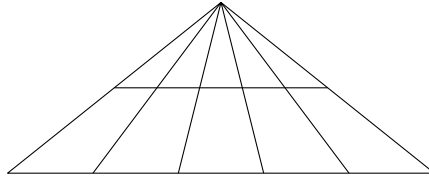


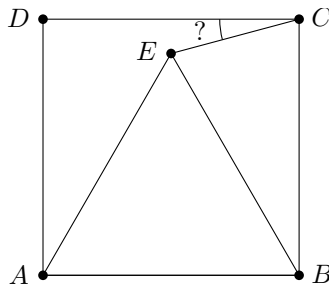
Noorema rühma komplektis on ülesanded alates esimesest, vanema rühma komplektis alates 11.-st.

Ülesanne 1. Kolm aastat tagasi oli Jesse ema Jessest kolm korda vanem. Praegu on Jesse isa Jessest kolm korda vanem. Mis on Jesse vanemate vanusevahe aastates?

Ülesanne 2. Mitu kolmnurka on pildil?



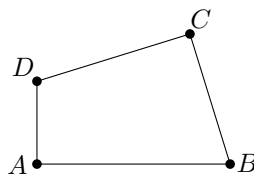
Ülesanne 3. Punkt E ruudu $ABCD$ sees on selline, et ABE on võrdkülgne kolmnurk. Mis on nurga DCE suurus kraadides?



Ülesanne 4. Walteril on suur aardekirst, milles on palju münte: üks münt märgisega 1, kaks münti märgisega 2, ..., kaheksateist münti märgisega 18 ning üheksateist münti märgisega 19. Walter võtab aardekirstust ühekaupa münte välja ning ei vaata, mis märgised müntidel kirjas on. Mis on minimaalne arv münte, mis Walter peab aardekirstust välja võtma, kui ta tahab kindel olla, et tal oleks kümme sama märgisega münti?

Ülesanne 5. Gus ostis suure karbi komme, mida mardisantidele laiali jagada. Enne seda, kui esimene mardisant kohale jõudis ja komme võttis, sõi Gus pooled kommid ise ära. Samuti sõi ta ära pooled allesjäänud kommidest enne teise mardisandi kohale jõudmist, ning pooled omakorda allesjäänud kommidest enne kolmanda mardisandi kohale jõudmist, kes võttis kõik allesjäänud kommid endale. Kui iga mardisant võttis täpselt kolm kommi, siis mitu kommi oli Gusi kommikarbis algselt?

Ülesanne 6. Olgu $ABCD$ nelinurk täisnurkadega tippude A ja C juures. Kui on teada, et $BC = 6$, $CD = 8$ ning $DA = 2$, siis leia nelinurga $ABCD$ pindala.

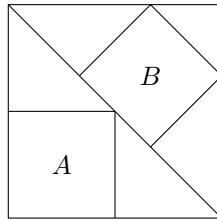


Ülesanne 7. Kontoris asuv printer suudab printida teksti nii ühepoolsest kui kahepoolsest. Ühepoolne printimine võtab aega kolm sekundit lehekülje kohta, aga kahepoolne printimine üheksa sekundit lehe kohta. Hank tahab kahepoolsest välja printida kaheksateist lehekülge keemilisi retsepte. Tal on võimalik kas printida kõik lehed kahepoolsest, või printida kõik paaritu arvulised leheküljed, panna käsitsi paberid printerisse tagasi, ning seejärel printida kõik paarisarvulised leheküljed. Hank avastab, et mõlemad variandid võtavad täpselt sama kaua aega. Mitu sekundit kuluks Hankil, et paberid käsitsi tagasi printerisse panna?

Ülesanne 8. Leia kõik 9-kohalised arvud A , mis rahuldavad alljärgnevat tingimusi:

- Selles arvus esineb iga number $1, \dots, 9$ täpselt ühe korra.
- Iga kahekohaline arv, mis on saadud arvu A kahe kõrvuti oleva numbri järjest kirjutamisel (nende järjekorda muutmata) jagub kas arvuga 7 või arvuga 13.

Ülesanne 9. Kaks ruutu on suurema ruudu sees nagu pildil. Leia ruudu A pindala, kui ruudu B pindala on 48.



Ülesanne 10. Skyleril on kaks kuupi, üks küljepikkusega 9 cm, mis koosneb valgedest ühikkuupidest (ehk kuupidest küljepikkusega 1 cm), ning teine küljepikkusega 10 cm, mis koosneb mustadest ühikkuupidest. Skyler tahab nende ühikkuupidega ehitada kuubi küljepikkusega 12 cm. Vähemalt mitu cm^2 uue kuubi pindalast peab olema musta värvi?

Ülesanne 11. Peale matemaatika kontrolltöö hindamist avastas õpetaja, et täpselt kümme tema õpilastest ei oska murde korrutada, neliteist neist ei oska murde liita ning seitseteist neist ei oska murde lihtsustada. Veel enam, iga õpilane ei saanud vähemalt ühe eelnimetatud operatsiooniga hakkama ning täpselt kuus õpilast ei saanud hakkama mitte ühegi eelnimetatud operatsiooniga. Mis on maksimaalne õpilaste arv, mis klassis saab olla?

Ülesanne 12. Üks täisnurkse kolmnurga nurkadest on suurusega 23° . Leia nurk (kraadides) täisnurgast tõmmatud mediaani ning kõrguse vahel.

Ülesanne 13. Positiivsed täisarvud a ja b rahuldavad võrdust $20a + 19b = 365$. Leia avaldise $20b + 19a$ väärtus.

Ülesanne 14. Korrapärasel 2018 tipuga hulknurgal on 2,033,135 diagonaali. Mitu diagonaali rohkem on korrapärasel 2019 tipuga hulknurgal? Kummalgi juhul ei loe me hulknurga külgi tema diagonaalideks.

Ülesanne 15. Leia võrrandi $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$ kõik reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 16. Mitu arvude 1, 2, 3, 4 permutatsiooni on sellised, et kui me sellest suvalise arvu ära kustutame, siis allesjäänud jada ei ole ei kasvav ega kahanev?

Märkus: *Permutatsioon* on selline jada, kus iga arv esineb täpselt ühe korra.

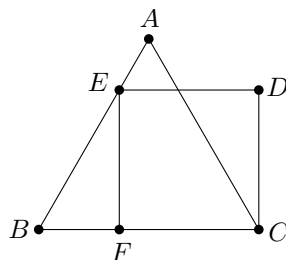
Ülesanne 17. Olgu $ABCD$ ristkülik küljepikkustega $AB = 8$ cm ja $BC = 6$ cm. Olgu X ja Y lõigu AC keskristsirge lõikepunktid vastavalt külgedega AB ning CD . Mis on lõigu XY pikkus sentimeetrites?

Ülesanne 18. Avaldises $FOUR + FIVE = NINE$ tähistab iga täht alati ühte ja sama numbrit ning erinevad tähed tähistavad erinevaid numbreid. Lisaks on teada, et

- $FOUR$ jagub neljaga,
- $FIVE$ jagub viiega,
- $NINE$ jagub kolmega.

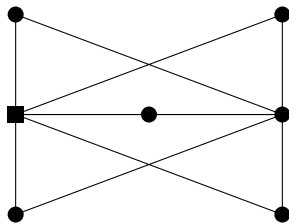
Leia kõik arvu $NINE$ võimalikud väärtused.

Ülesanne 19. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk ning $CDEF$ selline ruut, et E asub lõigul AB ning F asub lõigul BC . Kui ruudu übermõõt on 4, siis mis on kolmnurga ABC übermõõt?



Ülesanne 20. Olgu a ja b reaalarvud. Kui võrrandil $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ leidub kolmekordne reaalarvuline juur, siis mis on kõik arvu a võimalikud väärtused?

Ülesanne 21. Saul on puhkusel saarestikus, kus saared on omavahel ühendatud sildadega, millel asuvad tollipunktid. Igalt sillalt avaneb unikaalne vaade, mistõttu tahab Saul kõik sillad läbi käia. Kuna ta tahab raha kokku hoida, kavatseb ta iga silda külastada vaid korra. Mitmel eri viisil saab ta oma reisi planeerida, kui ta alustab reisi ruudukujuliselt saarelt? Saul saab ühelt sillalt teisele minna vaid saarte kaudu ning võib külastada iga saart kuitahes palju kordi.



Ülesanne 22. Mitu järjestatud positiivsete täisarvude paari (m, n) on sellised, et nende vähim ühiskordne on 2000?

Ülesanne 23. Olgu $ABCDEFGH$ korrapärane kaheksanurk, kus $AC = 7\sqrt{2}$. Leia selle kaheksanurga pindala.

Ülesanne 24. Neli sõpra otsustasid hakata õppima keeli. Kohalik keeltekoool pakub kursusi Araabia, Bengali, Colombia ning Djibouti keeles, ning iga sõber tahab nendest keeltest õppida täpselt kolme. Mitmel eri viisil saavad sõbrad kursuseid valida nii, et nad kõik õpivad vähemalt ühte keelt neljakesi koos?

Ülesanne 25. Kui Huellile oli öeldud positiivne täisarv n , milles ükski number polnud null, korrutas Huell arvu n arvuga, milles olid samad numbrid, kuid vastupidises järjekorras. Ta märkas, et saadud tulemus oli täpselt tuhande võrra suurem kui arvu n numbrite korrutis. Leia kõik arvu n võimalikud väärtused.

Ülesanne 26. Olgu $ABCD$ rööpkülik ning T punkt lõigul AD nii, et sirge CT on nurga $\angle BCD$ poolitaja. Olgu E punkt sirgel AB nii, et $\angle AET = 40^\circ$. Kui $\angle CTE = 75^\circ$, siis mis on $\angle CDA$ (kraadides)?

Ülesanne 27. Kaks uhket kuninglikku perekonda kohtuvad banketil, kusjuures mõlemast perekonnast on kohal vähemalt üks mees ning üks naine. Iga liige kummastki perekonnast tervitas iga liiget teisest perekonnast. Kui kaks meest tervitasid, siis nad kätlesid, kuid kui kaks naist või mees või naine tervitasid, siis nad kummardasid. Kui tervitused olid lõppenud, oli kokku toimunud 85 kätlemist ning 162 kummardust. Mitu naist osales banketil? Kui kaks inimest omavahel tervituseks kummardavad, siis me loeme seda üheks kummarduseks.

Ülesanne 28. Vaatleme kolmnurka küljepikkustega 10, 24 ning 26. Olgu c ringjoon, mille keskpunkt asub kolmnurga pikimal küljel ning mis puutub kolmnurga kahte lühemat külge. Leia ringjoone c raadius.

Ülesanne 29. Tucu tuli kasiinosse kümne euroga. Kasiinos asuv mänguautomaat töötab järgnevalt: mängija sisestab masinasse münte ühe euro väärtuses ning võidab tõenäosusega p jackpoti, muul juhul tagastab masin pool eurot. Aita Tucol leida vähim p väärtus, mille korral on tal jackpoti võitmise tõenäosus vähemalt 50%, juhul kui ta mängib järjest kuni tal raha otsa saab või ta jackpoti võidab.

Ülesanne 30. Leia kõik neljakohalised positiivsed täisarvud \overline{abcd} , mis võrduvad suurusega $a^a + b^b + c^c + d^d$. Ükski number ei tohi olla null.

Ülesanne 31. Mitu sellist kahekohaliste arvude viisikut leidub, kus igat numbrit nullist üheksani esineb täpselt ühe korra ning iga kahekohaline arv on paaris, kuid ei jagu kolmega? Viisikud, mis erinevad teineteisest vaid arvude järjestuse poolest, loeme me samaks.

Ülesanne 32. Leia kõik positiivsed täisarvud n , mille korral

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

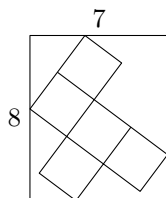
Märkus: $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa ehk suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x väärtust.

Ülesanne 33. Mitme positiivse täisarvu n korral saab leida (mitte tingimata erinevad) positiivsed täisarvud $x, y \leq 1\,000\,000$, mille korral

$$n = S(x) = S(y) = S(x + y),$$

kus $S(a)$ tähistab arvu a numbrite summat?

Ülesanne 34. Viiest ruudust koosnev pentomino küljepikkusega a asub ristkülikus mõõtmetega 7×8 nagu pildil:



Leia a .

Ülesanne 35. Mike sai hea töö eest preemiaks ristkülikukujulise 5×3 šokolaaditahvli. Et seda magusamaks teha, valab ta vasakpoolse ülemise ruudu siirupiga üle. Seejärel sööb ta šokolaadi järgnevalt: Igal sammul valib Mike suvaliselt kas parempoolseima tulba või kõige alumise veeru, kummagi tõenäosusega $1/2$, ning sööb selle ära. Mis on tõenäosus, et viimasel sammul sööb Mike ära vaid magusama ruudu?

Ülesanne 36. Kasutades iga numbrit $1, \dots, 9$ täpselt kaks korda, moodustas Jane mitmeid paarikaupa erinevaid algarve nii, et nende summa oleks minimaalne võimalik. Mis on selle summa väärtus?

Ülesanne 37. Tomil ja Jerryl on kaks polünoomi $T(x) = x^2 + 2x + 10$ ja $J(x) = x^2 - 8x + 25$. Kui kumbki neist asendas oma polünoomi vastavalt oma lemmiku positiivse täisarvu t, j , siis said nad sama tulemuse, ehk $T(t) = J(j)$. Leia kõik suuruse $|t - j|$ võimalikud väärtused.

Ülesanne 38. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus on sama pikk kui tipust B tõmmatud mediaan. Lisaks on teada, et nurk ABC on 75° . Leia suhe $AB : BC$.

Ülesanne 39. Trips-traps-trullis asetavad kaks mängijat kordamööda riste ning ringe 3×3 lauale. Mängija võidab, kui kolm tema sümbolit asuvad samas reas, veerus, või diagonaalil. Mäng jääb viiki, kui tabel on täielikult täidetud ning kumbki mängija ei ole võitnud. Mitmel erineval viisil on võimalik tabelit täita, kui mäng jääb viiki? Kui kaks tabelit erinevad teineteisest vaid peegeldamise või pööramise poolest, loeme me need erinevaks. Mängu võib alustada emb-kumb mängija.

Ülesanne 40. Leia suurim positiivne täisarv a , mille korral mitte ükski positiivne täisarv b ei rahulda tingimust

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}.$$

Ülesanne 41. Jalgrattamatkal pikkusega 110 km Tallinnast Võsule peavad Päevakoer ja Lancelot ületama kolm mäe. Esimese peatuse ajal ütleb Päevakoer, kes on suurepärase peastarvutaja: "Kui korrutada kõik kolm kaugust Tallinnast iga mäe tippu, saame me arvu 2261 kordse." Peale selle peale mõnda aega mõtlemist, vastab Lancelot: "Arvu 2261 kordse saame me ka siis, kui me mõõdame kõik kolm kaugust Tallinna asemel Võsult." Peale 80 km läbimist teevad nad teise peatuse, kus Päevakoer täheldab: "Nüüd on jäänud ainult üks mäetipp enne Võsule kohale jõudmist." Eeldades, et kõik vahemaad on kilomeetrites ning täisarvulised, leia kõigi kolme mäetipu kaugus Tallinnast.

Ülesanne 42. Olgu ABC täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipu C juures nii, et $AC = 4 - \sqrt{3}$ ning $BC = \sqrt{3}$. Olgu D ja E sellised punktid, et $ABDE$ on ruut, mille sisemuses ei asu punkt C , ning olgu J punkt sirgel DE nii, et $\angle ACJ = 45^\circ$. Olgu K selline punkt sirgel CJ , et $AK \parallel BC$. Mis on kolmnurga JKE pindala?

Ülesanne 43. Kaks vangi seisavad kahe kasti ees. Nad teavad, et ühes kastis on kaks valget kuuli ning üks must kuul ning teises kastis on üks valge kuul ning kaks musta kuuli, kuid nad ei tea, kumb kast on kumb. Iga vang valib kasti ning tõmbab sealt suvaliselt ühe kuuli (kuuli kasti tagasi panemata). Iga vang, kes tõmbab valge kuuli, saab vabaks, vastasel juhul ta hukatakse. Kui teine vang saab esimese vangi valikut pealt näha ning teostab oma käigu seejärel võimalikult loogiliselt, siis mis on tema ellujäämise tõenäosus enne esimese kuuli tõmbamist?

Ülesanne 44. Mis on vähim positiivne täisarv n , mille korral leidub iga n (mitte tingimata erineva) reaalarvu vahemikus $[1, 2019]$ hulgas kolm, mis sobivad kolmnurga (mille tipud ei asu ühel sirgel) külgedeks?

Ülesanne 45. Tähistagu $\sigma(k)$ positiivse täisarvu k kõikide positiivsete jagajate arvu. Leia vähim positiivne täisarv n , mille korral arvude $\sigma(n)$ ja $\sigma(n^3)$ suurim ühistegur ei ole arvu 2 aste (ka mitte 1).

Ülesanne 46. Olgu ABC täisnurkne kolmnurk, kus $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 15$, $BC = 20$. Olgu D punkt sirgel AB nii, et $CD \perp AB$. Ringjoon t , mis on kolmnurga ACD siseringjoon, puutub sirget CD punktis T . Teine ringjoon c puutub samuti sirget CD punktis T ning puutub ka külge BC . Olgu X ja Y ringjoone c lõikepunktid küljega AB . Mis on XY pikkus?

Ülesanne 47. Iga ruut 6×7 malelual värvitakse kas valgeks, roheliseks, punaseks või siniseks. Me ütleme, et värvimine on *atraktiivne*, kui iga 2×2 ruudu neli ruutu on eri värvi. Mitu atraktiivset värvimist leidub?

Ülesanne 48. Sada last seisavad reas. Esimesel lapsel on 4 grammi šokolaadi, teisel 8 grammi šokolaadi ja nii edasi, kuni sajandal lapsel on 400 grammi šokolaadi. Esimene laps annab kolmandiku oma šokolaadist teisele lapsele (nii et teisel lapsel on nüüd $\frac{28}{3}$ grammi šokolaadi). Teine laps annab nüüd kolmandiku oma šokolaadist kolmandale lapsele ja nii edasi, kuni üheksakümne üheksas laps annab kolmandiku oma šokolaadist sajandale lapsele. Mitu grammi šokolaadi on sajandal lapsel selle protsessi lõpuks?

Ülesanne 49. Leia kõik täisarvud $n \geq 3$, mille korral

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

on täisarv.

Ülesanne 50. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, mille iga tipp asub vastavalt ühel ringjoontest raadiustega 3, 4 ja 5, kusjuures neil ringjoontel on kõigil ühine keskpunkt. Leia kõik kolmnurga võimalikud küljepikkused.

Ülesanne 51. Seitse inimest istuvad korrapärase seitsenurga kujuliselt ringikujulise laua taga, millele on joonistatud seitse noolt nii, et iga istme juurest algab täpselt üks nool ning iga istme suunas osutab täpselt üks nool (noole algus- ja lõppiste ei pea tingimata erinevad olema). Iga minut vahetavad inimesed laua taga kohti, liikudes oma kohalt sellele kohale, kuhu näitab nende kohalt alguse saav nool, ning seejärel pööratakse lauda ühe istme võrra päripäeva. Mis on maksimaalne mitutite arv, mis võib kuluda, kuni kõik inimesed on esimest korda taas korraga oma algsetel istmetel?

Ülesanne 52. Olgu a_1, a_2, a_3, \dots positiivsete reaalarvude jada. Alustades jada teisest liikmest a_2 , on iga arv pool tema naabrite aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise summast. Leia a_{333} , kui on teada, et $a_1 = \frac{2}{7}$ ning $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Märkus: Positiivsete reaalarvude x ja y geomeetriline keskmine on defineeritud kui \sqrt{xy} .

Ülesanne 53. Gale'il on riskülik übermööduga 444 ja positiivsete täisarvuliste küljepikkustega a, b , kus $a > b$. Ta proovis katta selle ruutudega küljepikkusega $a - b$, asetades esimese ruudu ülemisse vasakusse nurka ja järgides siis ruudustiku mustrit, kus teljed on paralleelsed risküliku servadega ja alguspunkt asub vasakus ülemises nurgas. Mingil hetkel (peale vähemalt ühe ruudu asetamist) pidi Gale peatuma, sest ei saanud lisada ühtegi uut ruutu, mis asuks täielikult riskülikus. Risküliku katmata ala pindala on 1296. Vaatame kõikvõimalikke riskülikuid, mille jaoks on selline olukord võimalik, ning igatüüpe jaoks paneme kirja selle ruudu küljepikkuse, mille abil riskülikut täidetakse. Leia kõigi kirjapandud arvude summa.

Ülesanne 54. Olgu P punkt kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Olgu A', B', C' vastavalt sirgete AP, BP, CP lõikepunktid sirgetega BC, CA, AB . Eeldame, et

$$A'P = B'P = C'P = 3$$

ning

$$AP + BP + CP = 25.$$

Leia $AP \cdot BP \cdot CP$.

Ülesanne 55. Ringjoonel c valiti neliteist punkti A_1, \dots, A_{14} vastupäeva suunas nii, et ükski kolm paarikaupa erinevat lõiku, mille otspunktid on valitud punktide hulgas, ei lõiku c sisepiirkonnas. Lydia tõmbas kõik need lõigud, kuid nähes, et joonis muutus liiga kirjuks, otsustas ta kustutada kõik seitsenurkade $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ ja $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$ diagonaalid ja küljed. Mitmeks piirkonnaks jagavad allesjäänud lõigud c sisepiirkonna?

Ülesanne 56. Leia järjestatud positiivsete täisarvude nelikute (a, b, c, d) arv, mis rahuldavad tingimusi

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{ja} \quad ab = cd.$$