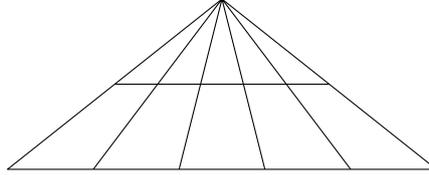


Aufgabe 1. Vor drei Jahren war Florians Mutter dreimal so alt wie Florian damals war. Jetzt ist Florians Vater dreimal so alt wie Florian. Wie viele Jahre ist der Altersunterschied von Florians Eltern?

Ergebnis. 6

Lösungsweg. Wenn das jetzige Alter von Florian mit x bezeichnet wird, so ist seine Mutter jetzt $3(x - 3) + 3$ Jahre alt, also $3x - 6$ Jahre. Nach der zweiten Aussage ist Florians Vater derzeit $3x$ Jahre alt. Folglich beträgt der Altersunterschied seiner Eltern 6 Jahre.

Aufgabe 2. Wie viele Dreiecke sind in diesem Bild zu sehen?



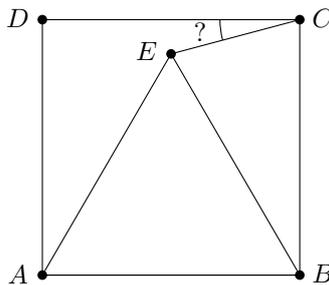
Ergebnis. 30

Lösungsweg. Jedes Dreieck, das in diesem Bild zu sehen ist, hat den obersten Punkt als einen Eckpunkt. Ausserdem liegt eine Dreiecksseite auf einer der beiden parallelen waagrechten Strecken. Ein Dreieck ist somit durch die Wahl einer der beiden Parallelen und die anschliessende Wahl von zwei verschiedenen Eckpunkten darauf festgelegt. Da es auf jeder der Parallelen sechs mögliche Eckpunkte gibt, kann die gesuchte Anzahl an Dreiecken durch

$$2 \cdot (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 30$$

berechnet werden.

Aufgabe 3. Im Inneren eines Quadrates $ABCD$ ist ein Punkt E gegeben, so dass das Dreieck $\triangle ABE$ gleichseitig ist. Wie gross ist der Winkel $\angle DCE$ in Grad?



Ergebnis. 15

Lösungsweg. Weil in einem gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel 60° sind, erhält man $\angle CBE = 90^\circ - \angle EBA = 30^\circ$. Wegen $\overline{EB} = \overline{AB} = \overline{BC}$ ist das Dreieck $\triangle BCE$ gleichschenkelig und es ergibt sich

$$\angle ECB = \angle BEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBE) = 75^\circ.$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel $\angle DCE = 90^\circ - \angle ECB = 15^\circ$.

Aufgabe 4. Die kleine Sandi besitzt eine grosse Schatzkiste mit vielen beschrifteten Münzen: Eine Münze ist mit der Zahl 1 beschriftet, zwei Münzen mit der Zahl 2, ..., achtzehn Münzen mit der Zahl 18 und neunzehn Münzen mit der Zahl 19. Sandi nimmt eine Münze nach der anderen aus der Schatzkiste, ohne die Beschriftung lesen zu können. Wie viele Münzen muss Sandi mindestens herausnehmen, wenn sie sichergehen will, dass sie zehn identisch beschriftete Münzen hat?

Ergebnis. 136

Lösungsweg. Zufällig hätte Sandi möglicherweise alle Münzen mit Beschriftungen kleiner als 10 und jeweils neun Münzen mit Zahlen von 10 bis 19 herausgenommen. Insgesamt ergibt das $(1 + 2 + \dots + 9) + 9 \cdot 10 = 135$ Münzen. Daher garantiert die Entnahme von 135 Münzen nicht, dass man zehn gleich beschriftete Münzen hat.

Wenn Sandi jedoch 136 Münzen herausnimmt, gibt es mindestens 91 Münzen, die mit einer Zahl grösser als 9 beschriftet sind. Nach dem Schubfachprinzip wurde daher eine der Münzsorten mit den Beschriftungen 10 bis 19 mindestens zehnmal herausgenommen. Daher beträgt die minimale Anzahl von Münzen 136.

Aufgabe 5. Herr Zucker kaufte eine grosse Schachtel seiner Halloween-Lieblingssüssigkeiten, um sie an vorbeikommende Kinder zu verteilen. Jedoch ass er die Hälfte davon bereits, bevor das erste Kind vorbeikam und einen gewissen Anteil erhielt. Danach ass er die Hälfte der noch verbliebenen Süssigkeiten, bis das zweite Kind kam, und wieder die Hälfte des Restes, bevor das dritte Kind kam und den gesamten Rest erhielt. Wenn jedes Kind genau drei Süssigkeiten erhielt, wie viele Süssigkeiten kaufte Herr Zucker?

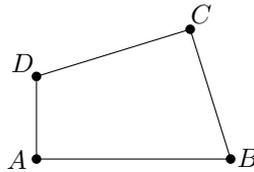
Ergebnis. 42

Lösungsweg. Sei n die Anzahl gekaufter Süssigkeiten. Dann lässt sich die Verteilung der Süssigkeiten beschreiben mit der Gleichung

$$\left(\left(\frac{n}{2} - 3 \right) \cdot \frac{1}{2} - 3 \right) \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0.$$

Auflösen nach n ergibt $n = 42$.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein Viereck $ABCD$ mit rechten Winkeln in den Ecken A und C . Ferner seien $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 8$ und $\overline{DA} = 2$. Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.



Ergebnis. $24 + 4\sqrt{6}$

Lösungsweg. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich $\overline{BD} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ und hieraus

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Also ist der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks

$$\frac{1}{2}(6 \cdot 8 + 2 \cdot 4\sqrt{6}) = 24 + 4\sqrt{6}.$$

Aufgabe 7. Ein Bürodrucker kann einseitig oder doppelseitig drucken. Einseitiges Drucken dauert drei Sekunden pro Seite, Duplexdruck neun Sekunden pro Blatt. Kathi möchte einen achtzehnsseitigen wissenschaftlichen Bericht doppelseitig ausdrucken. Sie kann entweder direkt Duplexdruck verwenden oder erst die ungeraden Seiten drucken, diese von Hand zurück in den Drucker legen und dann die geraden Seiten drucken. Kathi stellt bald fest, dass beide Varianten genau gleich lang dauern. Wie viele Sekunden braucht sie, um die Blätter zurück in den Drucker zu legen?

Ergebnis. 27

Lösungsweg. Wir wissen, dass Kathi neun Blatt Papier bedrucken möchte. Benutzt sie die Duplexfunktionalität, dauert das Drucken also $9 \cdot 9 = 81$ Sekunden. Bedruckt sie Vorder- und Rückseite einzeln, wird jedes Blatt zweimal bedruckt, das Drucken dauert also $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$ Sekunden. Demnach dauert das Wiedereinlegen des Papiers $81 - 54 = 27$ Sekunden.

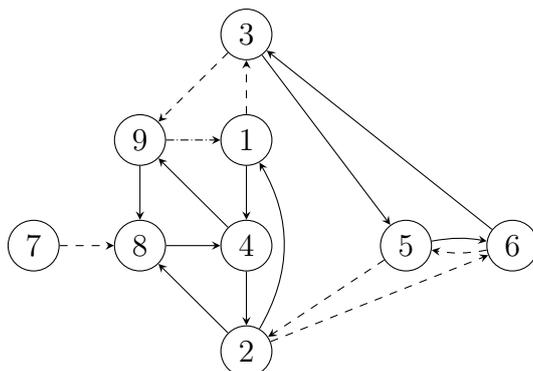
Aufgabe 8. Finde alle 9-stelligen Zahlen A , welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Jede Ziffer $1, \dots, 9$ kommt genau einmal vor.
- Jede zweistellige Zahl, die aus zwei benachbarten Ziffern von A gebildet wird, ohne dabei die Reihenfolge der Ziffern zu verändern, ist durch 7 oder 13 teilbar.

Ergebnis. 784913526

Lösungsweg. Wir ordnen die Ziffern $1, \dots, 9$ in einem Diagramm an und fügen einen Pfeil von x nach y hinzu, wenn die zweistellige Zahl \overline{xy} durch 7 oder 13 teilbar ist. Die durchgezogenen Pfeile stehen für die Teilbarkeit durch 7, die

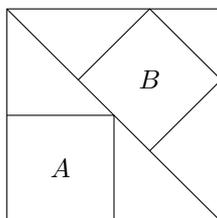
strichlierten für die Teilbarkeit durch 13 und die strichpunktierte Linie für die Teilbarkeit durch beide Zahlen.



Aus dem Diagramm geht hervor, dass die gesuchte Zahl A mit den Ziffern 784 beginnen muss. Falls die nächste Ziffer 9 ist, müssen wir mit 1, 3 und 5 fortsetzen und die verbleibenden beiden Ziffern müssen die Reihenfolge 2, 6 haben. Auf diese Weise erhalten wir die Lösung 784913526.

Wenn wir dagegen mit 7842 weitermachen, gibt es zwei Fälle zu berücksichtigen. Angenommen wir machen mit 1 und anschliessend 3 weiter, dann kann die Zahl A nicht gleichzeitig 5 und 9 enthalten. Wir stossen auf das gleiche Problem, wenn wir mit 784263 fortsetzen. Daher ist die oben angeführte Lösung die einzige.

Aufgabe 9. Zwei Quadrate sind in einem grösseren Quadrat wie in der Abbildung zu sehen eingepasst. Bestimme den Flächeninhalt des Quadrats A , wenn 48 der Flächeninhalt des Quadrats B ist.



Ergebnis. 54

Lösungsweg. Da die an das Quadrat B angrenzenden Dreiecke gleichschenkelig sind, ist die auf der Diagonalen liegende Seite von B genau das mittlere Drittel der Diagonale. Bezeichnet man mit s die Seitenlänge des grossen Quadrats, so hat B die Seitenlänge $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$ und A die Seitenlänge $\frac{1}{2} \cdot s$. Also ist das Verhältnis der Flächeninhalte der eingepassten Quadrate

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}$$

weshalb A den Flächeninhalt $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$ hat.

Aufgabe 10. Fiona hat zwei Würfel: einen der Seitenlänge 9 cm bestehend aus lauter weissen Einheitswürfeln, das heisst Würfeln mit der Seitenlänge 1 cm, und einen der Seitenlänge 10 cm, der aus lauter schwarzen Einheitswürfeln zusammengesetzt ist. Sie will damit einen Würfel der Seitenlänge 12 cm aufbauen. Wie viele cm^2 der Oberfläche müssen mindestens schwarz sein?

Ergebnis. 0

Lösungsweg. Fiona hat $9^3 = 729$ weisse und $10^3 = 1000$ schwarze Einheitswürfel. Für die Oberfläche des Würfels mit der Seitenlänge 12 cm benötigt sie $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ Einheitswürfel. Also kann sie den Würfel so bauen, dass die ganze Oberfläche des Würfels mit der Seitenlänge 12 cm weiss ist. Deshalb ist die Antwort 0.

Aufgabe 11. Nach der Korrektur eines Mathematiktests einer Klasse erkennt der Lehrer, dass genau zehn seiner Schüler Brüche nicht multiplizieren können, vierzehn sie nicht addieren können und siebzehn Brüche nicht kürzen können. Ausserdem fehlt jedem Schüler mindestens eine dieser drei Fähigkeiten und es gibt genau sechs Schüler, die alle drei Fähigkeiten nicht beherrschen. Wie viele Schüler sind höchstens in dieser Klasse?

Ergebnis. 29

Lösungsweg. Um die Klassengrösse exakt bestimmen zu können, benötigt man die Information, wie viele Schüler genau zwei dieser Fähigkeiten nicht beherrschen. Man erkennt jedoch, dass man die grösste Anzahl erhält, wenn man davon ausgeht, dass jeder Schüler, der mindestens zwei Fähigkeiten nicht beherrscht, tatsächlich alle drei nicht kann. In diesem Fall ist die Gesamtzahl der Schüler

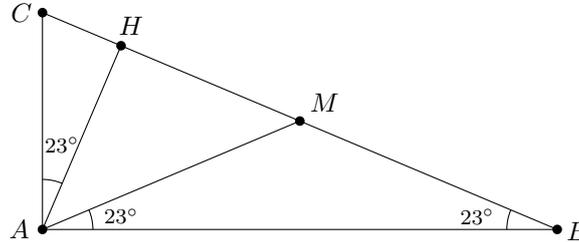
$$10 + 14 + 17 - 2 \cdot 6 = 29.$$

Man muss die Anzahl der Schüler, denen alle drei Fähigkeiten fehlen, zweimal subtrahieren, da diese Schüler bei der Addition der anderen drei Gruppen insgesamt dreimal gezählt werden.

Aufgabe 12. Einer der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt 23° . Bestimme den Winkel (in Grad) zwischen der Seitenhalbierenden und der Höhe, die beide vom rechten Winkel ausgehen.

Ergebnis. 44

Lösungsweg. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkel $\angle BAC = 90^\circ$. Verbindet man den Punkt A mit dem Mittelpunkt M von BC , so erhält man die Seitenhalbierende. Der Schnittpunkt der Höhe mit BC wird mit H bezeichnet.



Aufgrund des Satzes von Thales liegen die Eckpunkte des Dreiecks $\triangle ABC$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt M . Sei nun o.B.d.A. Winkel $\angle CBA = 23^\circ$. Da das Dreieck $\triangle ABM$ gleichschenkelig ist, ergibt sich $\angle BAM = 23^\circ$. Ausserdem ist das Dreieck $\triangle AHC$ ähnlich zum Dreieck $\triangle ABC$ und deshalb $\angle HAC = 23^\circ$. Also ist $\angle MAH = 90^\circ - 2 \cdot 23^\circ = 44^\circ$ die gesuchte Winkelgrösse.

Aufgabe 13. Für zwei positive ganze Zahlen a und b gilt $20a + 19b = 365$. Bestimme den Wert von $20b + 19a$.

Ergebnis. 376

Lösungsweg. Es ist klar, dass $a, b \leq 20$ sein muss. Addiert man b auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung, erhält man $20(a + b) = 365 + b$. Man sieht nun, dass die linke Seite durch 20 teilbar ist. Daher muss auf der rechten Seite 380 stehen. Dies führt zur Lösung $b = 15$ und somit zu $a = 4$. Folglich ergibt sich $20b + 19a = 380 - a = 376$.

Aufgabe 14. Ein regelmässiges 2018-Eck besitzt 2033 135 Diagonalen, wenn man die Seiten nicht mitzählt. Wie viele solche Diagonalen mehr besitzt ein regelmässiges 2019-Eck?

Ergebnis. 2017

Lösungsweg. Die Regelmässigkeit der Polygone spielt für die Aufgabenstellung keine Rolle. Man nimmt an, dass das 2019-Eck aus einem 2018-Eck dadurch entsteht, dass man eine Kante auftrennt und eine neue Ecke einfügt. Diese neue Ecke wird mit den 2016 nicht benachbarten Ecken verbunden und zusätzlich entsteht eine neue Diagonale, die die beiden benachbarten Ecken verbindet. Also nimmt die Anzahl der Diagonalen insgesamt um 2017 zu.

Aufgabe 15. Finde alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$.

Ergebnis. 2, 5, -6

Lösungsweg. Wegen $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ ist die Basis immer eine positive reelle Zahl. Deshalb wird die Gleichung genau dann erfüllt, wenn die Basis gleich 1 oder der Exponent gleich 0 ist. Im ersten Fall ist $x^2 - 4x + 5 = 1$ äquivalent zu $(x - 2)^2 = 0$ mit der Lösung $x = 2$. Im zweiten Fall hat die Gleichung $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ die beiden Lösungen $x = 5$ und $x = -6$. Insgesamt gibt es dadurch drei Lösungen.

Aufgabe 16. Wie viele Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4 gibt es, so dass beim Löschen einer der Zahlen die verbleibende Zahlenfolge weder monoton steigend noch monoton fallend ist?

Hinweis. Eine *Permutation* ist eine Folge, die jede Zahl genau einmal enthält.

Ergebnis. 4

Lösungsweg. Angenommen 1 ist die erste Zahl. Damit die Folge beim Löschen einer Zahl nicht monoton steigend ist, muss die Permutation (1, 4, 3, 2) lauten. Wenn man jedoch nun die Zahl 1 löscht, ergibt sich eine monoton fallende Zahlenfolge und somit erfüllt diese Permutation nicht die gegebenen Bedingungen. Daher kann 1 nicht die erste - und aus Symmetriegründen auch nicht die letzte - Zahl sein. Das Gleiche gilt für die Zahl 4. Somit müssen 1 und 4 in der Mitte sein. Beide Reihenfolgen (1, 4) und (4, 1) ergeben jeweils zwei gültige Permutationen:

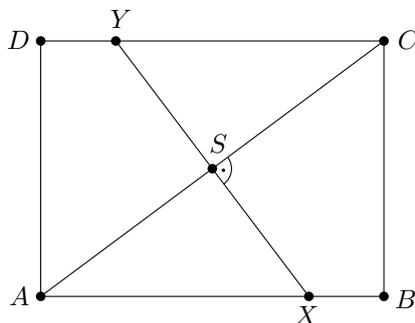
$$(2, 1, 4, 3), (3, 1, 4, 2), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)$$

Daher gibt es vier Permutationen, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 17. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 8$ cm und $\overline{BC} = 6$ cm. Mit X bzw. Y seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AC mit der Seite AB bzw. mit der Seite CD benannt. Wie lang ist die Strecke XY in Zentimetern?

Ergebnis. $\frac{15}{2}$

Lösungsweg. Mit dem Satz des Pythagoras berechnet man $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ und daraus $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Sei S der Schnittpunkt der Strecke AC mit ihrer Mittelsenkrechten. Klarerweise ist dann S der Mittelpunkt der Diagonale AC , also ist $\overline{AS} = 5$.



Wegen $\angle BAC = \angle XAS$ und $\angle ASX = \angle CBA = 90^\circ$ sind die Dreiecke $\triangle AXS$ und $\triangle ABC$ ähnlich, woraus $\overline{SX} : \overline{AS} = \overline{BC} : \overline{AB}$ und somit

$$\overline{SX} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{15}{4}$$

folgt. Also ergibt sich für die gesuchte Länge $\overline{XY} = 2 \cdot \overline{SX} = \frac{15}{2}$.

Aufgabe 18. Im Kryptogramm $FOUR + FIVE = NINE$ repräsentiert jeder Buchstabe eine bestimmte Ziffer. Gleiche Buchstaben repräsentieren dieselbe Ziffer, verschiedene Buchstaben unterschiedliche Ziffern. Weiter ist bekannt, dass

- $FOUR$ durch vier teilbar ist,
- $FIVE$ durch fünf teilbar ist,
- $NINE$ durch drei teilbar ist.

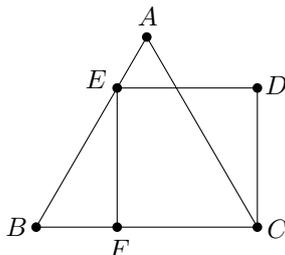
Finde alle möglichen Werte von $NINE$.

Ergebnis. 3435

Lösungsweg. Aus der Betrachtung der Einerstelle erschliesst sich sofort $R = 0$. Wegen der Teilbarkeit von $FIVE$ durch fünf und $R = 0$ folgt $E = 5$. Da die Ziffer 0 bereits vergeben ist, ergibt sich aus der Betrachtung der Hunderterstelle $O = 9$, ein Übertrag von 1 aus der Zehnerstelle und ein Übertrag von 1 in die Tausenderstelle. Demnach muss $U + V$ grösser als 10 sein und N eine ungerade Ziffer grösser als 1, da $N = F + F + 1$. Andererseits muss $U + V \leq 7 + 8 = 15$ gelten, denn 9 wurde bereits vergeben. So bleibt für N nur noch der Wert $N = 3$. Wegen der Teilbarkeit von $FOUR$ durch vier ist demnach $U = 6$, $V = 7$ und $F = 1$.

Da $NINE$ durch drei teilbar ist, muss die Quersumme $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ ebenfalls durch drei teilbar sein. Von den passenden Werten 1, 4, 7 für I ist nur noch $I = 4$ verfügbar. Also folgt $NINE = 3435$ und das Kryptogramm entspricht der Gleichung $1960 + 1475 = 3435$.

Aufgabe 19. Wie in der Skizze zu sehen, sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und $CDEF$ ein Quadrat, so dass E auf der Strecke AB und F auf der Strecke BC liegt. Was ist der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn der Umfang des Quadrates 4 ist?



Ergebnis. $3 + \sqrt{3}$

Lösungsweg. Zusätzlich sei G der Schnittpunkt von AC mit DE . Die beiden Dreiecke $\triangle BFE$ und $\triangle GCD$ sind kongruent, da sie jeweils die Innenwinkel 30° , 60° und 90° besitzen und eine Dreiecksseite die Seite des Quadrats der Länge 1 ist. Solche Dreiecke sind die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit seiner Hypotenuse als Seitenlänge. Deshalb gilt $\overline{BE} = 2\overline{BF}$ und nach dem Satz des Pythagoras $\overline{BE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{BF}^2$. Nun benutzt man noch $\overline{EF} = 1$ und erhält $\overline{BF} = \sqrt{3}/3$. Für das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich also die Seitenlänge $1 + \sqrt{3}/3$ und somit der Umfang $3 + \sqrt{3}$.

Aufgabe 20. Es seien a und b reelle Zahlen. Von der Gleichung $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ ist bekannt, dass sie eine dreifache reelle Lösung hat. Welche Werte sind dann für a möglich?

Ergebnis. 42, -42

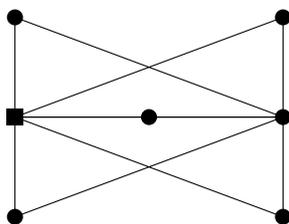
Lösungsweg. Ist r die dreifache Lösung der Gleichung, so gilt

$$(x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $3r^2 = 588$, also $r = \pm 14$. Wegen $a = 3r$ folgt $a = \pm 42$.

Aufgabe 21. Simon befindet sich auf einer Reise zu Inseln, die, wie die Abbildung zeigt, mit mautpflichtigen Brücken verbunden sind. Von jeder Brücke ist die Aussicht einzigartig, deshalb möchte er jede Brücke überqueren. Gleichzeitig möchte er Geld sparen und deshalb jede Brücke nur ein einziges Mal überqueren. Wie viele mögliche Reisewege hat er, startend auf der quadratischen Insel?

Hinweis. Simon kann nicht von einer Brücke auf eine andere springen, wenn er sich nicht auf einer Insel befindet, und er kann jede Insel beliebig oft besuchen.



Ergebnis. 120

Lösungsweg. Bemerke, dass die quadratische Insel und die Insel rechts in der Mitte *spezielle* Inseln sind: Alle Brücken starten in einer von diesen beiden und von jeder *normalen* Insel gibt es nur Brücken zu den beiden speziellen Inseln. Simon geht demnach immer von einer der speziellen Inseln zur anderen via eine der normalen Inseln. Es muss also nur die Reihenfolge der besuchten normalen Inseln bestimmt werden, wofür es $5! = 120$ Möglichkeiten gibt. Somit sind es 120 mögliche Reisewege.

Aufgabe 22. Wieviele geordnete Paare positiver ganzer Zahlen (m, n) mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen 2000 gibt es?

Ergebnis. 63

Lösungsweg. Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

- 1) Keine der Zahlen ist gleich $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Dann ist eine der Zahlen gleich $2^4 \cdot 5^k$ mit $k \in \{0, 1, 2\}$, die andere $2^l \cdot 5^3$ mit $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Das ergibt 12 ungeordnete Paare, also 24 geordnete Paare.
- 2) Eine der Zahlen ist gleich 2000. Dann kann die andere Zahl irgendein Teiler von 2000 sein, wovon es $(4+1) \cdot (3+1) = 20$ gibt. Bezieht man die Reihenfolge mit ein, ergibt das $2 \cdot 20 - 1 = 39$ geordnete Paare, wobei eins abgezogen wird, um $(2000, 2000)$ nicht doppelt zu zählen.

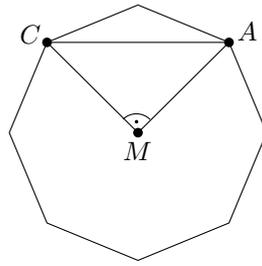
Insgesamt gibt es also $24 + 39 = 63$ Paare.

Aufgabe 23. Gegeben ist ein regelmässiges Achteck $ABCDEFGH$ mit $\overline{AC} = 7\sqrt{2}$. Bestimme den Flächeninhalt dieses Achtecks.

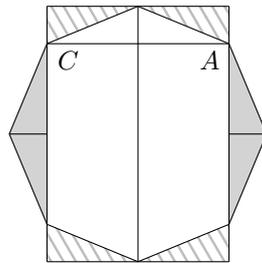
Ergebnis. $98\sqrt{2}$

Lösungsweg. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises des gegebenen Achtecks. Aus $\angle AMC = \frac{2}{8} \cdot 360^\circ = 90^\circ$ folgt, dass das Dreieck $\triangle MAC$ gleichschenkelig rechtwinklig ist. Wegen $\overline{AC} = 7\sqrt{2}$ hat der Radius des Umkreises die Länge 7 und

der Durchmesser die Länge 14.



Aufgrund der Flächenzerlegung in der nachfolgenden Abbildung erhält man den gesuchten Flächeninhalt durch Multiplikation der Länge von AC mit dem Durchmesser. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Aufgabe 24. Vier Freunde beschliessen neue Sprachen zu lernen. In der Sprachschule wird Arabisch, Bengalisch, Chinesisch und Niederländisch angeboten. Jeder der vier Freunde möchte genau drei dieser Sprachen lernen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Sprachen, wenn sie zumindest einen Kurs gemeinsam belegen wollen?

Ergebnis. 232

Lösungsweg. Zuerst stellen wir fest, dass es für eine Person genau vier Möglichkeiten gibt, um die Kurse zu wählen. Wir können die Auswahl als Tripel darstellen oder äquivalent den einen Kurs notieren, den die Person *nicht* ausgewählt hat. Es gibt also $4^4 = 256$ Möglichkeiten die Kurse zu wählen, wenn wir die Zusatzbedingung ausser Acht lassen. Nun zählen wir jene Möglichkeiten, die verursachen, dass die vier Freunde keinen Kurs gemeinsam haben. Das heisst, es muss für jede Sprache einen Freund geben, der sie nicht lernt. Daher gibt es $4! = 24$ solcher Möglichkeiten. Daraus berechnen wir das Ergebnis als $256 - 24 = 232$.

Aufgabe 25. Anna bekommt eine positive ganze Zahl n mit Ziffern ungleich null genannt. Sie multipliziert diese mit derjenigen Zahl, welche die gleichen Ziffern wie n hat, aber in umgekehrter Reihenfolge. Anna stellt fest, dass das Ergebnis um tausend grösser ist als das Produkt der Ziffern von n . Finde alle möglichen Werte für n .

Ergebnis. 24, 42

Lösungsweg. Klarerweise muss n zumindest zwei Stellen haben. Wenn n zweistellig ist und aus den Ziffern a und b besteht, wobei beide ungleich null sind, dann muss der Feststellung entsprechend

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab$$

gelten, also

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Da die linke Seite positiv ist, muss auch die rechte Seite positiv sein. Daher gilt $ab < 10$. Es bleiben dann nicht viele Fälle übrig und wir finden heraus, dass a und b in beliebiger Reihenfolge die Werte 2 und 4 annehmen müssen. Wenn n nun $k \geq 3$ Stellen hat, dann ist die linke Seite als Produkt der Zahl n mit ihrer Spiegelzahl mindestens $(10^{k-1})^2$. Die rechte Seite jedoch ist als Summe aus 1000 und dem Produkt der k Ziffern von n kleiner als $1000 + 10^k$. Als Konsequenz erhalten wir, dass n nicht mehr als zwei Stellen haben kann.

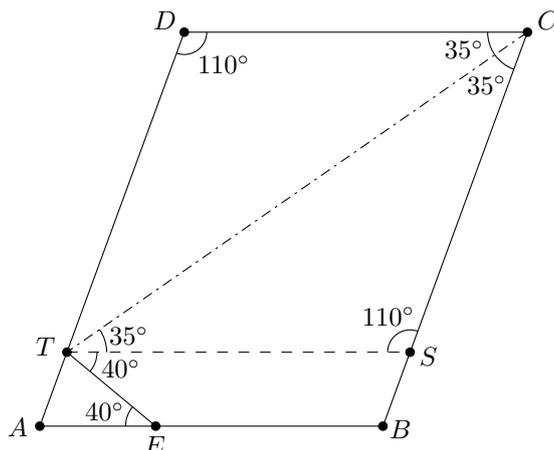
Aufgabe 26. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei T ein Punkt im Inneren der Strecke AD , so dass die Gerade TC den Winkel $\angle DCB$ halbiert. Weiterhin sei E ein Punkt auf der Seite AB , so dass $\angle TEA = 40^\circ$ gilt. Wie gross ist der Winkel $\angle ADC$ (in Grad), wenn $\angle ETC = 75^\circ$ ist?

Ergebnis. 110

Lösungsweg. Zeichne die Parallele zu AB durch T und bezeichne mit S ihren Schnittpunkt mit der Seite BC . Dann gilt $\angle ETS = \angle TEA = 40^\circ$ und

$$\angle DCT = \angle STC = \angle ETC - \angle ETS = 35^\circ.$$

Weil TC den Winkel $\angle DCB$ halbiert, erhält man $\angle DCT = \angle TCS$ und daraus $\angle CTD = \angle TCS = 35^\circ$. Es folgt $\angle ADC = \angle TDC = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.



Aufgabe 27. Zwei grosse Adelshäuser trafen sich zu einem Fest, beide vertreten durch mindestens ein männliches und mindestens ein weibliches Mitglied. Jedes Mitglied eines Hauses begrüßte jedes Mitglied des anderen Hauses: Wenn sich zwei Männer begrüßten, schüttelten sie sich die Hände, während sich zwei Frauen oder eine Frau und ein Mann voreinander verbeugten. Insgesamt kam es während der Begrüssung zu 85 Handschlägen und 162 Verbeugungen. Wie viele Frauen waren auf dem Fest anwesend?

Hinweis. Es zählt als *eine* Verbeugung, wenn sich zwei Personen voreinander verneigen.

Ergebnis. 10

Lösungsweg. Sei m_1, m_2, w_1, w_2 die Anzahl der Männer und Frauen der beiden Adelshäuser. Aus $m_1 m_2 = 85 = 5 \cdot 17$ folgert man, dass o.B.d.A. $m_1 = 5$ und $m_2 = 17$ gelten muss, denn die Möglichkeit, dass einer der Faktoren 1 ist, kann leicht ausgeschlossen werden. Ausserdem gab es insgesamt $85 + 162 = 247$ Begrüssungen. Wegen

$$(m_1 + w_1)(m_2 + w_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

erhält man $m_1 + w_1 = 13$ und $m_2 + w_2 = 19$, denn auch hier können die anderen Faktorisierungen wieder leicht ausgeschlossen werden. Daher gilt $w_1 = 8, w_2 = 2$ und die Antwort lautet somit $8 + 2 = 10$.

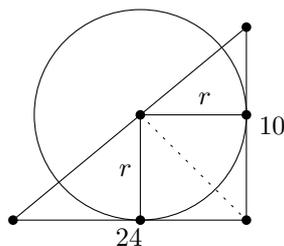
Aufgabe 28. Betrachte ein Dreieck mit den Seitenlängen 10, 24 und 26. Sei k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der längsten Dreiecksseite liegt, und der die beiden kürzeren Dreiecksseiten berührt. Finde den Radius des Kreises k .

Ergebnis. $120/17$

Lösungsweg. Wegen $10^2 + 24^2 = 26^2$ ist das Dreieck nach dem Satz von Pythagoras rechtwinklig. Die Strecke vom Eckpunkt des Dreiecks, bei dem der rechte Winkel liegt, zum Mittelpunkt des Kreises, der auf der Hypotenuse liegt, unterteilt das gegebene Dreieck in zwei kleinere Dreiecke. Da der Radius im Berührungspunkt des Kreises mit der Kathete auf dieser senkrecht steht, ist dieser Radius genau die Höhe in einem kleinen Dreieck. Somit kann man den Flächeninhalt des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks auf zwei Arten berechnen:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r,$$

wobei r den Radius des Kreises k bezeichnet. Also ist $120 = 17r$ und es ergibt sich $r = 120/17$.



Aufgabe 29. Margarita geht mit 10 CHF in ein Casino. Die Spielautomaten im Casino funktionieren folgendermassen: Der Spieler wirft 1.– in beliebigen Münzen ein und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit p den Jackpot, bei Nichtgewinn werden 0.5 CHF zurückgegeben. Margarita möchte den Spielautomaten so lange spielen, bis sie entweder den Jackpot gewinnt oder aber kein Geld mehr hat. Finde für sie die kleinste Wahrscheinlichkeit p , so dass sie eine Chance von mindestens 50% hat, den Jackpot zu gewinnen.

Ergebnis. $1 - \sqrt[19]{0.5}$

Lösungsweg. Margarita kann höchstens 19-mal erfolglos spielen, da sie nach dem Ausgeben ihres letzten Franks nur noch 0.5 CHF übrig hat und dies weniger ist, als der Spielautomat annimmt. Die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Verlust ist $1 - p$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, den Jackpot nicht zu gewinnen, gleich $(1 - p)^{19}$. Um eine Gewinnchance von mindestens 50% auf den Jackpot zu haben, muss $(1 - p)^{19} \leq 0.5$ gelten. Das ist äquivalent zu $p \geq 1 - \sqrt[19]{0.5}$ und damit ist $1 - \sqrt[19]{0.5}$ der gesuchte kleinste Wert von p .

Aufgabe 30. Bestimme alle vierstelligen positiven ganzen Zahlen \overline{abcd} , die gleich dem Wert von $a^a + b^b + c^c + d^d$ sind. Dabei darf keine der Ziffern die Null sein.

Ergebnis. 3435

Lösungsweg. Wegen $6^6 \geq 10000$ darf keine der Ziffern grösser als 5 sein. Wenn alle Ziffern eine 4 wären, dann wäre die geforderte Bedingung nicht erfüllt, und wenn höchstens drei Mal die Ziffer 4 vorkommen würde, dann wäre die Summe wegen $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$ nicht vierstellig. Also muss mindestens eine Ziffer 5 vorkommen und wegen $5^5 = 3125$ darf auch höchstens eine Ziffer 5 enthalten sein, da ansonsten die erste Ziffer der vierstelligen Zahl grösser als 5 wäre. Aufgrund von $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$ muss dann die erste Ziffer eine 3 sein.

Jetzt weiss man, dass die gesuchte Zahl mindestens $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$ sein muss. Da 3154 die Bedingung nicht erfüllt und 3155 wegen der beiden Fünfen nicht möglich ist, muss an der Hunderterstelle mindestens eine 2 stehen. Die nächste in Frage kommende Zahl ohne eine Ziffer grösser als 5 ist $3215 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$. Deshalb muss mindestens eine 4 dabei sein, aber es kann wegen $5^5 + 2 \cdot 4^4 = 3637$ auch höchstens eine 4 enthalten sein. Durch Untersuchen der letzten noch möglichen drei Fälle sieht man nun leicht, dass es nur die einzige Lösung 3435 gibt.

Aufgabe 31. Wie viele 5-Tupel zweistelliger Zahlen gibt es, so dass jede der Ziffern von 0 bis 9 genau einmal vorkommt und jede der zweistelligen Zahlen gerade, aber nicht durch drei teilbar ist?

Hinweis. 5-Tupel, die sich nur in der Anordnung der zweistelligen Zahlen unterscheiden, werden als gleich angesehen.

Ergebnis. 16

Lösungsweg. Alle fünf zweistelligen Zahlen müssen mit einer geraden Ziffer enden. Da die Zahlen nicht durch drei teilbar sein sollen, sind für die Endziffern 0 und 6 nur die Zehnerziffern 1, 5 oder 7 möglich und für die Endziffern 2 und 8 nur die Zehnerziffern 3, 5 oder 9. Die Zahl, die auf 4 endet, kann nur mit 1, 3, 7 oder 9 beginnen. Wählt man als die auf 4 endende Zahl die 14, so gibt es für die Zehnerziffern für 0 und 6 nur noch zwei Möglichkeiten (entweder 50, 76 oder 56, 70) und folglich für die Endziffern 2 und 8 auch nur noch zwei Möglichkeiten (entweder 32, 98 oder 38, 92). Insgesamt gibt es in diesem Fall also vier Möglichkeiten. Ähnliche Argumente gelten für jede andere Wahl der Zehnerziffer zur Einerziffer 4. Da es vier Möglichkeiten dafür gibt, ist die gesuchte Anzahl an 5-Tupeln $4 \cdot 4 = 16$.

Aufgabe 32. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n , welche die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019$$

erfüllen.

Hinweis. $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x , das heisst die grösste ganze Zahl kleiner gleich x .

Ergebnis. 5439

Lösungsweg. Sei

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Dann ist f eine monoton wachsende Funktion in n . Ferner ist $f(n) - f(n - 1) = 1$, wenn n durch genau eine der Zahlen 5 oder 7 teilbar ist, und $f(n) - f(n - 1) = 3$, wenn n durch 35 teilbar ist. In allen anderen Fällen ist $f(n) = f(n - 1)$. Wegen

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} \right) n = \frac{13}{35} n$$

erhält man die Abschätzung

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019$$

für mögliche Lösungen und da n ganzzahlig sein muss, gilt $n \geq 5436$. Nun ist $f(5436) = 2018$ und die nächst grössere durch 5 teilbare Zahl ist 5440 und die nächst grössere durch 7 teilbare Zahl ist 5439. Also folgt $f(5439) = 2019$, $f(5440) = 2020$, und somit ist 5439 die einzige Lösung.

Aufgabe 33. Für wie viele ganze positive Zahlen n kann man (nicht unbedingt verschiedene) positive ganze Zahlen $x, y \leq 1\,000\,000$ finden, so dass

$$n = S(x) = S(y) = S(x + y)$$

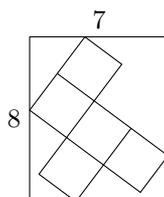
gilt?

Hinweis. Mit $S(a)$ ist die Quersumme einer positiven ganzen Zahl a bezeichnet.

Ergebnis. 6

Lösungsweg. Da jede positive ganze Zahl a und ihre Quersumme $S(a)$ bei Division durch 9 denselben Rest ergeben, erschliesst sich aus der Aufgabenstellung, dass n, x, y und $x + y$ bei Division durch 9 denselben Rest ergeben. Folglich muss x , und demnach auch n , ein Vielfaches von 9 sein. Ist also $n = 9m$ mit einer positiven ganzen Zahl m , so werden mit der Wahl $x = y = 10^m - 1$ die Gleichungen aus der Aufgabenstellung erfüllt. Die grösste Quersumme für Zahlen bis zu einer Million ist 54. Demnach gibt es sechs passende n , nämlich 9, 18, 27, 36, 45 und 54.

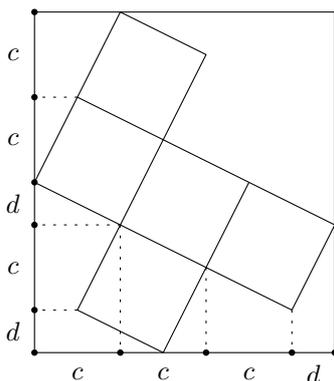
Aufgabe 34. Ein Pentomino bestehend aus fünf Quadraten mit der Seitenlänge a ist in ein Rechteck der Grösse 7×8 eingepasst, wie in der Abbildung zu sehen ist:



Finde die Seitenlänge a .

Ergebnis. $\sqrt{5}$

Lösungsweg. Sei c die Länge der längeren und d die der kürzeren Projektion einer Quadratseite auf eine Rechtecksseite.



Dann erhält man

$$\begin{aligned} 3c + 2d &= 8, \\ 3c + d &= 7, \end{aligned}$$

und daraus $c = 2$ und $d = 1$. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

Aufgabe 35. Paul hat eine rechteckige Schokoladentafel der Grösse 5×3 . Er hat extra Zucker auf das linke, obere Schokoladenstückchen gelegt, um es süsser zu machen. Er isst die Schokoladentafel in folgender Weise: In jedem Schritt wählt er zufällig die Spalte ganz rechts oder die unterste Reihe, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$. Das wiederholt er, bis die gesamte Schokolade gegessen ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er im letzten Schritt nur das einzelne süssere Schokoladenstückchen isst?

Ergebnis. $15/64$

Lösungsweg. Angenommen, die Schokoladentafel hat drei Reihen und fünf Spalten. Die Schokolade ist aufgegessen, sobald dreimal die unterste Reihe (R) oder fünfmal die rechte Spalte (S) gewählt wurde. Das ist frühestens nach drei und spätestens nach sieben Schritten der Fall. Dass im letzten Schritt nur das einzelne süssere Schokoladenstückchen gegessen wird, kann nur dann passieren, wenn in den ersten sechs Schritten, egal in welcher Reihenfolge, genau zweimal R und viermal S gewählt wurde (im siebten Schritt wird unabhängig von der Wahl von R oder S das einzelne süssere

Schokoladenstückchen gegessen). Es gibt $\binom{6}{2}$ Sequenzen aus R und S der Länge 6, die genau zwei R und vier S enthalten. Jede dieser Sequenzen hat eine Wahrscheinlichkeit von $1/2^6$, daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

Aufgabe 36. Christoph bildete einige paarweise verschiedene Primzahlen, wobei er jede der Ziffern $1, \dots, 9$ genau zwei Mal benutzte und darauf achtete, dass die Summe aller dieser Primzahlen so klein wie möglich war. Welchen Wert hatte diese Summe?

Ergebnis. 477

Lösungsweg. Keine Primzahl ausser 2 und 5 kann auf 5 oder eine gerade Ziffer enden. Deshalb müssen die Ziffern

$$2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8$$

mindestens an den Zehnerstellen der Zahlen in Christophs Menge vorkommen. Ausserdem müssen die übrigen Ziffern

$$2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9$$

mindestens auf der Einerstelle auftreten. Deshalb beträgt die Summe dieser Zahlen mindestens

$$10(2 + 5 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8) + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 3 + 7 + 7 + 9 + 9 = 477.$$

Andererseits kann diese Summe durch die Primzahlen

$$2, 5, 29, 41, 47, 53, 61, 67, 83, 89$$

auch erreicht werden, so dass 477 die gesuchte Lösung ist.

Aufgabe 37. Tom und Jerry haben zwei Polynome $T(x) = x^2 + 2x + 10$ und $J(x) = x^2 - 8x + 25$. Wenn jeder von ihnen seine positive ganze Lieblingszahl t bzw. j in sein jeweiliges Polynom einsetzt, erhalten sie dasselbe Ergebnis, d.h. es ist $T(t) = J(j)$. Finde alle möglichen Werte von $|t - j|$.

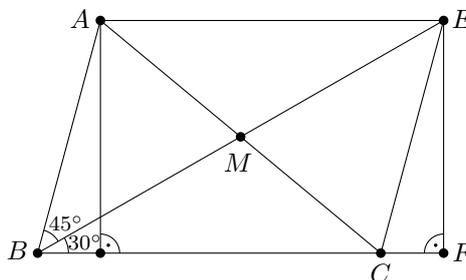
Ergebnis. 1, 5

Lösungsweg. Wenn man die linke Seite der Gleichung $T(t) - J(j) = 0$ faktorisiert, erhält man $(t + j - 3)(t - j + 5) = 0$ und daher gilt entweder $\{t, j\} = \{1, 2\}$ oder $|t - j| = 5$. Folglich sind 1 und 5 die gesuchten Werte.

Aufgabe 38. Die Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ durch den Eckpunkt A ist gleich lang wie die Seitenhalbierende durch den Eckpunkt B . Der Winkel $\angle CBA$ beträgt 75° . Bestimme das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$.

Ergebnis. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösungsweg. Sei E die Punktspiegelung von B an M , dem Mittelpunkt von AC , und sei F die senkrechte Projektion von E auf BC (siehe Abbildung). Aus der ersten Bedingung der Aufgabenstellung folgt $\sin(\angle CBE) = \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}} = \frac{1}{2}$ und damit $\angle CBE = 30^\circ$. Somit ist $\angle MBA = \angle EBA = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.



Der Sinussatz angewandt auf die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle BCM$ ergibt

$$\frac{\overline{BM}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\overline{AM}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

und

$$\frac{\overline{BM}}{\sin(\angle ACB)} = \frac{\overline{CM}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\frac{1}{2}}.$$

Teilt man die erste durch die zweite Gleichung, erhält man

$$\frac{\sin(\angle ACB)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Sinussatz angewandt auf das Dreieck $\triangle CBA$ ergibt somit

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\angle ACB)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aufgabe 39. Bei Tic-Tac-Toe setzen zwei Spieler abwechselnd Kreise und Kreuze in ein 3×3 Quadrate grosses Spielfeld. Es gewinnt der Spieler, der zuerst drei seiner Symbole in einer Zeile, Spalte oder Diagonale hat. Das Spiel endet unentschieden, wenn sämtliche Felder ausgefüllt wurden und kein Spieler gewonnen hat. Wie viele Spielfeldkonfigurationen sind bei einem Unentschieden möglich ?

Hinweis. Rotierte Anordnungen werden alle separat gezählt, Kreis und Kreuz können beide das Spiel beginnen.

Ergebnis. 32

Lösungsweg. Unterscheide vier Fälle, je nach Symbol im mittleren Feld und welches Symbol fünf Mal vorkommt:

1) Ist ein Kreuz in der Mitte und gibt es fünf Kreuze, müssen die vier weiteren Kreuze so platziert sein, dass weder eine ganze Diagonale noch eine ganze Achse aus Kreuzen besteht. Es ergibt sich ein Muster wie in Abbildung 1, welches weder eine Rotations- noch eine Achsensymmetrie aufweist. Es gibt demnach 8 verschiedene solche Anordnungen.

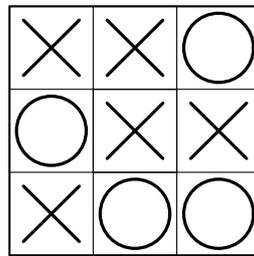


Figure 1

2) Ist ein Kreuz in der Mitte und gibt es fünf Kreuze, können sicher nicht alle vier Ecken mit einem Kreis gefüllt sein, da sonst der fünfte Kreis einen Sieg für Kreis bedeuten würde. Andererseits muss auf beiden Diagonalen mindestens ein Kreis vorkommen, sonst wäre es ein Sieg für Kreuz. Es müssen also entweder genau zwei oder drei Kreuze in die Ecken gesetzt werden. In beiden Fällen gibt es genau eine Möglichkeit, das Spielfeld zu einem Unentschieden zu ergänzen, die resultierenden Spielfelder sind gezeigt in Abbildung 2 und Abbildung 3. Beide Muster haben je eine Symmetrieachse, demnach gibt es jeweils 4 Möglichkeiten, durch Rotation eine weitere gültige Anordnung zu bekommen.

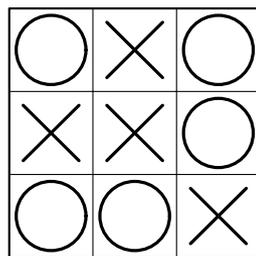


Figure 2

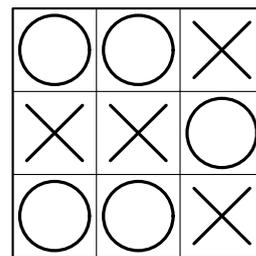


Figure 3

Die Fälle 3) und 4) sind analog zu 1) und 2), jeweils mit Kreuzen und Kreisen vertauscht. Insgesamt gibt es also $2(8 + 4 + 4) = 32$ Spielfeldkonfigurationen, die einem Unentschieden entsprechen.

Aufgabe 40. Bestimme die grösste positive ganze Zahl a , so dass keine positive ganze Zahl b die Ungleichungen

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}$$

erfüllt.

Ergebnis. 32

Lösungsweg. Bildet man die Kehrwerte, so erhält man

$$0.72 < \frac{b}{a} < 0.75.$$

Da das Intervall zwischen 0.72 und 0.75 die Länge $0.03 > 1/34$ hat, gibt es für alle $a \geq 34$ eine Lösung. Für $a = 33$ existiert die Lösung $b = 24$ mit $b/a = 8/11 = 0.727\bar{2}$. Wegen $24/32 = 0.75$ und $1/32 > 0.03$ gibt es für $a = 32$ keine Lösung mehr, so dass also 32 die gesuchte Zahl ist.

Aufgabe 41. Heiko und Eva machen eine Velotour der Länge 110 km von Passau nach Linz. Auf dieser Strecke müssen sie drei Steigungen überwinden. In der ersten Pause sagt Heiko, ein kluger Kopfrechner, zu Eva: „Wenn man die Entfernungen von Passau zu dem jeweils höchsten Punkt der drei Anstiege miteinander multipliziert, so erhält man ein Vielfaches von 2261.“ Eva überlegt eine Weile und erwidert erstaunt: „Das Gleiche gilt, wenn man die Entfernungen dieser Punkte von Linz aus gemessen multipliziert.“ Nach 80 km machen sie eine zweite Pause und Heiko meint: „Jetzt haben wir bis Linz nur noch einen Anstieg vor uns und haben es dann bald geschafft.“

Angenommen, alle vorkommenden Entfernungen sind natürliche Zahlen und in km angegeben, in welcher Entfernung von Passau befinden sich dann die höchsten Punkte der drei Anstiege? Gib die Entfernungen ebenfalls in km an.

Ergebnis.

Lösungsweg. 68, 76, 91

Lösungsweg. Seien A , B und C die drei gesuchten Entfernungen der höchsten Punkte der Anstiege von Passau aus in km gemessen. Es soll $2261 \mid ABC$ und $2261 \mid (110 - A)(110 - B)(110 - C)$ gelten. Wegen $2261 = 7 \cdot 323 = 7 \cdot 17 \cdot 19$ und $7 \cdot 17 = 119 > 110$ können keine zwei der Primfaktoren von 2261 in einer Entfernung enthalten sein.

O.B.d.A. gelte $7 \mid A$, $17 \mid B$ und $19 \mid C$. Da diese Überlegungen auch für die Entfernungen $110 - A$, $110 - B$ und $110 - C$ zutreffen, gibt es wegen $7 \nmid (110 - A)$ die beiden Möglichkeiten $7 \mid (110 - B)$ und $7 \mid (110 - C)$. Im Fall $7 \mid (110 - B)$ folgt $19 \mid (110 - A)$ wegen $19 \nmid (110 - C)$, und daraus $17 \mid (110 - C)$. Im Fall $7 \mid (110 - C)$ folgt analog $17 \mid (110 - A)$ und $19 \mid (110 - B)$.

Wegen $\text{ggT}(7, 19) = 1$ ist die einzige Zerlegung von 110 in $a \cdot 7 + b \cdot 19$ mit nicht-negativen Zahlen a und b gegeben durch $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$. In der Tat sind alle Zerlegungen von der Form $110 = (13 + 19k) \cdot 7 + (1 - 7k) \cdot 19$ für $k \in \mathbb{Z}$ und die Koeffizienten nur für $k = 0$ nicht-negativ. Auf analoge Weise erhält man die Zerlegungen $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ und $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. Sie führen zu den beiden Lösungen

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

und

$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

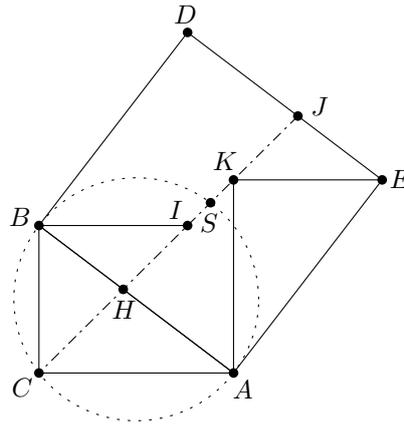
Die Bemerkung von Heiko in der zweiten Pause gibt den Hinweis, dass der dritte Anstieg mindestens eine Entfernung von 80 km von Passau aus hat. Folglich sind 68, 76 und 91 die gesuchten Entfernungen.

Aufgabe 42. Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und den Seitenlängen $\overline{AC} = 4 - \sqrt{3}$ und $\overline{BC} = \sqrt{3}$. Ferner seien D und E die weiteren Eckpunkte des Quadrats $AEDB$, welches den Punkt C nicht im Inneren enthält. Ausserdem sei J derjenige Punkt auf DE , für den $\angle ACJ = 45^\circ$ gilt. Schliesslich sei K ein Punkt auf CJ mit $AK \parallel BC$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle JKE$.

Ergebnis. $3\sqrt{3}/8$

Lösungsweg. Weil das Dreieck $\triangle AKC$ gleichschenkelig ist, gilt $\overline{AK} = \overline{AC}$. Da AE und AB beides Seiten des Quadrats $AEDB$ sind, gilt $\overline{AE} = \overline{AB}$ und weil beide Winkel den Winkel $\angle KAB$ zu 90° ergänzen, gilt $\angle EAK = \angle BAC$. Deswegen sind die Dreiecke $\triangle AEK$ und $\triangle ABC$ kongruent. Ferner liegt der Mittelpunkt S des Quadrats $AEDB$ auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, da beide Winkel $\angle BSA$ und $\angle ACB$ rechte Winkel sind. Wegen $\overline{AS} = \overline{BS}$ sind die zugehörigen Peripheriewinkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich gross. Deshalb muss S auf der Winkelhalbierenden CJ liegen. Spiegelt man nun das Dreieck $\triangle JKE$ am Punkt S , so wird E auf B abgebildet, J auf den Schnittpunkt H von AB und CJ und K auf den Punkt I , der einerseits auf CJ liegt und andererseits wegen der Kongruenz der Dreiecke

$\triangle AKE$ und $\triangle ABC$ und der Parallelität von AK und BC die Bedingung $\angle IBC = 90^\circ$ erfüllt.



Also ist $\triangle IBC$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei B , weshalb sein Flächeninhalt $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$ beträgt. Für die Flächeninhalte ergibt sich

$$A_{\triangle IBC} : A_{\triangle IBH} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{IH} + \overline{HC}}{\overline{IH}} = 1 + \frac{\overline{HC}}{\overline{IH}}.$$

Da die Dreiecke $\triangle AHC$ und $\triangle IBH$ offensichtlich ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Hieraus folgt nun

$$A_{\triangle JKE} = A_{\triangle IBH} = A_{\triangle IBC} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Aufgabe 43. Zwei Gefangene stehen vor zwei Urnen. Sie wissen, dass eine Urne zwei weiße Murmeln und eine schwarze enthält und die andere Urne eine weiße und zwei schwarze. Sie wissen aber nicht, welche Urne die zwei weißen Murmeln enthält. Jeder Gefangene muss eine Urne auswählen und zufällig eine Murmel ohne Zurücklegen ziehen. Wenn er eine weiße zieht, dann kommt er frei, andernfalls wird er hingerichtet. Wenn der zweite Gefangene den Zug des ersten Gefangenen und dessen Ergebnis beobachtet und möglichst klug vorgeht, wie gross ist dann vor dem Ziehen der ersten Murmel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er überlebt?

Hinweis. Es wird angenommen, dass der erste Gefangene eine Urne zufällig auswählt.

Ergebnis. $5/9$

Lösungsweg. Bezeichnet man mit f die Farbe, die der erste Gefangene gezogen hat, und mit a die andere Farbe, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er aus der Urne mit f, f, a gezogen hat, $2/3$ und dafür, dass er aus der anderen gezogen hat, $1/3$. Wenn der zweite Gefangene die gleiche Urne wie der erste wählt, so zieht er die Farbe f mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$

und die Farbe a mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Wählt der zweite Gefangene dagegen die andere Urne, so wird er die Farbe f mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

ziehen und die Farbe a mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Wenn der erste Gefangene eine weiße Murmel gezogen hat, so ist es für den zweiten wegen $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$ besser, die andere Urne zu wählen, weil er dann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ überlebt. Hat der erste Gefangene dagegen eine schwarze Murmel gezogen, so ist es für den zweiten wegen $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$ besser, die gleiche Urne zu wählen, weil er dann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ überlebt. Weil die Wahrscheinlichkeit für den ersten Gefangenen für beide Farben $\frac{1}{2}$ ist, wird der zweite mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$$

überleben.

Aufgabe 44. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter n nicht notwendigerweise verschiedenen reellen Zahlen aus dem Intervall $[1, 2019]$ gibt es stets drei Zahlen, welche Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks sein können.

Ergebnis. 18

Lösungsweg. Für $n < 18$ betrachtet man die ersten n Folgenglieder der Fibonacci-Folge, die durch $a_1 = a_2 = 1$ und die Rekursionsformel $a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$ für $m \geq 1$ definiert ist. Die grösste Zahl eines jeden Tripels, das aus diesen Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$$

gebildet werden kann, ist grösser oder gleich der Summe der beiden anderen Zahlen. Also kann mit diesen Zahlen kein nicht entartetes Dreieck gebildet werden, das diese Zahlen als Seitenlängen besitzt.

Für $n = 18$ seien $x_1 \leq \dots \leq x_{18}$ die ausgewählten Zahlen. Angenommen keine drei von ihnen bilden ein nicht entartetes Dreieck. Dann muss

$$x_1, x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3, \quad \dots$$

gelten, wobei man in jedem Schritt ein Element der erwähnten Fibonacci-Folge erhält. Für x_{18} muss dann $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$ gelten, was aber wegen $x_{18} \notin [1, 2019]$ nicht möglich ist. Also ist die Annahme falsch.

Folglich ist $n = 18$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 45. Sei $\sigma(k)$ die Anzahl aller (positiven) Teiler einer positiven ganzen Zahl k . Ermittle die kleinste positive ganze Zahl n , sodass der grösste gemeinsame Teiler von $\sigma(n)$ und $\sigma(n^3)$ keine Zweierpotenz ist (einschliesslich 1).

Ergebnis. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Lösungsweg. Wir wissen, falls

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\alpha_t}$$

die Primfaktorzerlegung von n ist, dann gilt

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_t + 1).$$

Die Bedingung, dass der grösste gemeinsame Teiler keine Zweierpotenz ist, ist gleichbedeutend damit, dass es eine ungerade Primzahl q gibt, die $\sigma(n)$ und $\sigma(n^3)$ teilt. Wegen

$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (3\alpha_t + 1)$$

kann diese Zahl nicht durch 3 teilbar sein. Deshalb ist 5 der kleinstmögliche Wert für q . Weiters beachten wir, dass q nicht gleichzeitig ein Teiler von $\alpha_i + 1$ und $3\alpha_i + 1$ sein kann, denn ansonsten müsste q nämlich

$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2$$

teilen. Folglich gibt es verschiedene Indices $i, j \in \{1, \dots, t\}$ mit $q \mid \alpha_i + 1$ und $q \mid 3\alpha_j + 1$. Da wir die kleinste Zahl suchen, probieren wir es mit $t = 2, i = 1$ und $j = 2$.

Im Fall $q = 5$ sind $\alpha_1 = 4$ und $\alpha_2 = 3$ die kleinstmöglichen Werte für α_1 und α_2 . Nehmen wir die kleinstmöglichen Primzahlen, also $p_1 = 2$ und $p_2 = 3$, so erhalten wir $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Falls $q \geq 7$ ist, so gilt $\alpha_1 \geq 6$ und $\alpha_2 \geq 2$. Dies führt zu

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432$$

und zeigt, dass 432 tatsächlich der kleinstmögliche Wert für n ist.

Aufgabe 46. Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\angle ACB = 90^\circ$, $\overline{AC} = 15$ und $\overline{BC} = 20$. Sei D jener Punkt auf AB , sodass $CD \perp AB$ gilt. Der Inkreis t des Dreiecks $\triangle ACD$ berührt die Strecke CD im Punkt T . Ein anderer Kreis c berührt die Strecke CD ebenfalls in T und er berührt die Strecke BC . Die beiden Schnittpunkte des Kreises c mit der Strecke AB werden durch X und Y bezeichnet. Wie lange ist XY ?

Ergebnis. $3\sqrt{5}$

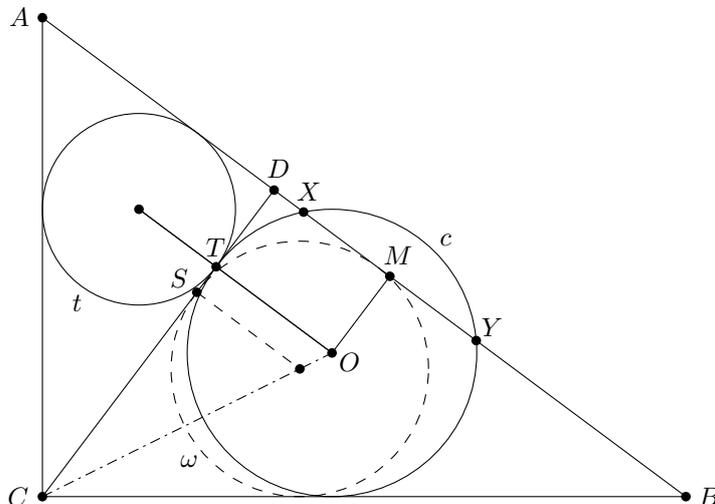
Lösungsweg. Unter Verwendung des Kathetensatzes und des Höhensatzes erhalten wir

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = 9, \quad \overline{BD} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} = 16, \quad \overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} = 12.$$

Der Radius des Kreises t , also \overline{DT} , kann durch die bekannte Formel berechnet werden, die den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ACD$ durch die Hälfte des Umfangs dividiert. Wir erhalten $\overline{DT} = 54/(36/2) = 3$. Sei ω der Inkreis des Dreiecks $\triangle BCD$ und sei S der Berührungspunkt mit der Strecke CD . Wie oben berechnen wir den Radius $\overline{DS} = 4$.

Die zentrische Streckung mit Zentrum C und Verhältnis $\overline{CT}/\overline{CS} = 9/8$ bildet den Kreis ω auf den Kreis c ab. Daher ist der Radius des Kreises c gleich $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke XY und O der Mittelpunkt des Kreises c . Wir wissen $\overline{XO} = 9/2$ und $\overline{OM} = \overline{DT} = 3$. Durch den Satz von Pythagoras schliessen wir

$$\overline{XY} = 2 \cdot \overline{XM} = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Aufgabe 47. Jedes quadratische Feld einer 6×7 Tabelle wird weiss, grün, rot oder blau eingefärbt. Wir nennen eine Färbung *hübsch*, wenn die vier Felder eines jeden 2×2 Quadrats unterschiedliche Farben haben. Wie viele hübsche Färbungen gibt es?

Ergebnis. 1128

Lösungsweg. Bemerke zwei Dinge:

- 1) Alle direkt nebeneinander liegenden Felder müssen unterschiedliche Farben haben. Falls mehr als zwei verschiedene Farben in einer Reihe vorkommen, gibt es in dieser Reihe demnach drei aufeinander folgende Felder, die alle unterschiedlich eingefärbt sind.
- 2) Solche Tripel von drei horizontal aufeinander folgenden Feldern unterschiedlicher Farbe bestimmen vollständig die entsprechenden drei Spalten. Bezeichnet man die vier Farben mit 1, 2, 3 und 4, so ist beispielsweise für das Tripel 1 – 2 – 3 das vertikal benachbarte Tripel mit 3 – 4 – 1 festgelegt. Diese beiden Tripel müssen dann abwechselungsweise die drei Spalten füllen. Diese Spalten enthalten dann also alle nur jeweils zwei Farben.

Dasselbe gilt für Tripel in Spalten mit mehr als zwei Farben. Demnach können in einer Zeile und einer Spalte nicht gleichzeitig mehr als zwei Farben vorkommen.

Man berechne nun die Anzahl Färbungen in einer Tabelle mit 6 Zeilen und 7 Spalten: Mit der Wahl von zwei Farben für die erste Zeile sind die Farbpaare für die restlichen Zeilen ebenfalls bestimmt. Dann wähle die Startfarbe in jeder der sechs Zeilen und die gesamte Tabelle ist bestimmt. Dafür gibt es $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ Möglichkeiten. Analog beträgt die Anzahl der Färbungen der Tabelle $6 \cdot 2^7$, wenn in jeder Spalte nur zwei Farben vorkommen. Davon muss nun noch die Anzahl der Färbungen subtrahiert werden, bei denen in jeder Zeile und Spalte bloss zwei Farben vorkommen. Eine solche Färbung ist bestimmt durch die Färbung des 2×2 Quadrats oben links, wofür es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten gibt. Das ergibt insgesamt $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$ hübsche Färbungen.

Aufgabe 48. Einhundert Kinder stehen in einer Reihe. Das erste Kind hat 4 Gramm Schokolade, das zweite Kind hat 8 Gramm Schokolade usw., schliesslich hat das 100. Kind 400 Gramm Schokolade. Das erste Kind gibt dem zweiten Kind ein Drittel seiner Schokolade, das zweite Kind hat jetzt also $\frac{28}{3}$ Gramm Schokolade. Das zweite Kind gibt dann dem dritten Kind ein Drittel seiner Schokolade und so weiter, bis das 99. Kind dem 100. Kind ein Drittel seiner Schokolade gibt. Wie viel Gramm Schokolade hat das 100. Kind am Ende?

Ergebnis. $597 + 3^{-99}$

Lösungsweg. Alle Gewichte sind in Gramm. Nach dem ersten Schritt hat das zweite Kind $8 + 4/3 = 4(2 + 1/3)$. Im zweiten Schritt gibt es dem dritten Kind ein Drittel seiner Schokolade, das dann $12 + 8/3 + 4/3^2 = 4(3 + 2/3 + 1/3^2)$ hat. Nach dem dritten Schritt hat das vierte Kind $16 + 12/3 + 8/3^2 + 4/3^3 = 4(4 + 3/3 + 2/3^2 + 1/3^3)$. Es ist leicht zu sehen, dass am Ende das 100. Kind

$$4 \left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} \right)$$

hat. Setze

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ &\quad + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 1 + \frac{1}{3} + \\ &\quad + 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} \left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(100 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1 \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(100 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \right). \end{aligned}$$

Schliesslich ist

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2} \left(100 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Aufgabe 49. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für welche

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

ebenfalls eine ganze Zahl ist.

Ergebnis. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Lösungsweg. Die Zahl n soll $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$ erfüllen. Die Addition von $(n-2)^2$ auf der rechten Seite ändert nichts an dieser Bedingung und ermöglicht wegen $n^2 - 4n + 4 - n^2 = -4(n-1)$ die Eliminierung des Terms n^2 . Somit erhält man die äquivalente Bedingung

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Da $n-1$ und $n-2$ teilerfremd sind, kann man die rechte Seite durch $n-1$ dividieren. Substituiert man $t = n-2$, so ergibt sich die Bedingung $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. Unter Benutzung der Binomialentwicklung erhält man

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015,$$

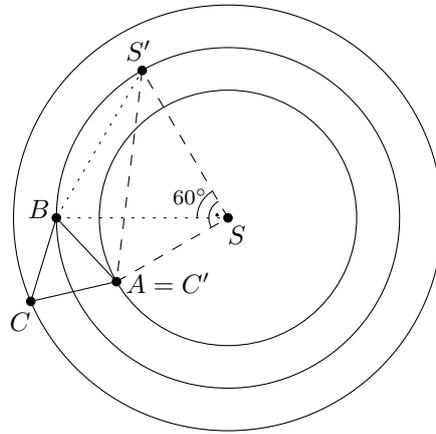
so dass schliesslich nur noch $t^2 \mid 2016$ zu erfüllen ist. Da $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ die Primfaktorzerlegung von 2016 ist, sind die Werte 1, 2, 3, 4, 6, 12 die einzig möglichen für t und diese erfüllen auch die angegebene Bedingung. Die Rücksubstitution $n = t + 2$ führt zum Ergebnis 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Aufgabe 50. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit je einer Ecke auf einem von drei konzentrischen Kreisen mit den Radien 3, 4 und 5. Finde alle möglichen Seitenlängen des Dreiecks.

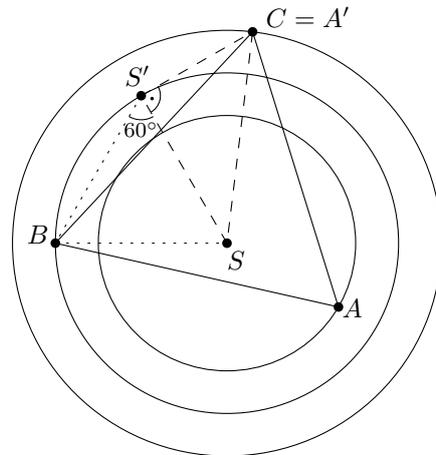
Ergebnis. $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}, \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

Lösungsweg. Sei A die Ecke auf dem Kreis mit Radius 3, B auf dem mit Radius 4 und C auf dem mit Radius 5. Sei S der Mittelpunkt der Kreise. Es sind zwei Fälle zu berücksichtigen.

Im ersten Fall liegt S ausserhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Rotiert man C und S um 60° um B , erhält man die Punkte $C' = A$ und S' . Dann ist das Dreieck $\triangle BSS'$ gleichseitig mit Seitenlänge 4 und $\overline{S'C'} = \overline{SC} = 5$. Weil das Dreieck $\triangle SS'C'$ nun die Seitenlängen 3, 4 und 5 hat, ist es rechtwinklig mit $\angle S'SC' = 90^\circ$. Also ist $\angle BSA = \angle S'SC' - \angle S'SB = 30^\circ$. Mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle BAS$ erhält man $\overline{AB} = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.



Andernfalls liegt S innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Man rotiert A und S um 60° um B und erhält die Punkte $A' = C$ und S' . Ähnlich wie im ersten Fall erhält man das rechtwinklige Dreieck $\triangle S'SA'$ mit $\angle SS'A' = 90^\circ$. Weiter ist $\angle BSA = \angle BS'A' = \angle BS'S + \angle SS'A' = 150^\circ$. Mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle BAS$ erhält man die zweite Lösung $\overline{AB} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



Angenommen, S liegt auf einer Seite des Dreiecks $\triangle ABC$, beispielsweise auf AB . Man rotiert A und S um 60° um B und erhält die Punkte $A' = C$ und S' . Anders als in den ersten beiden Fällen erhält man $S' \in BA'$ und $\angle SS'A' = 120^\circ$. Mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle S'SA'$ erhält man $\overline{SA'} = \sqrt{37}$. Da diese Länge nicht mit dem geforderten Radius übereinstimmt, kann es kein solches Dreieck geben. Die Annahmen, dass S auf den anderen Dreiecksseiten liegt, führen analog zu einem Widerspruch.

Aufgabe 51. Sieben Personen sitzen in gleichem Abstand rund um einen runden Tisch. Auf dem Tisch werden genau sieben Pfeile gezeichnet, sodass auf jedem Platz genau ein Pfeil beginnt und einer endet, wobei Start und Ende eines Pfeils nicht unbedingt verschieden sein müssen. Jede Minute wechseln die Personen Plätze und setzen sich auf jenen Platz, auf den der Pfeil zeigt, der von ihrem jetzigen Platz weg geht. Danach wird der Tisch um einen Platz im Uhrzeigersinn gedreht. Wie lange dauert es maximal in Minuten, bis alle Personen gleichzeitig zum ersten Mal wieder auf ihren ursprünglichen Plätzen sitzen?

Ergebnis. 84

Lösungsweg. Nach jeweils 7 Runden steht der Tisch wieder so wie zu Beginn, aber die Personen sitzen in einer neuen Reihenfolge. Wenn wir also nur Situationen nach jeweils 7 Minuten betrachten, haben die Personen wie in einer Permutation ihre Plätze getauscht. Für eine Permutation betrachten wir die minimale Anzahl an Wiederholungen

dieser Permutation, sodass danach alle Spieler wieder am ursprünglichen Platz sind, das heisst die *Ordnung* dieser Permutation. Im Fall von Permutationen mit sieben Elementen kann diese Ordnung maximal 12 sein. Ein Beispiel für eine solche Permutation ist etwa

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1; \quad 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4.$$

Im Allgemeinen ist die Ordnung einer Permutation das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen von Zyklen in der Zykelschreibweise wie im Beispiel. Man kann leicht sehen, dass 12 hier wirklich die maximale Ordnung ist. Das heisst, wir haben eine obere Schranke von $7 \cdot 12 = 84$ Minuten, um alle Personen gleichzeitig zum ersten Mal wieder auf ihren ursprünglichen Platz zu bringen.

Wenn die Pfeile so auf den Tisch gezeichnet sind, dass zu Beginn die Personen 1 und 4 den Platz tauschen, dann sitzen die Personen nach 7 Minuten gemäss der folgenden Permutation:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1; \quad 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$$

Wenn wir also nur jede siebte Minute betrachten, dann dauert die Prozedur tatsächlich 84 Minuten. Wir müssen nun noch zeigen, dass die Personen nicht schon früher auf ihren ursprünglichen Platz gelangen können. Jede siebte Minute sind die Plätze 1, 2, und 3 von den ursprünglichen Personen belegt, möglicherweise in veränderter Reihenfolge, aber in den folgenden sechs Minuten befindet sich immer zumindest eine dieser Personen auf einem von diesen drei Plätzen verschiedenen Platz.

Aufgabe 52. Sei a_1, a_2, a_3, \dots eine Folge von positiven reellen Zahlen. Beginnend mit a_2 ist jede Zahl die Hälfte der Summe von arithmetischem und geometrischem Mittel der beiden Nachbarzahlen. Berechne a_{333} , wenn $a_1 = \frac{2}{7}$ und $a_{11} = \frac{7}{2}$ bekannt sind.

Hinweis. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen x und y ist durch \sqrt{xy} definiert.

Ergebnis. 2016

Lösungsweg. Die Bedingungen ergeben

$$a_k = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}})^2$$

für alle $k \geq 2$. Da die Terme der Folge positiv sind, können wir dies umformen in

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Daher ist die Folge b_1, b_2, \dots mit $b_k = \sqrt{a_k}$ arithmetisch (induktive Begründung). Sei d die Differenz zweier Folgenglieder. Wir wissen $b_1 = \sqrt{2/7}$ und $b_{11} = \sqrt{7/2}$, also ist

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Es folgt

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4 + 332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}$$

und daher ist $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Aufgabe 53. Adam hat ein Rechteck mit Umfang 444 und positiven, ganzzahligen Seitenlängen a und b mit $a > b$. Er versucht, es mit Quadraten der Seitenlänge $a - b$ auszufüllen. Das erste Quadrat legt er in die linke obere Ecke. Weitere Quadrate legt er, indem er dem Muster eines quadratischen Gitters mit Achsen parallel zu den Seiten des Rechtecks und Ursprung in der linken oberen Ecke des Rechtecks folgt. Nachdem er zumindest ein Quadrat gelegt hat, muss er irgendwann aufhören, da es nicht möglich ist, ein zusätzliches Quadrat zu legen, das komplett innerhalb des Rechtecks liegt. Der Flächeninhalt des unbelegten Teils des Rechtecks beträgt 1296. Finde die Summe aller möglichen Seitenlängen des Quadrates, das zum Füllen des Rechtecks verwendet wurde.

Ergebnis. 166

Lösungsweg. Es gilt $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$ mit $0 \leq r \leq a-b-1$. Daher ist der Flächeninhalt des unbelegten Teils $ra + rb - r^2 = 222r - r^2 = 1296$, was äquivalent zu $(r-6)(r-216) = 0$ ist. Da offensichtlich $a > r$ und $b > r$ gilt, erhalten wir $r = 6$.

Wenn wir den unbelegten Teil entfernen und $x = a - r$, $y = b - r$ setzen, erhalten wir wegen $x - y = a - b$ ein $(x \times y)$ -Rechteck, das von $(x - y) \times (x - y)$ Quadraten ausgefüllt ist. Weiter gilt $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Da $x - y$ ein Teiler von x und y ist, teilt es auch $x + y$. Sei d ein Teiler von 210 und setzen wir $x - y = d$. Dann verwenden wir $x + y = 210$, um nach x und y aufzulösen:

$$x = \frac{210 + d}{2}, \quad y = \frac{210 - d}{2}$$

Da die Lösungen wegen der Existenz mindestens eines Quadrates der Länge $a - b = x - y$ positive ganze Zahlen sein müssen und da auf Grund der Maximalität der Belegung mit Quadraten $x - y > 6$ gilt, sehen wir, dass d genau dann eine Lösung liefert, wenn es ein gerader Teiler von 210 ist und $6 < d < 210$ gilt. Daher muss d eine der Zahlen 10, 14, 30, 42, 70 sein und deren Summe ist 166.

Aufgabe 54. Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Wir bezeichnen mit A', B', C' die Schnittpunkte von AP, BP, CP mit BC, CA, AB in dieser Reihenfolge. Angenommen es gilt

$$\overline{A'P} = \overline{B'P} = \overline{C'P} = 3$$

und

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = 25.$$

Bestimme $\overline{AP} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CP}$.

Ergebnis. 279

Lösungsweg. Setzt man

$$a = \overline{AP}, \quad b = \overline{BP}, \quad c = \overline{CP},$$

dann ergeben sich folgende Verhältnisse von Flächeninhalten:

$$A_{\triangle PBC} : A_{\triangle ABC} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}} = \frac{3}{a+3}$$

und analog

$$A_{\triangle PCA} : A_{\triangle ABC} = \frac{3}{b+3}, \quad A_{\triangle PAB} : A_{\triangle ABC} = \frac{3}{c+3}.$$

Ausserdem gilt $A_{\triangle PBC} + A_{\triangle PCA} + A_{\triangle PAB} = A_{\triangle ABC}$ und somit

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1.$$

Nach dem Multiplizieren mit dem Hauptnenner und Zusammenfassen ergibt sich

$$54 + 9(a + b + c) = abc$$

und durch Einsetzen von $a + b + c = 25$ erhält man die Lösung 279.

Aufgabe 55. Vierzehn Punkte A_1, \dots, A_{14} wurden in dieser Reihenfolge auf einem Kreis k gegen den Uhrzeigersinn ausgewählt, so dass keine drei verschiedenen Sehnen mit Endpunkten unter den ausgewählten Punkten sich im Innern von k schneiden. Christina zeichnete all diese Segmente. Da die Zeichnung zu unübersichtlich wurde, entschied sie dann aber, alle Seiten und Diagonalen der Siebenecke $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ und $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$ zu entfernen. In wieviele Bereiche teilen die restlichen Sehnen das Kreisinere?

Ergebnis. 295

Lösungsweg. Betrachte, wie die Sehnen nach und nach hinzugefügt werden: Wird eine Sehne hinzugefügt, erhöht sich die Anzahl Regionen um $1 + \text{Anzahl}$ durch die neue Sehne geschnittener bereits hinzugefügter Sehnen. Die gesuchte Anzahl Regionen entspricht demnach

$$1 + \text{Anzahl Sehnen} + \text{Anzahl Schnittpunkte der Sehnen}.$$

Bezeichne die Punkte A_1, A_3, \dots, A_{13} als *ungerade*, die übrigen als *gerade*. Die gezeichneten Sehnen sind genau diejenigen, die einen ungeraden mit einem geraden Punkt verbinden, es gibt also $7 \cdot 7 = 49$ Sehnen. Um die Anzahl Schnittpunkte zu bestimmen, bemerke, dass die Endpunkte der sich schneidenden Sehnen so auf dem Kreis liegen müssen, dass sich die ungeraden und die geraden jeweils nebeneinander befinden. Ein solches Quadrupel an Punkten produziert genau einen eindeutigen Schnittpunkt, demnach gilt es die Anzahl solcher Quadrupel zu bestimmen. Die Punkte sind im Gegenuhrzeigersinn angeordnet und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A_1 der erste ungerade Punkt eines Quadrupels. Teilt man dann die Punkte in sieben Paare $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \dots, (A_{14}, A_1)$, müssen die restlichen drei Punkte des Quadrupels alle in unterschiedlichen Paaren sein und gar jede Wahl von drei Punkten aus unterschiedlichen Paaren ergibt ein gewünschtes Quadrupel, wenn man jeweils den ungeraden Punkt vom ersten Paar und die geraden von den zwei anderen Paaren wählt. Da es sieben Möglichkeiten gibt, den ersten ungeraden Punkt auszuwählen, gibt es total

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

Schnittpunkte. Der Kreis wird also in $1 + 49 + 245 = 295$ Regionen geteilt.

Aufgabe 56. Finde die Anzahl der Quadrupel (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen mit den Eigenschaften

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{und} \quad ab = cd.$$

Ergebnis. 800

Lösungsweg. Zuerst multipliziert man die erste Gleichung mit a und verwendet die zweite Gleichung um $(a+c)(a+d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a$ zu bekommen. Wir merken an, dass sowohl 5 als auch 101 eine Primzahl ist. Da die Klammerausdrücke jeweils grösser als a sind, muss einer der beiden $5k$ und der andere 101ℓ sein, wobei $k\ell = a$. Wir nehmen zuerst an, dass $a + c = 5k$ und $a + d = 101\ell$ für fixierte k, ℓ mit $k\ell = a$. Dann gilt $c = k(5 - \ell)$, $d = \ell(101 - k)$ und $b = 505 - a - d - c = (101 - k)(5 - \ell)$. Es ist dann leicht zu überprüfen, dass

$$(a, b, c, d) = (k\ell, (101 - k)(5 - \ell), k(5 - \ell), \ell(101 - k))$$

die Bedingung $ab = cd$ erfüllt und daher eine gültige Lösung des Problems für jedes $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$ liefert. Wir zeigen noch, dass all diese 400 Lösungen verschieden sind. Nehmen wir an, dass zwei Paare (k_1, ℓ_1) und (k_2, ℓ_2) die gleiche Lösung liefern. Dann gilt $k_1\ell_1 = k_2\ell_2$ und $(5 - \ell_1)k_1 = (5 - \ell_2)k_2$, wodurch $k_1 = k_2$ und $\ell_1 = \ell_2$ gelten muss. Ähnlich verfahren wir mit dem Fall $a + c = 101\ell$ und $a + d = 5k$. Auch hier erhalten wir 400 verschiedene Lösungen

$$(a, b, c, d) = (k\ell, (101 - k)(5 - \ell), \ell(101 - k), k(5 - \ell))$$

für $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$. Keine der Lösungen aus diesem Fall ist gleich einer Lösung aus dem anderen Fall, da $5k = a + c = 101\ell$ für kein k und ℓ aus unserem Wertebereich gilt. Daher gibt es insgesamt $400 + 400 = 800$ Lösungen.