 olyan napja volt, amikor nem esett egész nap. Összesen 11 esős délelőttöt és 12 esős délutánt élt át. Hány napig tartott Laura vakációja?

Eredmény. 18 nap

Megoldás. Legyen v a vakáció hossza. Tudjuk, hogy $v - 11$ napon nem esett délelőtt, és $v - 12$ napon nem esett délután. Mivel nincs esőmentes nap, azt kapjuk, hogy

$$(v - 11) + (v - 12) = 13$$

tehát $v = 18$.

5. Feladat Találd meg a legkisebb nemnegatív egész megoldását a következő egyenletnek: $n - 2 \cdot \mathrm{Q}(n) = 2016$, ahol $\mathrm{Q}(n)$ az n számjegyeinek összege.

Eredmény. 2034

Megoldás. Az $n - \mathrm{Q}(n)$ szám mindig osztható 9-cel. Mivel 2016 osztható 9-cel, ebből következik, hogy $\mathrm{Q}(n)$ és emiatt n is oszthatók 9-cel. Nyilván $n < 3000$, így $Q(n) \leq 2 + 9 + 9 + 9$, ezért $n = 2016 + 2\,\mathrm{Q}(n) \leq 2074$. Így már könnyen megtalálható a megoldás, ami 2034.

6. Feladat Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek az első számjegye megegyezik a számjegyeinek a számával?

Eredmény. 111 111 111

Megoldás. Ha n egy nullától különböző számjegy, akkor pontosan 10^{n-1} olyan szám van, ami n-nel kezdődik, és teljesíti a feladatban megadott követelményt, mivel ezek pontosan az $\overline{n0\ldots0}$ és $\overline{n9\ldots9}$ közötti egészek. Így már könnyen látható, hogy

$$1 + 10 + \ldots + 100\,000\,000 = 111\,111\,111$$

ilyen szám van összesen.

7. Feladat Egy felületet sok-sok díszkővel fedtünk le, és ezek közül az egyik szabályos n-szög alakú, amelyet teljesen körbe kerítünk más díszkövekkel. Ha ezt a díszkövet $48°$-kal elforgatjuk a középpontja körül, akkor tökéletesen illeszkedik az eredeti pozíciójába. Mennyi a minimális n, amire ez teljesül?

Eredmény. 15

Megoldás. Egy szabályos n-szög valamely szöggel való elforgatása akkor egybevágósági transzformáció, ha a forgatás szöge az n-szögünk egy oldalához tartozó középponti szögnek a többszöröse. Ennek a szögnek a nagysága $360°/n$, így a legkisebb pozitív n-t keressük, amire

$$\frac{48}{\frac{360}{n}} = \frac{2}{15}n$$

egész. Az eredmény $n = 15$.

8. Feladat Egy napot *boldog*nak nevezünk, ha a dátumot *ÉÉÉÉ.HH.NN* formában leírva az 8 különböző számjegyből áll - itt az *NN* a napot jelöli, a *HH* a hónapot és az *ÉÉÉÉ* az évet, és ha a nap vagy a hónap száma 10-nél kisebb, akkor az első számjegy helyére 0-t írunk. Például 1785.04.26 egy boldog nap volt. Mikor lesz a mai naptól számolva a legközelebbi boldog nap?

Eredmény. 2345.06.17 azaz 2345. június 17.

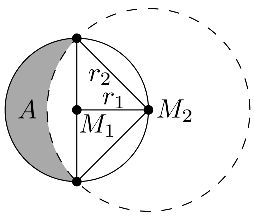
Megoldás. Egy boldog nap hónapja vagy tartalmaz 0-t, vagy 12 lesz, így vagy nem tartalmaz az évszám 0-t, vagy nagyobb lesz, mint 3000. Nézzük az előbbi esetet. Mivel a nap első számjegye a 0, 1, 2, 3 számok közül kerül ki, így az év legalább 2145 kell, hogy legyen, ekkor azonban a nap csak 30 lehet, ami így ütközik a hónap számával. A második lehetséges legkisebb év a 2345. Mutassuk meg, hogy van boldog nap ebben az évben. A nap első számjegye csak az 1 lehet, így az első megfelelő hónap a 06. Végül, ha a napot 17-nek vesszük, akkor ezzel a dátum valóban boldog nap lesz.

9. Feladat Hány olyan sík van, ami egy adott téglatestnek pontosan négy csúcsát tartalmazza?

Eredmény. 12

Megoldás. Hat sík van, ami tartalmazza a téglatest lapjait, továbbá bármely ellentétes oldalpárra van két sík, amik merőlegesek ezekre a lapokra, és tartalmazzák valamelyik lapátlót. Összesen tehát 12 ilyen sík van.

10. Feladat Szandra egy gyönyörű félholdat szeretne rajzolni körzővel és vonalzóval. Először rajzol egy M_1 középpontú és $r_1 = 3$ cm sugarú kört. Aztán beszúrja a körzőt ennek a körnek egy M_2 pontjába, és rajzol egy második kört r_2 sugárral, amely az első kört egy M_1-en átmenő átmérő két átellenes pontjában metszi, ahogy az ábrán látható.



Mi az A-val jelölt félhold területe cm^2-ben számolva?

Eredmény. 9

Megoldás. Hogy megkapjuk A területét, vonjuk ki az M_1 középpontú r_1 sugarú félkörből az M_2 középpontú r_2 sugarú körszelet területét. A körszelet területét megkaphatjuk az r_2 sugarú negyedkör területéből kivonva az egyenlőszárú derékszögű háromszög területét (r_2 befogóval). Mivel a Pitagorasz tétel szerint $r_2^2 = 2r_1^2$, kapjuk hogy a keresett terület

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{4} - r_1^2\right) = r_1^2 = 9\,\mathrm{cm}^2.$$

11. Feladat A Polipkirály minden szolgálójának hat, hét vagy nyolc lába van. A hétlábúak mindig hazudnak, de a hat- vagy nyolclábúak mindig igazat mondanak. Egy napon a Polipkirály magához hívatta négy szolgáját, és megkérdezte tőlük, hogy négyüknek összesen hány lába van. Az első azt állította, hogy a lábak össz-száma 25, a második 26-ot, a harmadik 27-et, a negyedik 28-at mondott. Hány lába van összesen (ezen négy közül) a király igazmondó szolgáinak?

Eredmény. 6

Megoldás. A válaszok közül csak egy lehet igaz, tehát három vagy négy hazug van a szolgák között. De ha mind a négy hazug lenne, akkor összesen 28 lábuk lenne, tehát az utolsó szolga nem hazudott volna - ellentmondás. Tehát, a hazudós szolgáknak összesen 21 lába van. Ha az egyetlen igazmondónak 8 lába lenne, akkor az összeg 29 lenne, ami nincs a válaszok között. Ebből következik, hogy az igazmondónak 6 lába volt. (Továbbá ő volt a harmadik válaszoló.)

12. Feladat Egy bolt tejcsoki, fehér csoki és étcsoki szeleteket árul azonos áron. Egyik nap a bolt 270 értékben adott el tejcsokit, 189-ért fehér csokit és 216-ért étcsokit. Mi lehet a legkisebb értéke az aznap eladott csokiszeletek számának?

Eredmény. 25

Megoldás. Egy csokiszelet ára közös osztója az állításban szereplő összegeknek. Hogy a szeletek száma a lehető legkisebb legyen, az ár a lehető legnagyobb, azaz a legnagyobb közös osztó. Mivel $\text{LNKO}(270, 189, 216) = 27$, megállapítjuk, hogy az eladott csokiszelek száma

$$\frac{270}{27} + \frac{189}{27} + \frac{216}{27} = 25.$$

13. Feladat Egy ötgyermekes apuka süteményeket akar venni a családjának teázáshoz. Sajnos tapasztalatból tudja, hogy ahhoz, hogy elkerülje a gyerekek közti vitát, vagy öt darabot kell szétosztania ugyanabból a fajta süteményből, vagy öt különböző fajta süteményt kell szétosztania. Egy nap, amikor nem tudták eldönteni, hogy milyen süteményt vegyenek, a következő utasítást adta a legkisebb gyermekének: ,,Menj el a cukrászdába, és kérd meg az eladót, hogy adjon neked x darab süteményt véletlenszerűen! Miután visszajöttél, mindegyik gyerek pontosan egy darab süteményt fog kapni, és a többi darabot megkapja anya és apa!" Feltéve, hogy a cukrászda több mint ötféle süteményt ad el, és mindegyik fajta süteményből bőven van készletük, milyen x számot mondhatott az apa a gyermekének, hogy egyszerre elérje, hogy a gyerekek ne vesszenek össze, és a lehető legkevesebb süteményt kelljen megvásárolniuk?

Eredmény. 17

Megoldás. Ha 16 vagy kevesebb süteményt rendelnek véletlenszerűen, akkor az vitát okozhat a gyerekek között: például ha 4 krémest, 4 muffint, 4 zserbót és 4 rétest kapnak, vagy kevesebbet ugyanezekből, akkor nem lesz sem öt darab ugyanabból a fajtából, sem öt különböző fajta. Azonban, ha 17-et rendelnek, akkor a két feltételből az egyik biztosan teljesülni fog, és a gyerekek boldogok lesznek. Ez könnyen belátható, ha van legalább ötféle sütemény, akkor kész vagyunk, ezért tegyük, hogy legfeljebb négy különböző fajta sütemény van. Ekkor viszont biztosan lesz olyan süteményfajta, amiből legalább 5 van, tehát így is elég lesz a 17. Tehát beláttuk, hogy 17 véletlenszerűen kiválasztott süteményt rendeltek.

14. Feladat Hogyan aránylik egymáshoz egy olyan kör és négyzet területe, amelyek kerületei megegyeznek?

Eredmény. $4 : \pi$

Megoldás. Legyen r a kör sugara, és legyen a a négyzet oldala. Mivel $2\pi r = 4a$, ebből már megkapjuk a területek arányát:

$$\frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{2r \cdot \pi r}{a \cdot 2a} = \frac{2r \cdot 2a}{a \cdot \pi r} = \frac{4}{\pi}.$$

15. Feladat Februárban Pali úgy döntött, hogy meglátogatja a Kókusz-szigeteket a magánrepülőgépén. Az európai villájától közép-európai idő (CET) szerint 10:00-kor szállt fel, és a következő nap helyi idő (Kókusz-szigeteki idő, CCT) szerint 5:30-kor szállt le a szigeten. A hazaúton a CCT szerint 8:30-kor szállt fel, és ugyanazon a napon 17:00-kor szállt le a CET szerint. Feltéve, hogy az utazási idő oda és vissza is ugyanannyi volt, mennyi volt az idő a Kókusz-szigeteken, amikor Pali hazaérkezett?

Eredmény. 22:30

Megoldás. Legyen d az utazás ideje és s a közép-európai és a kókusz-szigeteki idő közötti különbség (órákban). Az állítást átírhatjuk egyenletrendszerré a következő módon:

$$\begin{aligned} d + s &= 19.5, \\ d - s &= 8.5 \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy $d = 14$, $s = 5.5$. Ebből pedig következik, hogy 22:30 volt a Kókusz-szigeteken, amikor Pali hazaérkezett.

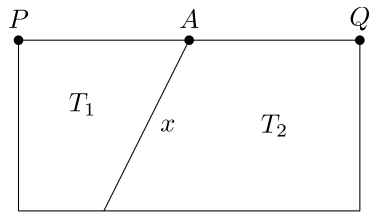
Megjegyzés: A Kókusz-szigeteken tényleg a GMT+6:30 időzónát használják.

16. Feladat A 14, 20 és n számok teljesítik a következő tulajdonságot: ha bárhogyan kiválasztunk kettőt közülük és összeszorozzuk, a szorzat osztható lesz a harmadik számmal. Találd meg n összes lehetséges értékét, amire igaz ez a tulajdonság.

Eredmény. 70, 140, 280

Megoldás. Mivel n osztja $14 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$-et, n prímfelbontásában csak a 2, 5 és 7 prímek szerepelhetnek, ezen belül 5 és 7 legfeljebb egyszer és 2 legfeljebb háromszor. Továbbá, mivel $14 \mid 20n$ láthatjuk hogy n a 7 többszöröse, hasonlóképpen, $20 \mid 14n$-ből következik, hogy $10 \mid n$, tehát $70 \mid n$. Végül megállapíthatjuk, hogy az összes lehetséges szám: 70, 140, 280 kielégíti a feladat feltételeit.

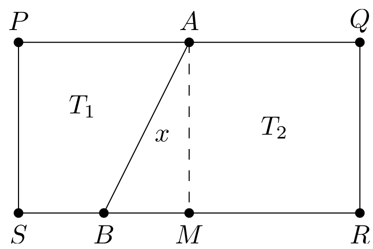
17. Feladat Egy téglalapot két trapézra osztunk egy x szakasszal a képen látható módon. A PA távolság 10 cm és az AQ távolság 8 cm. A T_1 trapéz területe $90\,\text{cm}^2$ és a T_2 területe $180\,\text{cm}^2$.



Mekkora az x szakasz hossza cm-ben?

Eredmény. 17

Megoldás. Jelöljük R-rel és S-sel a téglalap másik két csúcsát, B-vel az x másik végpontját, és M-mel az SR szakasznak azt a pontját, amire $SM = PA = 10$.



Mivel $PQ = 18$, és a $PQRS$ téglalap területe $180 + 90 = 270$, ebből következik, hogy $PS = QR = 270/18 = 15$. A T_2 trapéz területének képlete

$$180 = \frac{1}{2}(BR + AQ) \cdot QR$$

vagyis $BR = 16$. Ebből $BM = BR - MR = 8$ és a Pitagorasz-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{289} = 17.$$

18. Feladat Erzsi epret szed a kertjében. Szét akarja osztani az epret a négy fia között úgy, hogy mindegyik fiú legalább három szemet kapjon, és Aladár többet kapjon, mint Benedek, Benedek többet kapjon, mint Nándor, és Nándor többet kapjon, mint Misi. Mindegyik fiú ismeri a saját epreinek számát, az összes szétosztott eper számát és a fenti feltételeket. Adjunk meg egy szétosztást a négy fiú között úgy, hogy Erzsi a lehető legkevesebb epret ossza ki, teljesüljenek az előbbi feltételek, és egyik fia se tudja meghatározni az összes testvéréről, hogy ki mennyi epret kapott?

Eredmény.

$(M, N, B, A) = (3, 5, 6, 8)$

Megoldás. Jelölje A Aladár epreinek számát, nyilván $A \geq 6$. Esetvizsgálattal láthatjuk, hogy Erzsi nem oszthat szét kevesebb, mint 22 epret: Ha $A = 6$, akkor egyetlen lehetőség van, $(3, 4, 5, 6)$. Ha $A = 7$ akkor a lehetséges szétosztások $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 6, 7)$, $(3, 5, 6, 7)$ és $(4, 5, 6, 7)$, ezekben mind különböző az eprek számának összege, így Aladár meg tudja határozni a szétosztást. Hasonlóan, ha $A = 8$ vagy $A = 9$, akkor kevesebb mint 22 eperből a $(3, 4, 5, 8)$, $(3, 4, 6, 8)$ és $(3, 4, 5, 9)$ szétosztások lehetségesek, itt is Aladár el tudja dönteni, melyik eset áll fenn.

Viszont, ha az összeg 22, a $(3, 5, 6, 8)$ szétosztás kielégíti a feltételeket: Aladár és Misi nem tudja megkülönböztetni $(3, 4, 7, 8)$-től, míg Nándor és Benedek gondolhat a $(4, 5, 6, 7)$ szétosztásra.

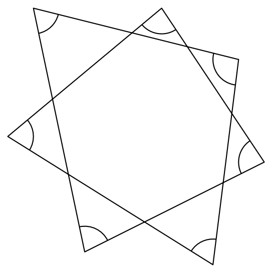
Hátramarad megmutatni, hogy 22 eper másféle szétosztásai nem megfelelők: $(3, 4, 5, 10)$, $(3, 4, 6, 9)$ és $(4, 5, 6, 7)$ esetében Aladár meg tudja határozni a szétosztást, $(3, 4, 7, 8)$ esetében pedig Benedek tudja, hogy ki mennyit kapott.

19. Feladat Felírjuk az összes egész számot 1-től 1000-ig egymás után az óramutató járásával megegyező irányban egy körvonal mentén. Ezután megjelölünk néhány számot: először az 1-est, majd az óramutató járásával megegyezően haladva a kör mentén minden tizenötödik számot megjelölünk (16, 31, és így tovább). Ezt így folytatjuk egészen addig, amíg olyan számot kellene megjelölnünk, amit már korábban megjelöltünk. Összesen hány szám marad jelöletlenül a fenti eljárás elvégzése után?

Eredmény. 800

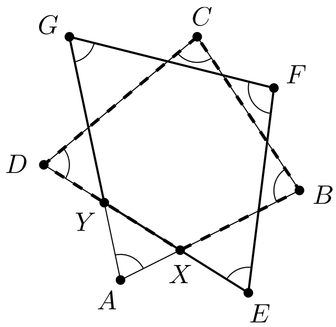
Megoldás. Az első körben minden olyan számot megjelölünk, amely $15k+1$ alakú (ahol k egy egész szám), elsőnek az 1-gyet, utolsónak a 991-et megjelölve. A következő kört a 6-tal kezdjük, és a 996-tal fejezzük be, megjelölve minden $15k+6$ alakú számot. Végül a harmadik kört a 11-gyel kezdjük, és a 986-tal zárjuk (a $15k+11$ alakú számokat megjelölve), és ez az utolsó szám, amit megjelölünk. Vegyük észre, hogy pontosan azokat a számokat jelöltük meg, amelyek felírhatók $5k+1$ alakban, amiből következik, hogy pontosan az ötödét jelöltük meg a körön lévő számoknak. Így azt kapjuk, hogy $4/5 \cdot 1000 = 800$ szám maradt jelöletlenül.

20. Feladat Adjátok meg fokban az ábrán látható hétágú csillag hét jelölt belső szögének az összegét!



Eredmény. 540°

Megoldás. Jelöljük a csillag csúcsait az ábrán látható módon az $A, B, \ldots, G$ betűkkel, és jelölje X, Y rendre a DE szakasz metszéspontjait az AB, AG szakaszokkal.



Legyen S a kérdéses összeg. Mivel mind az $XBCD$ négyszög, mind az $YEFG$ négyszög belső szögeinek összege 360°, így láthatjuk, hogy

$$S + \angle BXY + \angle XYG - \angle XAY = 2 \cdot 360°.$$

Azonban $\angle BXY = 180° - \angle AXY$ és $\angle XYG = 180° - \angle XYA$, így

$$\angle BXY + \angle XYG - \angle XAY = 360° - (\angle AXY + \angle XYA + \angle XAY) = 180°.$$

Tehát ebből már következik, hogy $S = 540°$.

21. Feladat Diákoknak azt a feladatot adták, hogy számolják ki az 1, 3, 6, 7, 8, 10 számok számtani közepét. Luca egy hibás módszerrel próbálta megoldani a feladatot: először kiválasztott kettőt a számok közül, és azoknak vette a számtani közepét. Aztán az így kapott eredménynek és egy, még ki nem választott számnak vette a számtani közepét, és ezt így folytatta, amíg fel nem használta az összes számot. Mi a hiba lehető legnagyobb abszolútértéke (hiba alatt a Luca által kapott eredmény és a helyes megoldás különbségét értjük)?

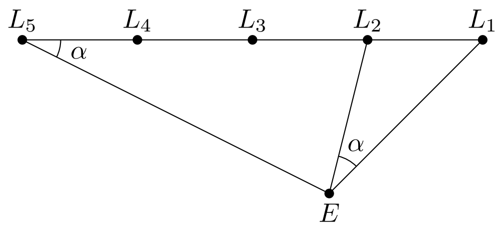
Eredmény. 17/6

Megoldás. Könnyen látható, hogy Luca módszere valójában a következő: valamilyen sorba rendezi a számokat, legyen ez $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, és kiszámolja a következő kifejezést:

$$S = \frac{a_1}{2^5} + \frac{a_2}{2^5} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^3} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_6}{2^1}.$$

Ezek közül a sorba rendezések közül a növekvő sorrendre veszi fel S a legnagyobb értéket, mivel a legnagyobb számot 2-vel osztjuk, a második legnagyobbat 4-gyel, és így tovább. Hasonlóan S a legkisebb értéket a csökkenő sorrendre veszi fel. Nyilván ezen extrém esetek valamelyikében fogja felvenni a hiba a legnagyobb értéket. A megadott számok számtani közepe 35/6. Ha a növekvő sorrendet választjuk, akkor $S = 67/8$ lesz az eredmény, amelyre a hiba 61/24. Ha a csökkenő sorrendet választjuk, akkor $S = 3$-at kapunk, amire a hiba 17/6 lesz, ez a nagyobb a két érték közül, és így ez lesz a keresett érték is.

22. Feladat Egy egyenes útszakasz egyik oldalán öt jelzőlámpa (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) helyezkedik el sorban 12 méterenként. Az út másik oldalán van egy fagyizó. Ha Géza a fagyizó E-vel jelölt bejáratánál áll, akkor az L_1L_2 szakaszt $\alpha = 27°$ szögben látja. Ha az L_5 pontban áll, akkor az L_1E szakaszt szintén 27° szögben látja.



Mekkora az L_1 és E közötti távolság?

Eredmény. 24 m

Megoldás. Az EL_1L_2 és EL_1L_5 háromszögek hasonlók, mivel az α és az $\angle L_5L_1E$ szögek mindkettőnek belső szögei. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{EL_1}{L_2L_1} = \frac{L_5L_1}{EL_1} \quad \text{azaz} \quad EL_1^2 = L_2L_1 \cdot L_5L_1 = 12 \cdot 48 = 576,$$

ami megadja a keresett távolságot, ami $EL_1 = 24\,\text{m}$.

23. Feladat Klári 1-től 17-ig kiválasztott két különböző egész számot, és összeszorozta őket. Meglepődve tapasztalta, hogy a szorzat megegyezik a megmaradó tizenöt szám összegével. Add meg azt a két számot, amelyet Klári kiválasztott.

Eredmény. 10 és 13

Megoldás. Jelöljük a-val és b-vel a feltételt teljesítő számokat. Az első 17 egész szám összege 153, ezért a $153-(a+b) = ab$ egyenletet kell megoldanunk. Átrendezve, és hozzáadva 1-et mindkét oldalhoz azt kapjuk, hogy $154 = ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$. Mivel $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ és $2 \le (a+1), (b+1) \le 18$, így az egyetlen lehetséges szorzatra bontás a $154 = 11 \cdot 14$. Tehát a kívánt számok a 10 és a 13.

24. Feladat Hány olyan pozitív egész (a, b, c, d, e, f) számhatos van, ami egyszerre elégíti ki az $a > b > c > d > e > f$ és az $a + f = b + e = c + d = 30$ feltételeket?

Eredmény. $\binom{14}{3} = 364$

Megoldás. Fejezzük ki a számokat úgy, mint

$$(a, b, c, d, e, f) = (15 + x, 15 + y, 15 + z, 15 - z, 15 - y, 15 - x),$$

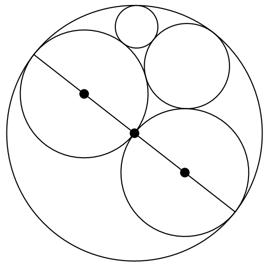
ahol $0 \le x, y, z < 15$. Az $a > b > c > d > e > f$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $x > y > z > 0$, így a számhatosunkat egyértelműen meghatározhatjuk három, 15-nél kisebb pozitív egész kiválasztásával. Ebből pedig következik, hogy $\binom{14}{3} = 364$ ilyen számhatos létezik.

25. Feladat Egy időzített bombához egy kijelzőt csatlakoztattak, ami a robbanásig hátralévő időt mutatja percben és másodpercben. A kijelző 50:00-ról kezd el visszaszámolni. Egy villanykörte villan fel minden egyes alkalommal, amikor a kijelzőn a hátralévő percek és a hátralévő másodpercek száma megegyezik (pl. 15:15) vagy amikor a kijelzőn lévő négy számjegy visszafelé olvasva is ugyanaz (pl. 15:51). Akkor hatástalaníthatjuk a bombát, amikor a villanykörte a hetvenedik alkalommal villan fel. Mennyit fog mutatni ekkor a bomba kijelzője?

Eredmény. 03:03

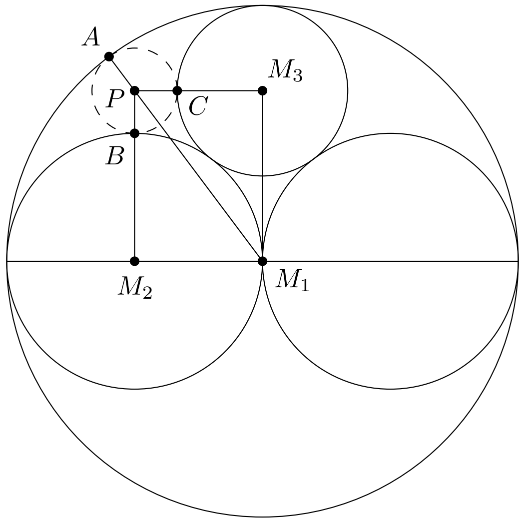
Megoldás. A percek és a másodpercek száma minden percben pontosan egyszer egyezik meg, így 50 perc alatt ez 50-szer történik meg. Az az esemény, amikor a kijelzőn látható szám visszafelé olvasva is ugyanaz, szintén pontosan egyszer következhet be minden egyes percben, viszont ez csak akkor következik be, ha a perceknél a második számjegy nem haladja meg az 5-öt, így ez csak 30-szor történik meg. Öt esetben a két esemény egyszerre következik be: $00{:}00, 11{:}11, \ldots, 44{:}44$. Ennélfogva a villanykörte $50 + 30 - 5 = 75$ alkalommal villan fel (beleértve 00:00-t is) mielőtt felrobbanna. Tehát akkor hatástalaníthatjuk a bombát, amikor már csak 5 villanás marad (00:00, 01:01, 01:10, 02:02, 02:20), azaz amikor 03:03 van a kijelzőn.

26. Feladat Van öt körünk, amelyek az ábrán látható módon érintik egymást. Számítsuk ki a legkisebb kör sugarát, ha a legnagyobb kör sugara 2, és a két másik jelölt középpontú kör sugara 1.



Eredmény. $\frac{1}{3}$

Megoldás. Jelölje M_1, M_2, és M_3 a körök középpontját, ahogy az az ábrán látható és r_3 a második legkisebb kör sugarát.



Az ábra szimmetriájából látható, hogy $M_1M_2 \perp M_1M_3$ és a Pitagorasz-tételt alkalmazva megkapjuk, hogy $r_3 = \frac{2}{3}$ a következő egyenletből:

$$M_1M_2^2 + M_1M_3^2 = M_2M_3^2 \quad \text{avagy} \quad 1 + (2 - r_3)^2 = (1 + r_3)^2.$$

Legyen P az a pont, ami kiegészíti az M_1, M_2, és M_3 középpontokat egy téglalappá. Legyenek A, B, és C rendre a M_1P, M_2P, M_3P félegyenesek metszéspontjai a megfelelő körökkel. Mivel $M_2M_1M_3P$ egy téglalap, azt kapjuk, hogy $PB = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $PC = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ és $PA = 2 - M_2M_3 = 2 - (1 + r_3) = \frac{1}{3}$. Tehát P $\frac{1}{3}$ távolságra van az A, B, és C pontoktól, emiatt ezek a pontok rajta vannak a P középpontú $\frac{1}{3}$ sugarú körön. Mivel PM_1, PM_2 és PM_3 egyenesek, az A, B, és C pontok a megfelelő körök érintési pontjai, tehát a P középpontú $\frac{1}{3}$ sugarú kör a legkisebb kör a feladat ábráján.

27. Feladat Egy kaszinóban néhányan egy asztalnál ruletteznek. Amikor Erik elhagyta az asztalt, és magával vitte 16 000 euróját, az asztalnál ülő játékosok átlagos pénzmennyisége 1 000 euróval csökkent. Az átlag újból csökkent 1 000 euróval, amikor két másik szerencsejátékos, Betti és Imi csatlakozott az asztalnál ülőkhöz fejenként 2 000 euróval. Hány játékos ült az asztal körül, amikor Erik még játszott?

Eredmény. 9

Megoldás. Jelöljük n-nel az emberek számát, amikor Erik még játszott, és jelölje x egy játékos átlagos pénzmennyiségét annál az asztalnál. A feladatban adott állításokból a következő két egyenletet kapjuk:

$$\frac{nx - 16\,000}{n - 1} = x - 1\,000 \qquad \text{és} \qquad \frac{nx - 16\,000 + 2 \cdot 2\,000}{n + 1} = x - 2 \cdot 1\,000$$

Átrendezve az egyenleteket azt látjuk, hogy

$$x = 17\,000 - 1\,000n \qquad \text{és} \qquad 2\,000n - 10\,000 = x,$$

és innen már adódik, hogy $n = 9$. Tehát amikor Erik még játszott, kilenc ember ült az asztalnál.

28. Feladat Egy $7 \times 7 \times 7$-es kocka bármely két szomszédos kiskockája között van egy elválasztó lapka. El akarunk távolítani az elválasztó lapok közül néhányat úgy, hogy minden egységkocka összeköttetésben legyen legalább egy külső kiskockával. Minimum mennyi elválasztó lapot kell ehhez kivennünk?

Eredmény. 125

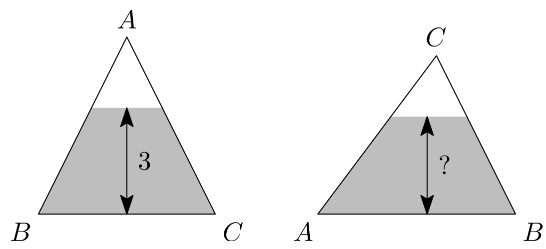
Megoldás. Kezdetben 7^3 egységkocka van. Egy elválasztó lap kiszedésével két egységkocka csatlakozik egymáshoz, így a izolált részek száma a kockában eggyel csökken. A végén a cél, hogy legfeljebb $7^3 - 5^3$ összefüggőségi komponens legyen (ennyi a külső kiskockák száma). Ebből következik, hogy legalább $5^3 = 125$ elválasztót ki kell venni, és könnyen belátható, hogy 125 elegendő is.

29. Feladat Tudjuk, hogy 20∗∗∗16 hétjegyű szám egy egész szám négyzete. Mik a hiányzó számjegyek?

Eredmény. 909

Megoldás. Legyen a^2 egy $\dots 16$ alakú négyzetszám. Ez azt jelenti, hogy $a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$ osztható 100-zal, így ha $a = 2b$, akkor $(b-2)(b+2)$ osztható 25-tel. Tehát $b = 25n \pm 2$ és emiatt $a = 50n \pm 4$. Mivel $1404^2 < (1.414 \cdot 1000)^2 < (1000\sqrt{2})^2 = 2000000$ és $1454^2 > 1450^2 = 2102500 > 2100000$, így az egyetlen lehetőség az $a = 1446$, amiből $a^2 = 2090916$.

30. Feladat Az ABC háromszöget, aminek oldalhosszai $AB = AC = 5\,\mathrm{m}$ és $BC = 6\,\mathrm{m}$, valameddig megtöltjük vízzel. Amikor a háromszöget a BC oldalára állítjuk, a vízszint $3\,\mathrm{m}$ magasan van a BC oldal felett. Milyen magasan lesz méterben a vízszint, ha a háromszöget az AB oldalára állítjuk?



Eredmény. 18/5

Megoldás. Legyen D a BC szakasz középpontja, ekkor ABD egy derékszögű háromszög, és a Pitagorasz-tétel miatt $AD = 4$. Tehát a háromszög azon része, ami nincs feltöltve vízzel, egy olyan háromszöget alkot, amely hasonló ABC-hez $1/4$ arányban. Mivel a vízzel fel nem töltött rész és az egész háromszög területeinek aránya nem változik attól, hogy elforgatjuk a háromszöget, így ugyanez a hasonlóság fog megjelenni a második helyzetben is. Ennélfogva a vízszint mindig a magasság háromnegyedénél van, azaz már csak az AB-hez tartozó magasság hosszát kell kiszámolnunk. Tudjuk, hogy ABC területe $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = 12$, így azt kapjuk, hogy $h_{AB} = 2 \cdot 12/AB = 24/5$. Ebből pedig megkapjuk, hogy a víz szintje $3/4 \cdot 24/5 = 18/5$ magasan van.

31. Feladat Van hat dobozunk, amelyeket megszámoztunk 1-től 6-ig és 17 barackunk, amiket valahogy szétosztunk a dobozok között. Egyféle lépésre vagyunk képesek a barackokkal: Ha pontosan n barack van az n-edik dobozban, akkor megeszünk belőlük egyet, és a többi $n-1$-ből pedig rakunk egyet-egyet a dobozokba 1-től $n-1$-ig. Hogyan osszuk szét a dobozok közt a barackokat, hogy mindet meg tudjuk enni?

Eredmény. 1,1,3,2,4,6

Megoldás. Vezessük le visszafelé a lehetséges lépéseket: A végső állapot $(0,0,0,0,0,0)$, azaz amikor már az összes barackot megettük, csak $(1,0,0,0,0,0)$-ből érhető el, amit viszont csak $(0,2,0,0,0,0)$-ból kaphattunk, és így tovább, ezzel a módszerrel egyértelműen megkapjuk, hogy az egyes lépések előtt melyik dobozban hány barack volt:

$$\dots (0,2,0,0,0,0),\ (1,2,0,0,0,0),\ (0,1,3,0,0,0),\ (1,1,3,0,0,0),\ \dots$$

Végül kijön, hogy $(1,1,3,2,4,6)$ volt a kiindulási állapot, azaz ezt a felosztását kerestük a 17 baracknak.

32. Feladat Egy hegyen üzemel egy sílift rögzített, kétszemélyes székekkel. 74 ember szeretne felfele utazni, míg 26 ember várakozik a fenti megállónál. Pontosan délben a lift elindul és mindkét állomáson beül két-két ember a liftbe, ezután a többi várakozó utas folyamatosan tölti fel a rendelkezésre álló helyeket. 12:16-kor az első felfelé haladó szék találkozik az utolsó lefelé haladó foglalt székkel, és 12:22-kor az első lefelé haladó szék találkozik az utolsó felfelé haladó székkel. A távolság két egymást követő szék között mindig ugyanannyi, a lift állandó sebességgel halad, és az utasok mind párokban használják liftet. Milyen hosszú ideig tart eljutni a lenti állomásról a fenti állomásra?

Eredmény. 26

Megoldás. Először is a távolság az első és utolsó felfelé haladó foglalt szék között háromszor akkora, mint az első és utolsó lefelé haladó szék között. Így láthatjuk, hogy a feladatban leírt két időpillanat között eltelt idő a kétszerese annak az időtartamnak, ami az első székek találkozása, illetve az első felfelé haladó és az utolsó foglalt lefelé haladó találkozása között eltelt. Ebből következik, hogy az első székek 12:13-kor találkoztak (pontosan a lift felénél), vagyis az egész utazás időtartama 26 perc.

33. Feladat Legyen $ABCD$ egy rombusz, az M és N pontok rendre az AB és AC oldalakon fekszenek, és nem esnek egybe az A, B, C csúcsokkal. Tudjuk, hogy DMN szabályos háromszög és $AD = MD$. Hány fokos az ABC szög?

Eredmény. $100°$

Megoldás. Mivel $CD = AD = MD = ND$, az AMD és NCD háromszögek egyenlő szárúak, alapjaik rendre AM és NC. Legyen $\theta = \angle DAB$; ekkor $\angle ABC = \angle ADC = 180° - \theta$. Másrészt, mivel

$$\angle DAM = \angle AMD = \angle DNC = \angle NCD = \theta,$$

kapjuk hogy

$$\angle ADM = \angle NDC = 180° - 2\theta$$

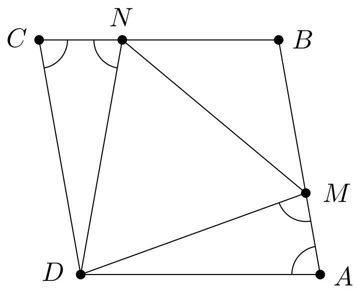
és

$$\angle ADC = \angle ADM + \angle MDN + \angle NDC = 420° - 4\theta.$$

Megállapíthatjuk, hogy

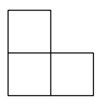
$$420° - 4\theta = 180° - \theta$$

vagy $\theta = 80°$, tehát $\angle ABC = 100°$.



34. Feladat Hányféleképpen színezhetjük ki egy 2×7-es táblázat celláit a zöld és sárga színekkel úgy, hogy ne legyen se zöld, se sárga L-triminó a táblázatban?

Megjegyzés: L-triminó alatt az ábrán látható alakzatot és az annak elforgatásával kapott alakzatokat értjük.



Eredmény. 130

Megoldás. Ha bármelyik oszlopot egyszínűre színezzük, akkor a szomszédos oszlop(ok)nak másszínűnek kell lennie, emiatt az azokkal szomszéd(ok)nak azonos színűnek kell lennie, és így tovább, tehát csak két lehetőség van arra, hogy ily módon színezzük ki a táblázatot, attól függően, hogy milyen színűre színeztük az első oszlopot.

Másfelől, az előbbiek alapján, ha van olyan oszlop, amelyben mindkét színt felhasználjuk, akkor a többi oszlopban is fel kell használnunk mindkét színt. Könnyen látható, hogy nem számít hogyan színezzük az alsó és felső cellákat ebben az esetben, mivel az így kapott színezés mindig megfelelő lesz, tehát $2^7 = 128$ ilyen színezés van.

Összesen $2 + 128 = 130$-féleképpen színezhetjük ki a táblázatot.

35. Feladat Misi gyémántot gyűjt, de eddig kevesebb, mint 200 gyémántja van. Felosztotta a gyémántjait néhány (legalább kettő) halomba a következő módon:

- bármely két halomban különböző számú gyémánt van,
- semelyik halom sem pontosan két gyémántból áll,
- minden halomra igaz, hogy ha akárhogy szétbontjuk két kisebb halomra, akkor az új halmok közül legalább az egyik pontosan akkora lesz, mint egy, már korábban létező halom (itt a szétbonthatóság kérdésénél nem érvényesek az előző szabályok).

Legfeljebb hány gyémántja lehet Misinek?

Eredmény. 196

Megoldás. Tegyük fel, hogy van egy, a feladat feltételeinek megfelelő felosztásunk. Legyen m a gyémántok száma a legkisebb halomban. Ha $m \geq 3$, akkor a legkisebb halom felosztható két 1, illetve $m-1$ nagyságú halomra, amelyek közül egyik sem egyforma nagyságú egy másik halommal, tehát $m \leq 2$. Mivel 2 nagyságú halom nincs, ezért $m = 1$.

Következőnek mutassuk meg, hogy a második legkisebb halom 3 gyémántból áll. Mivel 2 nem lehet, ezért ki kell zárnunk még az $n \geq 4$ esetet. Azonban ez nyilván nem lehetséges az $n = 2 + (n-2)$ felosztás miatt.

Végül indukcióval lássuk be, hogy ha a felosztás k legkisebb halmai $1, 3, \ldots, 2k-1$ ($k > 1$) nagyságúak, akkor a $(k+1)$-edik legkisebb halom (amennyiben létezik) $2k+1$ gyémántból áll. Legyen p a $(k+1)$-edik legkisebb halom mérete. Nyilván p páratlan, mivel egy páros számú halom felbontható két kisebb páros számúra. Ha $p \geq 2k+3$, akkor a $p = 2 + (p-2)$ felbontással ellentmondásra jutunk. Megállapíthatjuk tehát, hogy az egyetlen lehetőség a $p = 2k+1$, ami láthatóan kielégíti a feltételeket.

Láthatjuk, hogy Misi gyémántjainak a száma $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$ alakú. A legnagyobb 200-nál kisebb négyzetszám a $14^2 = 196$, ami így Misi gyémántjainak legnagyobb lehetséges száma.

36. Feladat A kő-papír-ollóban három alakzat közül választhatunk: K –kő, P – papír, O – olló oly módon, hogy $O > P$, $P > K$, $K > O$ és $K = K$, $P = P$, $O = O$, ahol $A > B$ azt jelenti, hogy 'A legyőzi B-t' és $A = B$ azt jelenti, hogy 'amikor A-t játsszuk ki B ellen, a játék döntetlen lesz'. Egy meccs a Kétkezes Ismétlés Nélküli Kő-Papír-Ollóban a P_1 és P_2 játékosok között 9 körből áll. Minden körben mindkét játékos választ egy-egy (b_i, j_i) párt, ahol b_i és j_i rendre a bal és a jobb kéz által kijátszott alakzatot jelölik a P_i játékos részéről. A meccs folyamán mindkét játékosnak pontosan egyszer kell kijátszania minden lehetséges párt. Egy kör során 4 pontot osztunk szét a következő módon: az egyes kézpárok (bal és jobb) győztese 2 pontot kap és a vesztes 0-t, vagy mindkét játékos 1-1 pontot kap, ha az adott pár esetén döntetlen születik. Tegyük fel, hogy a játékosok a körök során véletlenszerűen választják ki, hogy mit akarnak kijátszani. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mind a 9 kör a meccs során döntetlennel végződik (azaz 2:2 pontszámokkal)?

Eredmény. $3!^3/9! = 1/1680$

Megoldás. Tekintsük a következő három, három párból álló halmazt:

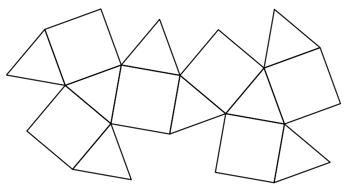
$$D_K = \{(K,K),(P,O),(O,P)\}, \quad D_P = \{(P,P),(O,K),(K,O)\}, \quad D_O = \{(O,O),(K,P),(P,K)\}.$$

Vegyük észre, hogy egy kör a meccs során akkor és csak akkor lesz döntetlen, ha ugyanabból a halmazból választunk ki két párt, és azokat játsszuk ki egymás ellen.

A meccs lehetséges kimenetelét a $D_R \cup D_P \cup D_S$ halmaz permutációinak összes párosítása adja meg. Akkor és csak akkor végződik minden kör döntetlenre, ha a D_K, D_P, D_O halmazok elemei ugyanazokat a helyeket foglalják el P_1 és P_2 permutációiban. Vegyünk egy tetszőleges permutációt, és jelölje ez a permutáció a P_1 játékos lépéseit az egyes körökben. Vegyük ekkor a P_2 lépéseinek azon sorbarendezéseit, ahol minden körben döntetlent ér el, és azt kapjuk, hogy ezek száma mindig $3!^3$ attól függetlenül, hogy mi a P_1 játékos lépéseinek permutációja. Így a keresett valószínűség

$$\frac{3!^3}{9!} = \frac{1}{1680}.$$

37. Feladat Egy test hálója 8 szabályos háromszögből és 6 négyzetből áll az ábrán látható módon:



Tegyük fel, hogy minden él hossza 1 km, mennyi lesz ekkor a test térfogata (km^3-ben mérve)?

Eredmény. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Megoldás. A feladatban körülírt testet a következő módon kaphatjuk meg egy kockából: A kocka minden sarkát levágjuk úgy, hogy a vágás keresztülmenjen az eltávolított csúcsból kiinduló élek felezőpontjain. A kocka élhossza $\sqrt{2}$, így a térfogata $2\sqrt{2}$. Az eltávolított sarkok 8 egybevágó gúlát alkotnak, mindegyiknek az alapja egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek szárai $\sqrt{2}/2$ hosszúak, és a magassága is $\sqrt{2}/2$ mindegyiknek. Így egy sarok térfogata $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/24$ és ezért a megadott test térfogata $2\sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{2}/24 = 5\sqrt{2}/3$.

38. Feladat Keressük meg a 999 999 995 904 egyetlen háromjegyű prímtényezőjét.

Eredmény. 601

Megoldás. Vegyük észre, hogy

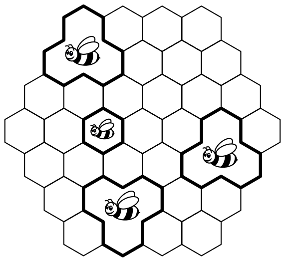
$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$$

és

$$5^{12} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^2-5+1)(5^2+5+1)(5^4-5^2+1),$$

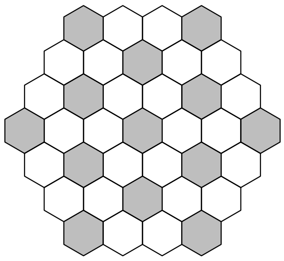
de csak az utolsó tényező nagyobb 100-nál. Mivel tudjuk, hogy létezik háromjegyű prímtényező és $5^4 - 5^2 + 1 = 601$ nyilván nem osztható a 2, 3, 5 számokkal, ezáltal prím lesz, és ez az általunk keresett szám.

39. Feladat Tizenhárom méh, egy kicsi és tizenkét nagy, egy 37-cellás kaptárban lakik. Minden nagy méh 3 páronként szomszédos cellát foglal el, és a kicsi méh egy cellát foglal el (lásd az ábrát). Hányféleképpen tudjuk a kaptárt felosztani 13 egymást nem fedő részre úgy, hogy mind a tizenhárom méhnek legyen hely a megadott feltételeknek megfelelően?



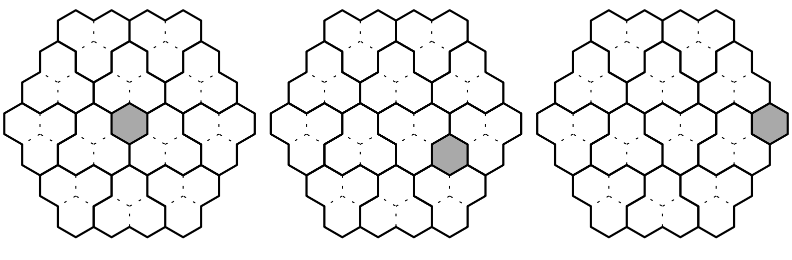
Eredmény. 20

Megoldás. Színezzünk szürkére 13 cellát az ábrán látható módon:



Minden háromcellás rész pontosan egy szürke cellát tartalmaz, ezért a kicsi méh valamelyik szürke cellában lakik.

Ha ez a középső cella, akkor kétféleképpen tudjuk a kaptár (lép) többi részét 12 nagy méh szektorra bontani (vagy az első képen látható módon, vagy ennek a 60 fokkal elforgatottjával). A 6 közbülső cella esetén pontosan egy módon tudjuk a nagy méheket elhelyezni. Végül, a szélső szürke cellák esetén pontosan két módon tudjuk felbontani a maradék részt (a harmadik ábrán látható, és ennek tükrözöttje).

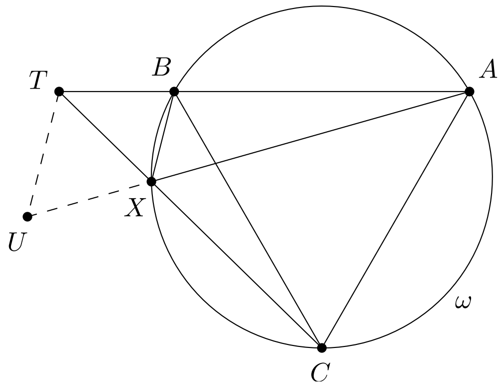


Tehát összesen $2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 20$ féleképpen tudjuk felbontani a kaptárt az előírt szektorokra.

40. Feladat Az ABC egyenlő oldalú háromszöget belerajzoljuk az ω körbe. Az X pont az ω (rövidebb) BC körívén található, és T az AB és CX szakaszok metszéspontja. Ha $AX = 5$ és $TX = 3$, akkor mennyi lesz a BX szakasz hossza?

Eredmény. 15/8

Megoldás. Mivel $\angle AXB = \angle ACB = 60°$ és $\angle AXC = \angle ABC = 60°$, ezért $\angle BXT = 180° - \angle AXB - \angle AXC = 60°$. Legyen U egy olyan pont AX-en, amire $TU \parallel BX$.



Ekkor TUX egyenlő oldalú és $\triangle TUA \sim \triangle BXA$. Ebből kifolyólag pedig

$$BX = \frac{TU}{AU} \cdot AX = \frac{TX \cdot AX}{TX + AX} = \frac{15}{8}.$$

41. Feladat Legyen ABC egy szabályos háromszög. Az ABC egy P belső pontját *ragyogó*nak nevezzük ha létezik pontosan 27 P-ből induló félegyenes, amelyek úgy metszik az ABC háromszög oldalait, hogy a háromszöget 27 kisebb, páronként egyenlő területű háromszögre osztják fel. Határozzuk meg ABC ragyogó pontjainak a számát.

Eredmény. $\binom{26}{2} = 325$

Megoldás. Nyilván PA, PB, PC a 27 P-ből induló félegyenes között van, hiszen másképp egy négyszöget is kapnánk, és ellentmondásra jutnánk. Osszuk fel az $\triangle ABC$ kerületét 27 részre úgy, hogy az egyes oldalakat egyenlő hosszúságú szakaszokra osztjuk. Összesen $\binom{26}{2} = 325$ ilyen felosztás létezik, legyen A az első osztópont, B-t és C-t pedig szabadon kiválaszthatjuk a többi 26 közül. Végül vegyük észre, hogy minden ilyen felosztás megfelel egy ragyogó pontnak és viszont: Nyilván minden egyes ragyogó ponthoz tartozik felosztás. Másfelől, megadva az a, b, c számokat, amelyek rendre az egyes oldalak szakaszainak számát jelölik, legyen P az a pont az $\triangle ABC$ belsejében, amire a BC, CA, AB oldalak P-től való távolságának aránya rendre $a : b : c$. Egyszerű számítással megkapjuk, hogy P tényleg ragyogó pont, és az ebből induló félegyenesek $\triangle ABC$-t a megadott felosztásnak megfelelően darabolják szét.

42. Feladat Hány olyan 2016-nál kisebb, pozitív osztója van 2016^2-nek, ami nem osztója 2016-nak?

Eredmény. 47

Megoldás. A $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ prímfelbontásból azt kapjuk, hogy $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Ezáltal 2016^2 pozitív osztóinak száma $11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$, amiből $\frac{1}{2} \cdot (165 - 1) = 82$ kisebb mint 2016, és kivéve a 2016-ot az osztók (x, y) párokba oszthatók úgy, hogy $x \cdot y = 2016^2$ és $x < 2016 < y$. Vegyük észre, hogy 2016-nak $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ 2016-nál kisebb osztója van, amelyek természetesen 2016^2-nek is osztói. Tehát a számunkra megfelelő osztók száma $82 - 35 = 47$.

43. Feladat Legyen

$$Z_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}}.$$

Számítsuk ki a $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{2016}$ összeget.

Eredmény. $\frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1)$

Megoldás. Figyeljük meg, hogy $n \in \mathbb{N}$-re,

$$\begin{aligned}\frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}} &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n-1})^2)}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3).\end{aligned}$$

Ennélfogva,

$$\begin{aligned}Z_1 + \cdots + Z_{2016} &= \frac{1}{2}\big((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3 + (\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3 + \cdots + (\sqrt{4033})^3 - (\sqrt{4031})^3\big) \\ &= \frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1).\end{aligned}$$

44. Feladat Állítsunk elő egy egészekből álló $a_0, a_1, a_2 \dots$ sorozatot az alábbi módon: Ha a_i osztható hárommal, akkor legyen $a_{i+1} = a_i/3$, különben pedig $a_{i+1} = a_i + 1$. Hány olyan pozitív egész a_0 létezik, amire a sorozat az 1 értéket pontosan tizenegy lépés alatt éri el (azaz $a_{11} = 1$, de $a_0, a_1, \dots, a_{10} \neq 1$)?

Eredmény. 423

Megoldás. Legyen p_n a P_n halmaz elemeinek száma, és legyen f_n, g_n, h_n rendre a $3k$, $3k+1$, $3k+2$ alakú számok darabszáma P_n-ben. Vegyük észre hogy $n \geq 3$ esetén P_n minden tagja nagyobb, mint 3, ezért

- $f_{n+1} = p_n$, mivel minden $x \in P_n$ esetén $3x \in P_{n+1}$,
- $g_{n+1} = h_n$, mivel a $3k+1$ alakú P_{n+1}-beli számokból érhetjük el a $3k+2$ alakú számokat P_n-ben
- $h_{n+1} = f_n$ hasonló okokból.

Tehát

$$p_n = f_n + g_n + h_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$$

minden $n \geq 4$-re. A kezdeti számolás alapján $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, és $p_3 = 3$, és a többi tag kiszámolható a fenti rekurzióból. Ez alapján a megoldás $p_{11} = 423$.

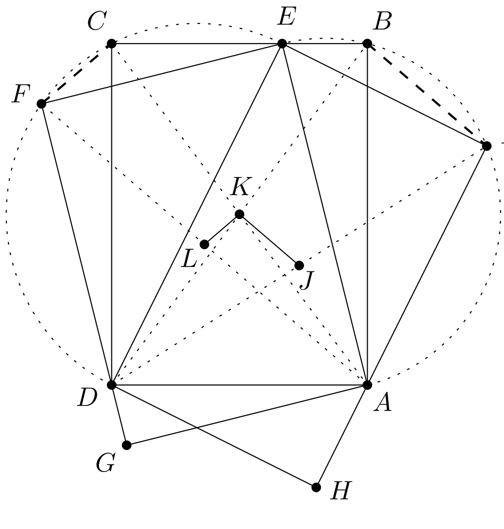
45. Feladat Legyenek $ABCD$, $AEFG$ és $EDHI$ téglalapok rendre a K, L, J középpontokkal. Tegyük fel, hogy az A, D, E pontok rendre belső pontjai a HI, FG, BC szakaszoknak, és $\angle AED = 53°$. Adjuk meg hány fokos a $\angle JKL$ szög.

Eredmény. 74°

Megoldás. Mivel KJ a BID háromszög középvonala, kapjuk, hogy $KJ \parallel BI$, és hasonlóan $KL \parallel CF$. Tehát $\angle JKL = \angle IBA + \angle DCF$. Mivel $\angle AIE = \angle ABE = 90°$, ezért a $BIAE$ húrnégyszög. Ebből következik, hogy

$$\angle IBA = \angle IEA = 90° - \angle AED = 37°.$$

Hasonló módon levezethetjük, hogy $\angle DCF = 37°$, tehát $\angle JKL = 74°$.



46. Feladat Jakab választott néhány (nem feltétlenül különböző) egész számot a $\{-1, 0, 1, 2\}$ halmazból, úgy hogy az összegük 19, és a négyzetösszegük (négyzeteik összege) 99. Mi a lehető legnagyobb érték a Jakab által választott számok köbeinek összegére?

Eredmény. 133

Megoldás. Legyen a, b, c a Jakab által kiválasztott -1-esek, 1-esek és 2-esek száma (a nullák nem játszanak szerepet). A feladat feltételei felírhatók mint

$$-a + b + 2c = 19,$$
$$a + b + 4c = 99.$$

A célunk maximalizálni $-a + b + 8c = 19 + 6c$ értékét. Összeadva a két egyenletet, kapjuk hogy $6c = 118 - 2b$, ezért $c \leq 19$. A $c = 19$ érték elérhető az $a = 21$, $b = 2$ választással, tehát a keresett maximum $19 + 6 \cdot 19 = 133$.

47. Feladat Keressük meg a legnagyobb 9-jegyű számot az alábbi tulajdonságokkal:

- minden számjegye különböző,
- minden $k = 1, 2, \ldots, 9$ esetén, ha kitöröljük a szám k-adik számjegyét, a kapott 8 jegyű szám osztható k-val.

Eredmény. 876 513 240

Megoldás. Jelölje A_k a keresett szám k-adik számjegyét, tehát a szám $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}$. Mivel 10 lehetséges számjegy van, pontosan egyet nem használunk, legyen ez d. Legyen N_k az a szám, amit a k-adik számjegy kitörlésével kapunk.

Tudjuk, hogy N_2 páros, tehát $2 \mid A_9$. Továbbá, N_5 osztható 5-tel, tehát A_9 is. Ebből következik, hogy $A_9 = 0$.

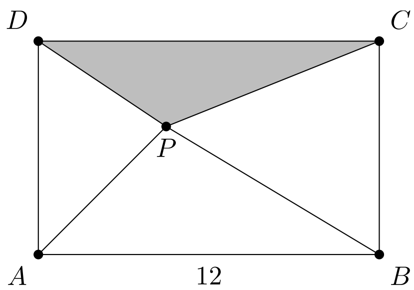
Az N_9 osztható 9-cel, tehát a számjegyeinek összege, $1+2+3+4+5+6+7+8+9-d = 45-d$ osztható 9-cel, amiből $d = 9$.

Az N_8 és N_4 számok mindketten oszthatóak 4-gyel, emiatt a A_7 és A_8 számjegyek párosak. Továbbá, mivel N_8 osztható 8-cal, ezért a kétjegyű $\overline{A_6A_7}$ osztható 4-gyel. Mivel N_3 és N_6 oszthatóak 3-mal, ezért ezek számjegyeinek összege is. Ez alapján $\{A_3, A_6\} = \{3, 6\}$.

Mivel a lehető legnagyobb számot keressük, tegyük fel hogy $A_1 = 8$, $A_3 = 6$, $A_6 = 3$. Tudjuk, hogy $\{A_7, A_8\} = \{2, 4\}$ és mivel $4 \mid \overline{A_6A_7}$, $A_7 = 2$ és $A_8 = 4$.

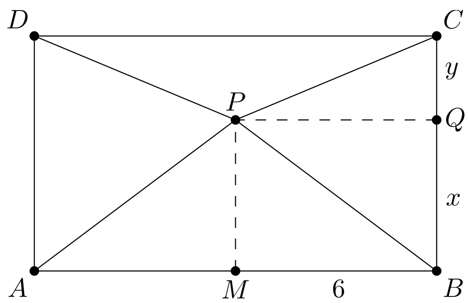
Elég megnézni, hogy a maradék számjegyeket csökkenő sorrendbe helyezve a 876513240 számot kapjuk, ami kielégíti a maradék feltételeket, azaz $N_7 = 87651340$ is osztható 7-tel.

48. Feladat A P pont az $ABCD$ téglalap belsejében fekszik, és $AB = 12$. Az ABP, BCP, DAP háromszögek mindegyikének a kerülete egyenlő a területével. Mi a CDP háromszög kerülete?



Eredmény. 25

Megoldás. Vegyük észre, hogy egy háromszög területe pontosan akkor egyenlő a területével, ha a beírt körének sugara 2. Tehát a BCP és ADP háromszögek egybevágóak, hiszen ha P közelebb lenne AD-hez mint BC-hez, akkor ADP beírt körének sugara kisebb lenne, mint BCP beírt körének sugara. Ez alapján P az $ABCD$ téglalap egyik szimmetriatengelyén fekszik.



Legyen Q a P pont merőleges vetülete BC-re, és M az AB szakasz felezőpontja, és legyen $x = BQ$, $y = CQ$. Az ABP háromszög területe tehát $6x$, és használva a Pitagorasz tételt az MBP háromszögre, kapjuk hogy $BP = \sqrt{x^2 + 6^2}$. Mivel az ABP háromszög területe és kerülete egyenlő

$$6x = 12 + 2\sqrt{x^2 + 6^2}$$

ebből következően $x = 9/2$.

Az y hossza hasonlóan kapható: Mivel $BP = 15/2$ és $CP = \sqrt{y^2 + 6^2}$, a feltétel a BCP háromszögre adja, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(y + \frac{9}{2}\right) = y + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \sqrt{y^2 + 6^2}$$

ennek egyetlen pozitív megoldása $y = 5/2$.

Végül megállapíthatjuk, hogy $CP = 13/2$ és a CDP kerülete 25.

49. Feladat A táblára fel van írva a $(0,0)$ számpár. Minden lépésben átírjuk az alábbi módon: Ha (a,b)-van felírva, lecseréljük $(a+b+c, b+c)$-re, ahol $c = 247$ vagy $c = -118$ (minden lépésben megválaszthatjuk c értékét) Keressük meg a legkisebb (nem nulla) lépésszámot, amikor $(0,b)$ lesz a táblán valamilyen b-re.

Eredmény. 145

Megoldás. Legyen c_i az a c szám amit az i. lépésben használunk. Az n. lépés után a, azaz a pár első koordinátája $a = nc_1 + (n-1)c_2 + \cdots + c_n$ lesz. Fixáljuk le n-et és legyen $s = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$, ahol $\varepsilon_i = 1$ ha $c_i = 247$, és $\varepsilon_i = 0$ különben. Definiáljuk a t számot hasonló módon, ahol $\varepsilon_i = 1$ akkor és csak akkor, ha if $c_i = -118$. Nyilván $a = 247s - 118t$, tehát az $a = 0$ feltétel miatt $247s = 118t$. Mivel a 247 és 118 relatív prímek, van olyan k egész szám, amire $s = 118k$ és $t = 247k$. Ebből következik, hogy

$$365k = s + t = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

és mivel $365 = 5 \cdot 73$, kapjuk, hogy n legalább $2 \cdot 73 - 1 = 145$.

Hátra van még megmutatni, hogy léteznek olyan c_i számok, amikre $247s = 118t$ és $n = 145$. Ehhez legyen m a legkisebb pozitív egész amelyre

$$1 + 2 + \cdots + m \geq \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n);$$

most legyen $c_i = -118$ minden $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ esetén és $c_i = 247$ különben, ahol

$$r = 1 + 2 + \cdots + m - \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n).$$

(Valóban, $m = 120$ és $r = 97$.) Így megkapjuk, hogy

$$247s = 118t = \frac{118 \cdot 247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n)$$

tehát $n = 145$ megvalósítható.

50. Feladat Egy *cikcakk* két párhuzamos, ellentétes irányú félegyenesből, és a kezdőpontjaikat összekötő szakaszból áll. Maximum hány részre oszthatja fel a síkot tíz darab cikcakk?

Eredmény. 416

Megoldás. Bármely két cikcakk legfeljebb 9 pontban metszheti egymást, és bármennyi cikcakk esetén tudunk rajzolni olyan elrendezést, hogy minden pár pontosan 9 pontban metszi egymást (és minden metszéspont csak két egyenesen van rajta). Helyezzük egy a cikcakkokat a síkon egyesével, az n. elhelyezett cikcakkon $9(n-1)$ metszéspont lesz a korábbiakkal, tehát a cikcakkot $9(n-1)+1$ szakaszra (és félegyenesre) osztja, és ezek mindegyike egy korábbi régiót kettévág. Tehát a síkrészek maximális száma n cikcakk esetén Z_n, ahol $Z_1 = 2$ és $Z_n = Z_{n-1} + 9n - 8$ ha $n \geq 2$. Teljes indukcióval megkapható az általános képlet, $Z_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1$, amiből látszik, hogy erre a specialis esetre $Z_{10} = 416$.

51. Feladat Egy tetraéder minden lapja egy háromszög 1, $\sqrt{2}$ és c hosszú oldalakkal, és a tetraéder köréírt gömbjének sugara $5/6$. Mekkora c?

Eredmény. $\sqrt{23}/3$

Megoldás. Egy általánosabb állítást látunk be: ha a tetraéder minden lapja egy a, b, c hosszú oldalakkal bíró háromszög, és a köréírt körének sugara ϱ, akkor $a^2 + b^2 + c^2 = 8\varrho^2$. Ebből behelyettesítéssel megtalálhatjuk ennek a speciális esetnek a megoldását.

Írjuk be a tetraédert egy téglatestbe, amelynek oldalhosszai p, q, r. A tetraéder élei a téglatest lapátlói, tehát a Pitagorasz tétel szerint

$$p^2 + q^2 = a^2, \quad p^2 + r^2 = b^2 \quad \text{és} \quad q^2 + r^2 = c^2.$$

Továbbá, a tetraéder körülírt köre egybeesik a téglatestével, és ennek az átmérője a téglatest testátlója. Tehát

$$(2\varrho)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

ebből átrendezéssel megkapjuk a állítást.

52. Feladat Egy nagy ünnepségre Hippolyt, a lakáj felsorakoztatott 2016 koktélpoharat egy sorban, mindben ízletes koktél van. Utolsó simításként le kell takarnia egy poharat egy ezüst fedővel, és rátennie egy szobrot, a lefedetlen poharakba pedig szétoszt páratlan sok cseresznyét, úgy hogy minden pohárba legfeljebb egy cseresznye kerülhet. Hányféleképpen rendezheti el a cseresznyéket és a fedőt, ha több cseresznyének kell lennie a fedő jobb oldalán, mint a bal oldalán?

Eredmény. $2016 \cdot 2^{2013}$

Megoldás.

Először nézzük meg az összes lehetséges elrendezését a fedőnek, és minden pohárba legfejlebb egy cseresznyének, további feltételek nélkül. A fedőt 2016 lehetséges helyre tehetjük, és 2^{2015}-féleképp tehetünk maximum egy cseresznyét a maradék 2015 pohárba, ami alapján összesen $2016 \cdot 2^{2015}$ jó elhelyezés van. A binomiális tétel szerint

$$0 = (-1+1)^{2016} = \sum_{i=0}^{2016} \binom{2016}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{1008} \binom{2016}{2i} - \sum_{i=1}^{1008} \binom{2016}{2i-1}$$

ez alapján azon elrendezések száma, ahol páros sok cseresznye van, egyenlő azzal amikor páros sok. A fedő és páratlan sok cseresznye elrendezéseinek halmaza legyen M, ekkor M elemszáma $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$.

Vegyük észre, ha választunk egy olyan elrendezést, ahol n_1 cseresznye van a fedő bal oldalán és n_2 a jobb oldalán, akkor ehhez hozzárendelhetjük a megfordítottját, ahol n_2 cseresznye van baloldalt, és n_2 jobboldalt. Mivel $n_1 + n_2$ páratlan, n_1 és n_2 különböző számok, azaz semelyik elrendendezésnek nem lehet párja önmaga. Tehát az M-beli elrendezések fele felel meg a feladat feltételeinek, így a válasz $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2014} = 2016 \cdot 2^{2013}$.

53. Feladat Egy fakockának a felületét zöldre festették. Van 33 sík a térben, mind különbözőek, párhuzamosak a kocka valamelyik lapjával, és valahol a kocka két ellentétes lapja között helyezkednek el. Ezek a síkok kisebb téglatestekre vágják fel a kockát úgy, hogy ugyanannyi darabnak van zöldre festett lapja, mint ahány darab teljesen festetlen. Hány darabra vághattuk fel a kockát?

Eredmény. 1260 vagy 1344

Megoldás. Könnyen látható, hogy mindhárom lehetséges irányban legalább 4 vágósíknak kell lennie. (Mert ha valamilyen irányban legfeljebb 4 szintet kapunk, akkor a festett kockák száma nagyobb mint a festetleneké.) Jelölje a síkok számát a három irányban $a+3$, $b+3$, $c+3$, ahol a, b, c pozitív egészek. Mivel $(a+3)+(b+3)+(c+3) = 33$, kapjuk hogy $a+b+c = 24$.

A feladat feltétele felírható mint

$$(a+4)(b+4)(c+4) = 2(a+2)(b+2)(c+2)$$

amiből számolás után megkapjuk hogy $abc = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Mivel $a+b+c$ páros szám, vagy pontosan az egyikük páros, vagy mindhárom páros.

Az első esetben az általánosság megsértése nélkül feltehető hogy a az egyedüli páros. Ekkor a osztható 16-tal, tehát csak 16 lehet. Ebből következik hogy $b+c = 8$ és $bc = 15$, tehát $\{b, c\} = \{3, 5\}$. Ebből kiszámítható, hogy a kis darabok száma $(a+4)(b+4)(c+4) = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$.

A második esetben, ha mindhárman párosak, feltehető hogy $a = 4x$, $b = 2y$, $c = 2z$ ahol $xyz = 15$ és $2x+y+z = 12$. Ennek az egyetlen megoldása $x = 3$, $\{y, z\} = \{1, 5\}$, amiből a darabok száma $(a+4)(b+4)(c+4) = 16 \cdot 6 \cdot 14 = 1344$.

54. Feladat Bármely n pozitív egészre legyen $p(n)$ az n nem nulla számjegyeinek szorzata. Számoljuk ki $p(1) + \cdots + p(999)$ legnagyobb prímosztóját.

Eredmény. 103

Megoldás. Legyen $S = p(1) + \cdots + p(999)$. Az $A = (0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)$ kifejtésből láthatjuk hogy A lenne az eredmény, ha a nulla számjegyekkel is szoroznánk. Ez alapján $S = (1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9) - 1$ (ebben a kifejtésben felbukkan egy extra 1-es amit nem akarunk számolni). Tehát

$$S = 46^3 - 1 = (46-1)(46^2+46+1) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$$

így a legnagyobb prímosztó a 103.

55. Feladat Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy pozitív egészekből álló, szigorúan növekvő sorozat, amire $9 \mid a_{3k-2}$, $14 \mid a_{3k-1}$, és $19 \mid a_{3k}$ minden k pozitív egészre. Keressük meg a_{2016} lehető legkisebb értékét.

Eredmény. 14478

Megoldás. Feltehetjük, hogy minden n-re a_n a legkisebb olyan szám, ami nagyobb a_{n-1}-nél, és teljesíti az oszthatósági feltételt. Vegyük észre hogy adott a_{3k} esetén csak két lehetőségünk van a_{3k+3}-ra: vagy $a_{3k+3} = a_{3k} + 19$, vagy $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Az utóbbi akkor és csak akkor fordul elő, ha vannak c, d egészek, amikre $5 \le d \le c \le 9$, $9 \mid a_{3k} + c$ és $14 \mid a_{3k} + d$, mivel ebből következik, hogy $a_{3k+1} = a_{3k} + c$ és $a_{3k+2} = a_{3k} + 14 + d \ge a_{3k} + 19$.

Pontosan $\binom{6}{2} = 15$ olyan (c, d) pár létezik, amire $5 \le d \le c \le 9$. Mivel a 9, 14 és 19 páronként relatív prímek, a kínai maradéktétel garantálja, hogy minden ilyen (c, d) párhoz létezik pontosan egy nemnegatív egész $a_{3k} < 9 \cdot 14 \cdot 19$ amelyre $19 \mid a_{3k}$, $9 \mid a_{3k} + c$ és $14 \mid a_{3k} + d$. Tehát pontosan 15 alkalommal fordul elő olyan a_{3k} kisebb mint $9 \cdot 14 \cdot 19$, és amire $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Könnyű látni, hogy két ilyen speciális a_{3k} különbsége nem lehet 19 és hogy $9 \cdot 14 \cdot 19 - 19$ nem ilyen szám, ebből következik, hogy $a_{3\ell} = 9 \cdot 14 \cdot 19$ valamilyen ℓ-re. Mivel $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$ pontosan 15-ször következik be, kapjuk hogy $\ell = 9 \cdot 14 - 15 = 111$.

Az a_{333} után következő a_n-ekre a 9-es, 14-es és 19-es osztási maradékok ugyanazok mint a_{n-333}-re, tehát kapjuk hogy $a_{n+333} = a_n + 9 \cdot 14 \cdot 19$. Kiszámíthatjuk, hogy $a_{18} = 114$, és ez alapján

$$a_{2016} = a_{6 \cdot 333 + 18} = 6 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 + 114 = 14478.$$

56. Feladat Legyen P egy pont az ABC háromszög belsejében. A D, E, F pontok rendre a BC, CA, AB szakaszokon fekszenek, úgy hogy a AD, BE, CF egyenesek P-ben metszik egymást. Tudjuk, hogy $PA = 6$, $PB = 9$, $PD = 6$, $PE = 3$, és $CF = 20$. Adjuk meg az ABC háromszög területét.

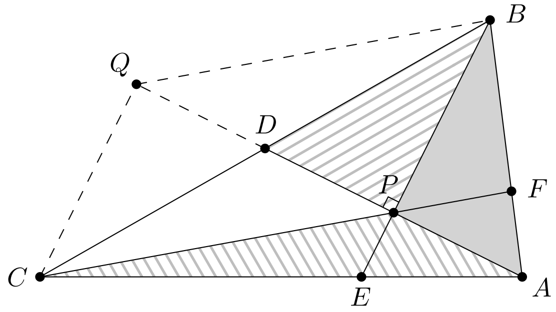
Eredmény. 108

Megoldás. Jelölje $[XYZ]$ egy XYZ háromszög területét. Mivel $AP = DP$, kapjuk hogy $[ABP] = [BDP]$ és $[APC] = [DCP]$. Továbbá, $3EP = BP$-ből következik, hogy $3[APE] = [ABP]$ és

$$3[CEP] = [BCP] = [BDP] + [DCP] = 3[APE] + [APE] + [CEP],$$

tehát $[CEP] = 2[APE]$. Tehát megállapíthatjuk, hogy $[ABP] = [BDP] = [APC] = [DCP]$ azaz $BD = CD$.

Legyen $k = FP : CP$. Ekkor mivel $AP = DP$ és $\angle APF = \angle CPD$ kapjuk hogy $[AFP] = k[DCP]$, hasonlóan $[FBP] = 3k[CEP]$. Ezt az ismert arányokkal kombinálva kapjuk hogy 1/3, tehát $FP = 5$, $CP = 15$. Ha kiegészítjük a CPB háromszöget egy $CPBQ$ parallelogrammává, észrevehetjük, hogy $BP^2 + PQ^2 = BQ^2$, tehát $\angle DPB = 90°$.



Tehát végeredményben

$$[ABC] = 4[BDP] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 108.$$

57. Feladat Adjuk meg a tizedesvessző előtti utolsó két számjegyét $(7 + \sqrt{44})^{2016}$-nek.

Eredmény. 05

Megoldás. Először vegyük észre, hogy $7 - \sqrt{44}$ szigorúan 0 és 1 közé esik, tehát $(7 - \sqrt{44})^{2016}$ is. Továbbá, $(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016}$ egy egész szám, mert a binomiális formulát felrva a $\sqrt{44}$ páratlan kitevős tagjai kiesnek, tehát

$$\lfloor (7 + \sqrt{44})^{2016} \rfloor = (7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} - 1.$$

Kihasználva, hogy $12^2 \equiv 44 \pmod{100}$, kapjuk, hogy

$$(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} \equiv (7 + 12)^{2016} + (7 - 12)^{2016} \pmod{100},$$

tehát elegendő megtalálni az utolsó két számjegyét 19^{2016}-nak és 5^{2016}-nak. Az utóbbi 25, hiszen $5^3 \equiv 5^2 \pmod{100}$. Hogy megtaláljuk a előbbit, használjuk megint a binomiális formulát:

$$(20 - 1)^{2016} \equiv \binom{2016}{2015} \cdot 20^1 \cdot (-1)^{2015} + \binom{2016}{2016} (-1)^{2016} \equiv -19 \pmod{100}$$

(az utolsó kettőt kivéve minden tag osztható 20^2-nel). Végül megállapíthatjuk, hogy a keresett számjegyek a $-19+25-1 =$ 05.

Alternatív megoldás. Hasonlóan az előbbihez, a $(7+\sqrt{44})^{2016} + (7-\sqrt{44})^{2016}$ utolsó két számjegyét kell keresnünk. Mivel $7+\sqrt{44}$ és $7-\sqrt{44}$a megoldásai a $x^2 - 14x + 5 = 0$ másodfokú egyenletnek, a $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ sorozatok, amiket úgy definiálunk, hogy $\alpha_n = (7+\sqrt{44})^n$ és $\beta_n = (7-\sqrt{44})^n$, teljesítik a $\alpha_{n+2} - 14\alpha_{n+1} + 5\alpha_n = 0$ rekurziót. (Ugyanígy felírható β_n-re is.) Továbbá, az összegük $\gamma_n = (7+\sqrt{44})^n + (7-\sqrt{44})^n$ is teljesíti ezt a rekurziót. Célunk kiszámítani γ_{2016} mod 100 értékét.

Legyen $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n \bmod 100$. A $(\tilde{\gamma}_n)_{n\geq 0}$ sorozatot meghatározza a $\tilde{\gamma}_{n+2} = (14\tilde{\gamma}_{n+1} - 5\tilde{\gamma}_n) \bmod 100$ rekurzív képlet, és a kezdőértékek: $\tilde{\gamma}_0 = 2$, $\tilde{\gamma}_1 = 14$. Ezentúl, mivel $\tilde{\gamma}_n$ csak véges sok értéket vesz fel, és mindig csak az előző két értéktől függnek, a sorozat periodikus lesz. Kiszámolunk a sorozat elején jópár értéket,

$$2, 14, 86, 34, 46, 74, 6, 14, 66, 54, 26, 94, 86, 34, \ldots,$$

láthatjuk, hogy $\tilde{\gamma}_2$ után periodikus, és a periódus hossza 10, tehát $\tilde{\gamma}_{2016} = \tilde{\gamma}_6 = 6$. A keresett érték ennél eggyel kisebb, azaz az utolsó két számjegy 05.