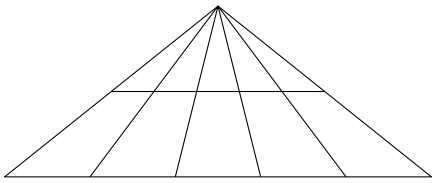
Zadanie 1. Trzy lata temu mama Pawła była od niego trzy razy starsza. Obecnie tata Pawła jest od niego trzy razy starszy. Jaka jest różnica wieku (w latach) pomiędzy rodzicami Pawła?

Wynik. 6

Rozwiązanie. Niech x oznacza dzisiejszy wiek Pawła. Wiek jego mamy to $3(x-3)+3$, czyli $3x-6$. Zgodnie z drugim zdaniem, tata Pawła ma obecnie $3x$ lat. Różnica wieku pomiędzy rodzicami wynosi zatem 6 lat.

Zadanie 2. Ile trójkątów znajduje się na rysunku?

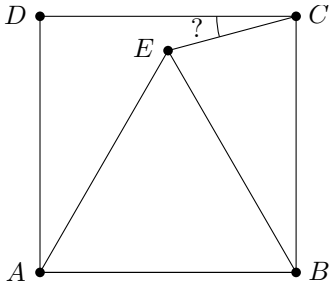


Wynik. 30

Rozwiązanie. Wszystkie trójkąty na rysunku mają jeden z wierzchołków w najwyższym punkcie. Ponadto jeden z boków każdego z trójkątów leży na jednym z dwóch równoległych poziomych odcinków. Oznacza to, że każdy trójkąt jest zdeterminowany poprzez wybór jednego z dwóch poziomych odcinków i dwóch różnych wierzchołków na tym odcinku. Ponieważ na każdym odcinku jest sześć punktów, liczba trójkątów jest równa

$$2 \cdot (5+4+3+2+1) = 30.$$

Zadanie 3. Punkt E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$ tak, że trójkąt ABE jest równoboczny. Ile wynosi miara kąta DCE w stopniach?



Wynik. 15

Rozwiązanie. Ponieważ w trójkącie równobocznym wszystkie kąty wewnętrzne są równe $60°$, to $\angle CBE = 90° - \angle EBA = 30°$. Z równości $EB = AB = BC$, wnioskujemy, że trójkąt BCE jest równoramienny, zatem

$$\angle ECB = \angle BEC = \tfrac{1}{2}(180° - \angle CBE) = 75°.$$

Ostatecznie, szukany kąt ma miarę $\angle DCE = 90° - \angle ECB = 15°$.

Zadanie 4. Dominika ma wielką skrzynię zawierającą dużo monet: jedną o nominale 1, dwie o nominale 2, ..., osiemnaście o nominale 18 i dziewiętnaście o nominale 19. Dominika wyjmuje kolejno monety ze skrzyni, nie widząc ich nominałów. Jaka jest minimalna liczba monet, które musi wyjąć Dominika, aby mieć pewność, że wyjęła dziesięć monet o tym samym nominale?

Wynik. 136

Rozwiązanie. Dominika mogła wyjąć przypadkiem wszystkie monety o nominałach mniejszych niż 10 i po dziewięć monet o wszystkich nominałach od 10 do 19. Łącznie byłoby to $(1+2+\ldots+9)+9\cdot 10 = 135$ monet. Wyjęcie 135 monet nie gwarantuje zatem wyjęcia dziesięciu o tym samym nominale. Jeżeli jednak wyjętych zostanie 136 monet, to co najmniej 91 ma nominały większe od 9. Z zasady szufladkowej Dirichleta, któryś z dziesięciu nominałów pojawia się na monetach co najmniej 10 razy. Minimalna liczba monet, które musi wyjąć Dominika, to zatem 136.

Zadanie 5. Pan Cukierek kupił wielkie pudło swoich ulubionych cukierków halloweenowych aby wręczać je w ramach zabawy „cukierek albo psikus”. Zjadł jednak połowę cukierków zanim odwiedziło go pierwsze dziecko, które otrzymało część z pozostałych cukierków. Następnie, zanim przyszło drugie dziecko, znów zjadł połowę tego co zostało po pierwszych odwiedzinach, a po wizycie drugiego dziecka znów zjadł połowę pozostałych cukierków. Trzecie dziecko otrzymało wszystkie pozostałe cukierki. Jeśli każde z dzieci otrzymało dokładnie trzy cukierki, to ile cukierków kupił Pan Cukierek?

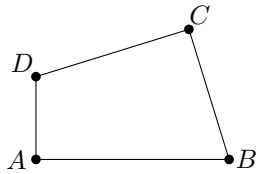
Wynik. 42

Rozwiązanie. Niech n będzie liczbą kupionych cukierków. Podział cukierków wyraża się równaniem

$$((n/2-3)/2-3)/2-3=0.$$

Rozwiązując je otrzymujemy $n=42$.

Zadanie 6. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, w którym kąty przy wierzchołkach A i C są proste. Mając dane długości $BC=6$, $CD=8$ i $DA=2$, znajdź pole czworokąta $ABCD$.



Wynik. $24+4\sqrt{6}$

Rozwiązanie. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Podobnie obliczamy $AB=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$. Zatem pole czworokąta $ABCD$ wynosi

$$\frac{1}{2}(6\cdot 8+2\cdot 4\sqrt{6})=24+4\sqrt{6}.$$

Zadanie 7. Biurowa kserokopiarka może drukować jedno- lub dwustronnie. Druk jednostronny zajmuje trzy sekundy na stronę, natomiast dwustronny dziewięć sekund na kartkę. Tomek chce wydrukować dwustronnie mający osiemnaście stron artykuł naukowy. Może albo wydrukować wszystkie strony dwustronnie, albo wydrukować tylko strony nieparzyste, ręcznie włożyć kartki z powrotem do kserokopiarki i wydrukować strony parzyste. Tomek szybko orientuje się, że obie metody zajmą jej tyle samo czasu. Ile sekund trwa włożenie kartek z powrotem do kserokopiarki?

Wynik. 27

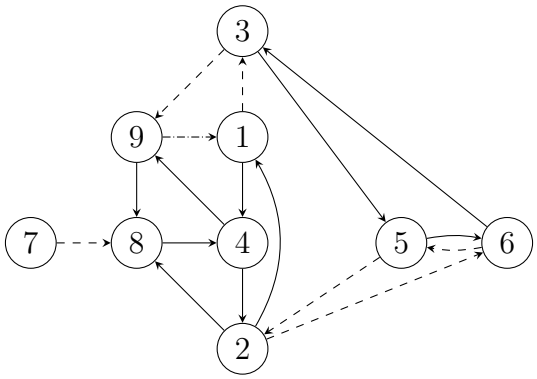
Rozwiązanie. Wiemy, że Tomek chce wydrukować artykuł na dziewięciu kartkach papieru. Przy użyciu funkcji druku dwustronnego zajmuje to $9\cdot 9=81$ sekund. Przy użyciu funkcji druku jednostronnego, każda kartka zostaje zadrukowana dwukrotnie, co trwa łącznie $2\cdot 3\cdot 9=54$ sekundy. Manualna część pracy zajmuje zatem $81-54=27$ sekund.

Zadanie 8. Znajdź wszystkie dziewięciocyfrowe liczby A spełniające następujące warunki:

- Liczba A zawiera wszystkie cyfry od 1 do 9.
- Każda dwucyfrowa liczba powstała z sąsiadujących cyfr liczby A jest podzielna przez 7 lub przez 13.

Wynik. 784913526

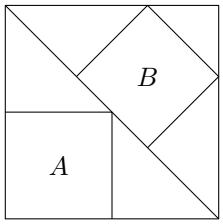
Rozwiązanie. Narysujmy diagram z cyframi $1, \ldots, 9$, w którym strzałka wychodzi z x do y jeśli dwucyfrowa liczba $\overline{xy}$ jest podzielna przez 7 lub 13.



(Ciągła strzałka oznacza podzielność przez 7, przerywana podzielność przez 13, zaś przerywano-kropkowana podzielność przez obie liczby.) Z diagramu widać, że liczba z treści musi zaczynać się od cyfr 784. Jeżeli następna cyfra to 9, dalej musi być 1, 3, oraz 5, a pozostałe dwie cyfry muszą być w kolejności 2, 6. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie 784913526.

Z drugiej strony, jeśli liczba A zaczyna się od 7842, mamy do rozważenia dwa przypadki. Pierwszy, gdy potem następuje 1 i 3, liczba nie może jednocześnie zawierać 5 i 9. W drugim przypadku natrafiamy na ten sam problem otrzymując 784263, więc powyżej otrzymane rozwiązanie jest jedynym możliwym.

Zadanie 9. Dwa kwadraty leżą wewnątrz dużego kwadratu, tak jak pokazano na rysunku. Wyznacz pole kwadratu A, jeśli pole kwadratu B jest równe 48.



Wynik. 54

Rozwiązanie. Niech s będzie długością boku dużego kwadratu. Wtedy bok kwadratu A jest równy $\frac{1}{2} \cdot s$, a bok kwadratu B jest równy $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$. Zatem stosunek pól wpisanych kwadratów jest równy

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8},$$

więc pole kwadratu A jest równe $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

Zadanie 10. Szymon ma dwie sześcienne kostki, jedną o boku długości 9 cm, złożoną z białych jednostkowych kostek (tj. sześcianów o boku długości 1 cm), a drugą o boku długości 10 cm złożoną z czarnych jednostkowych kostek. Korzystając z jednostkowych kostek Szymon chce zbudować kostkę o boku długości 12 cm. Jaka jest minimalna powierzchnia tej kostki w cm^2, która musi być czarna?

Wynik. 0

Rozwiązanie. Szymon ma $9^3 = 729$ białych i $10^3 = 1000$ czarnych jednostkowych kostek. Żeby zbudować sześcian o boku 12 potrzebuje on $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ jednostkowych kostek. Może więc użyć on wyłącznie kostek białych, minimalna czarna powierzchnia to 0.

Zadanie 11. Po sprawdzaniu sprawdzianu z matematyki nauczycielka zauważyła, że dokładnie dziesięcioro jej uczniów nie umie mnożyć ułamków, czternaścioro nie umie ich dodawać, a siedemnaścioro nie umie usuwać niewymierności z mianownika. Ponadto, każdy z uczniów nie umie robić przynajmniej jednej z tych rzeczy, a sześcioro nie umie wszystkich trzech. Ilu co najwyżej uczniów chodzi na zajęcia?

Wynik. 29

Rozwiązanie. Aby znaleźć dokładną liczbę uczniów, potrzebowaliśmy także informacji, ilu uczniów nie umie wykonywać każdej pary operacji na ułamkach. Możemy jednak łatwo znaleźć maksymalną liczbę uczniów zakładając, że wszyscy, którzy nie umieją co najmniej dwóch zagadnień, nie umieją także trzeciego. W tej sytuacji uczniów jest

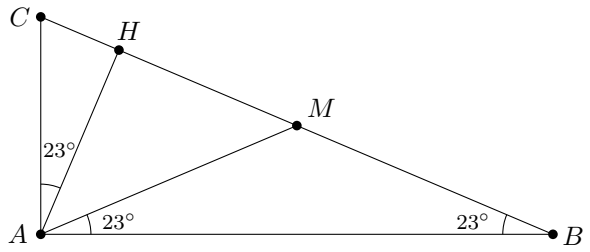
$$10 + 14 + 17 - 2 \cdot 6 = 29.$$

Musimy odjąć liczbę uczniów bez żadnej umiejętności dwukrotnie, ponieważ sumując rozmiary pozostałych grup tych uczniów liczymy trzykrotnie.

Zadanie 12. Jeden z kątów trójkąta prostokątnego jest równy $23°$. Wyznacz miarę (w stopniach) kąta między środkową a wysokością tego trójkąta opuszczonych z wierzchołka kąta prostego.

Wynik. 44

Rozwiązanie. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\angle BAC = 90°$. Niech AM będzie środkową a AH wysokością tego trójkąta.



Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu o środku w punkcie M. Bez straty załóżmy, że $\angle CBA = 23°$. Ponieważ trójkąt ABM jest równoramienny, to $\angle BAM = 23°$. Ponadto, trójkąt AHC jest podobny do trójkąta ABC, więc $\angle HAC = 23°$. Ostatecznie, mamy, że $\angle MAH = 90° - 2 \cdot 23° = 44°$.

Zadanie 13. Dodatnie liczby całkowite a i b spełniają równość $20a + 19b = 365$. Znajdź wartość $20b + 19a$.

Wynik. 376

Rozwiązanie. Oczywiście $a, b \leq 20$. Dodając b do obu stron zadanego równania dostajemy $20(a + b) = 365 + b$. Lewa strona powyższej równości jest podzielna przez 20, zatem prawa strona musi być równa 380. To daje $b = 15$, stąd $a = 4$ i obliczamy, że

$$20b + 19a = 380 - a = 376.$$

Zadanie 14. Wielokąt foremny o 2018 wierzchołkach ma 2033135 przekątnych. O ile więcej przekątnych ma wielokąt foremny o 2019 wierzchołkach?

Uwaga: w obu przypadkach nie liczymy boków wielokąta jako jego przekątnych.

Wynik. 2017

Rozwiązanie. Foremność wielokątów nie odgrywa żadnej roli. Możemy założyć, że 2019-kąt powstaje z 2018-kąta poprzez dołożenie wierzchołka na którymś z boków. Wierzchołek ten jest połączony 2016 przekątnymi z wierzchołkami niebędącymi jego sąsiadami. Powstanie także przekątna łącząca sąsiadów dodanego wierzchołka. Łącznie liczba przekątnych wzrośnie o 2017.

Zadanie 15. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Wynik. 2, 5, -6

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$, to jedyna możliwość, dla której rozważana potęga jest równa 1 jest taka, że podstawa potęgi jest równa 1 lub wykładnik potęgi jest równy 0. W pierwszym przypadku $x^2 - 4x + 5 = 1$, co jest równoważne równaniu $(x-2)^2 = 0$, czyli $x = 2$. W drugim przypadku $x^2 + x - 30 = (x-5)(x+6) = 0$, więc dostajemy dwa rozwiązania: $x = 5$ i $x = -6$. Podsumowując, mamy trzy rozwiązania danego równania 2, 5 i -6.

Zadanie 16. Ile jest permutacji zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4\}$ o takiej własności, że po wymazaniu dowolnej liczby, pozostały ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący?

Uwaga: *Permutacja* zbioru liczb to ciąg zawierający każdą z nich dokładnie raz.

Wynik. 4

Rozwiązanie. Permutację nazwiemy *skoczną*, jeśli spełnia warunek opisany w zadaniu.

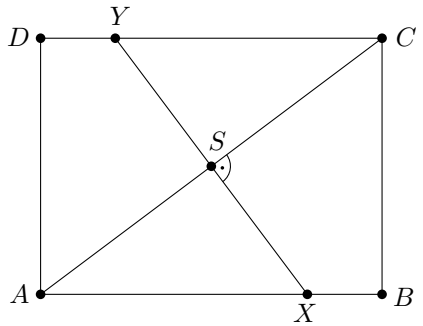
Na początku wykażemy, że w skocznej permutacji, liczby 1 i 4 nie mogą znaleźć się na skrajnej pozycji. Ze względu na symetrię, wystarczy uzasadnić, że 1 nie może pojawić się na początku – załóżmy więc nie wprost, że pewna skoczna permutacja zaczyna się od 1. Mamy dwie możliwości: albo ciąg liczb na pozostałych trzech miejscach jest ściśle malejący, albo istnieją wśród nich dwie takie, że mniejsza pojawia się przed większą. W pierwszym przypadku, permutacja nie może być skoczna (gdyż możemy wymazać liczbę 1 i otrzymać ciąg malejący). W drugim przypadku, pozostawiając liczbę 1 i takie dwie, że mniejsza pojawia się przed większą, uzyskamy ciąg rosnący – co również prowadzi do sprzeczności.

Oznacza to, że liczby 1 i 4 muszą zostać umieszczone na dwóch środkowych pozycjach. Łatwo sprawdzić, że wszystkie permutacje spełniające tenże warunek (a są to dokładnie 2143, 3142, 2413, 3412) są skoczne.

Zadanie 17. Niech $ABCD$ będzie prostokątem, w którym $AB = 8\,\text{cm}$ i $BC = 6\,\text{cm}$. Ponadto niech X i Y będą odpowiednio punktami przecięcia symetralnej odcinka AC z bokami AB i CD. Jaka jest długość odcinka XY (w centymetrach)?

Wynik. 15/2

Rozwiązanie. Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Niech S będzie punktem przecięcia boku AC i jego symetralnej. Oczywiście S jest środkiem odcinka AC, więc $AS = 5$.



Ponieważ $\angle CAB = \angle SAX$ i $\angle XSA = \angle CBA = 90°$, więc trójkąty ASX i ABC są podobne, stąd $SX : AS = BC : AB$ lub

$$SX = \frac{BC \cdot AS}{AB} = \frac{15}{4}.$$

Ostatecznie, szukana długość wynosi $XY = 2 \cdot SX = \frac{15}{2}$.

Zadanie 18. Napis $FOUR + FIVE = NINE$ jest kryptarytmem — to znaczy, że da się podmienić każdą z liter w nim występujących na cyfrę (w zapisie dziesiętnym) tak, aby różnym literom odpowiadały różne cyfry, ta sama litera zawsze odpowiadała tej samej cyfrze, a powstałe równanie było poprawne. Ponadto, pewne podstawienie cyfr za litery spełnia dodatkowe warunki:

- liczba $FOUR$ jest podzielna przez cztery
- liczba $FIVE$ jest podzielna przez pięć

- liczba $NINE$ jest podzielna przez trzy

Jaka liczba kryje się pod napisem $NINE$ w tym podstawieniu?

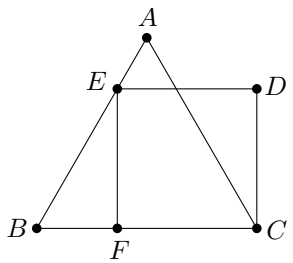
Wynik. 3435

Rozwiązanie. Po pierwsze, zauważmy, że R musi odpowiadać cyfrze 0 (gdyż $E + R = E$ lub $E + R = E + 10$).

Dalej, ponieważ $FIVE$ jest podzielna przez 5, a $R = 0$, E musi być odpowiadać cyfrze 5. Popatrzmy teraz na dodawanie w kolumnie setek. Skoro O nie może być równe 0, pozostaje tylko jedna możliwość – $O = 9$, a jedynka jest przeniesiona z kolumny dziesiątek. Zauważmy, że jedynka jest wtedy także przenoszona do kolumny tysięcy. Zatem, $U + V$ musi być większe od 10, a $N = 2F + 1$ musi być nieparzystą liczbą większą od 1. Z drugiej strony, $U + V \leq 7 + 8 = 15$, gdyż cyfra 9 jest już zajęta. W konsekwencji, $N \leq 5$, a skoro cyfra 5 jest przypisana do E, musimy mieć $N = 3$. Stąd wniosek, że $U = 6$ (liczba UR jest podzielna przez 4), $V = 7$ i $F = 1$.

Kontynuując, liczba $NINE$ jest podzielna przez 3, więc jej suma cyfr, która wynosi $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ także jest podzielna przez 3. Oznacza to, że I musi odpowiadać jednej z cyfr 1, 4 lub 7, a tylko 4 nie jest jeszcze nigdzie przypisana. Ostatecznie, $NINE = 3435$, a cały kryptarytm rozwiązuje się do $1960 + 1475 = 3435$.

Zadanie 19. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym i niech $CDEF$ będzie kwadratem takim, że punkt E leży na odcinku AB i F leży na odcinku BC. Jeżeli obwód kwadratu wynosi 4, to ile jest równy obwód trójkąta ABC?



Wynik. $3 + \sqrt{3}$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez G przecięcie AC i DE. Zauważmy, że dwa trójkąty prostokątne widoczne na rysunku mające kąty $30°$, $60°$, i $90°$, tzn. BEF oraz GCD są przystające, ponieważ mają wspólny bok długości 1. Taki trójkąt prostokątny stanowi połowę trójkąta równobocznego, którego bok ma długość równą długości przeciwprostokątnej tego trójkąta. Zatem $BE = 2BF$ i z twierdzenia Pitagorasa $BE^2 = EF^2 + BF^2$. Łącząc to z równością $EF = 1$ dostajemy $BF = \sqrt{3}/3$. Zatem bok trójkąta ABC wynosi $1 + \sqrt{3}/3$, a jego obwód $3 + \sqrt{3}$.

Zadanie 20. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Jeśli $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ ma potrójny pierwiastek, jakie są możliwe wartości a?

Wynik. 42, -42

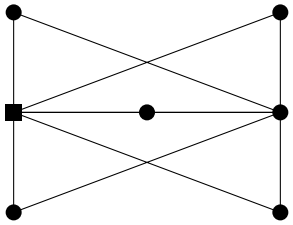
Rozwiązanie. Jeśli r jest potrójnym pierwiastkiem, to

$$(x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Porównując współczynniki mamy, że $3r^2 = 588$ lub, równoważnie, $r = \pm 14$. Zatem $a = \pm 42$.

Zadanie 21. Łukasz pojechał na wyspy, które są połączone płatnymi mostami (jak na rysunku). Widok z każdego mostu jest wyjątkowy, Łukasz chce więc przejść każdym z nich. Ponieważ lubi także oszczędzać pieniądze, planuje przekroczyć każdy z mostów dokładnie raz. Na ile sposobów może on zaplanować wycieczkę jeśli zaczyna ją na kwadratowej wyspie? Łukasz nie może skakać z mostu na most nie będąc na

wyspie i może odwiedzić każdą z wysp dowolnie wiele razy.



Wynik. 120

Rozwiązanie. Zauważmy, że wyspy kwadratowa i ta znajdująca się na środku po prawej są „specjalne": wszystkie mosty mają jeden z końców na którejś z nich i każda ze „zwykłych" wysp połączona jest z nimi obiema mostami. Przechodząc z jednej wyspy specjalnej na drugą trzeba zatem przejść przed jedną ze zwykłych wysp. Wystarczy więc wyznaczyć liczbę sposobów ustawienia zwykłych wysp w ciąg, gdyż każde z ustawień jednoznacznie wyznacza trasę. Ustawień tych jest $5! = 120$.

Zadanie 22. Ile jest uporządkowanych par dodatnich liczb całkowitych (m, n) takich, że ich najmniejsza wspólna wielokrotność jest równa 2000?

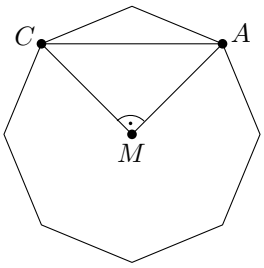
Wynik. 63

Rozwiązanie. Rozpatrzmy dwa przypadki. Najpierw załóżmy, że w parze nie ma liczby $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Wtedy jedna z liczb musi być równa $2^4 \cdot 5^k$ dla $k \in \{0, 1, 2\}$ a druga $2^l \cdot 5^4$ dla $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, zatem dostajemy 24 takie pary (wliczając możliwe uporządkowania). W drugim przypadku, jeśli pewna z liczb w parze jest równa 2000, wtedy druga z liczb jest równa dzielnikowi 2000, których jest $(4+1) \cdot (3+1) = 20$. Biorąc pod uwagę porządek dostajemy $2 \cdot 20 - 1 = 39$ par; z rachunku wykluczyliśmy parę $(2000, 2000)$ policzoną dwa razy. Ostatecznie, mamy $24 + 39 = 63$ par spełniających warunki zadania.

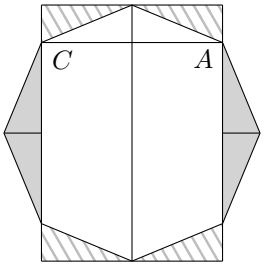
Zadanie 23. Niech $ABCDEFGH$ będzie ośmiokątem foremnym, w którym $AC = 7\sqrt{2}$. Wyznacz pole tego ośmiokąta.

Wynik. $98\sqrt{2}$

Rozwiązanie. Niech M będzie środkiem okręgu opisanego na tym ośmiokącie. Ponieważ $\angle AMC = \frac{2}{8} \cdot 360^\circ = 90^\circ$, to promień tego okręgu jest równy 7, a średnica – 14.



Rozpatrzmy rozcięcie ośmiokąta tak jak pokazano na rysunku. Łatwo widzimy, że pole jest równe $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Zadanie 24. Czworo przyjaciół postanowiła rozpocząć naukę języków obcych. Lokalna szkoła języków oferuje kursy arabskiego, bengalskiego, chińskiego i duńskiego. Każdy z przyjaciół chce uczyć się dokładnie trzech spośród tych języków. Na ile sposobów mogą oni wybrać kursy tak, aby wszyscy uczęszczali na przynajmniej jeden wspólny?

Wynik. 232

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że trójkę języków można przypisać każdej z osób na dokładnie cztery sposoby — możemy równoważnie wybrać język, którego dana nie będzie się uczyć. Jeżeli pominiemy dodatkowy warunek jest $4^4 = 256$ sposobów przypisania trójek języków czterem osobom.

Policzmy teraz ile z takich przyporządkowań nie spełnia dodatkowego warunku, czyli nie ma kursy na który chodzą wszystkie cztery osoby. Jedyną możliwością jest, że każda z nich nie będzie uczyć się innego języka. Takich sytuacji jest $4! = 24$.

Łączna liczba przyporządkowań spełniających zadany warunek to $256 - 24 = 232$.

Zadanie 25. Agnieszka przemnożyła dodatnią liczbę całkowitą n, której wszystkie cyfry są niezerowe, przez liczbę składającą się z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Zauważyła, że otrzymany wynik jest o tysiąc większy od iloczynu cyfr liczby n. Znajdź możliwe wartości n.

Wynik. 24, 42

Rozwiązanie. Liczba n ma co najmniej dwie cyfry. Jeśli n jest dwucyfrowa, możemy zapisać ją jako $10a + b$, gdzie cyfry a i b są niezerowe. Wtedy z zadania otrzymujemy równość

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab,$$

co po przekształceniu daje

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Prawa strona musi być nieujemna, więc $ab < 10$. Po sprawdzeniu możliwych przypadków otrzymujemy, że $n = 24$ lub $n = 42$.

Jeżeli n ma $k \geq 3$ cyfr, to lewa strona równości ma wartość większą niż $(10^{k-1})^2$, a prawa strona mniejszą niż $1000 + 10^k$, co wyklucza ten przypadek.

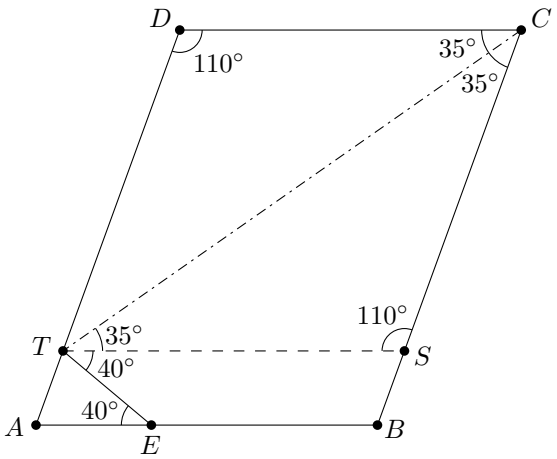
Zadanie 26. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, a T punktem odcinka AD takim, że CT jest dwusieczną kąta $\angle BCD$. Ponadto, niech E będzie punktem odcinka AB takim, że $\angle AET = 40°$. Jeśli $\angle CTE = 75°$, ile wynosi miara kąta $\angle CDA$ (w stopniach)?

Wynik. 110

Rozwiązanie. Niech S będzie punktem na odcinku BC takim, że odcinek TS jest równoległy do AB. Wtedy $\angle ETS = 40°$ i

$$\angle DCT = \angle STC = \angle CTE - \angle STE = 35°.$$

Ponieważ CT jest dwusieczną kąta $\angle DCB$, więc trójkąt CTS jest równoramienny, skąd $\angle DCT = \angle TCS$ i $\angle DCB = 2 \cdot 35° = 70°$. Zatem $\angle CDA = 180° - \angle DCB = 110°$.



Zadanie 27. Dwie duże rodziny szlacheckie, obie składające się zarówno z kobiet jak i mężczyzn, spotkały się na przyjęciu. Każda osoba przywitała się z każdą z drugiej rodziny. Mężczyźni witali się podając sobie dłonie, natomiast przy przywitaniu dwóch kobiet bądź kobiety z mężczyzną obie osoby kłaniały się. Po wszystkich powitaniach łącznie było 85 uścisków dłoni i 162 ukłony. Ile kobiet brało udział w przyjęciu? Kiedy dwie osoby kłaniają się sobie, liczymy to jako jeden ukłon.

Wynik. 10

Rozwiązanie. Niech m_1, m_2, k_1, k_2 oznaczają odpowiednio liczbę mężczyzn i kobiet w każdej z rodzin. Z warunków zadania wynika, że $m_1 m_2 = 85 = 5 \cdot 17$, zatem bez straty ogólności $m_1 = 5$ and $m_2 = 17$ (łatwo wykluczyć przypadek, gdy któraś z liczb m_1, m_2 jest równa 1). Co więcej, łącznie było $85 + 162 = 247$ powitań, więc z równości

$$(m_1 + k_1)(m_2 + k_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

dostajemy $m_1 + k_1 = 13$, $m_2 + k_2 = 19$ (ponownie, inne rozkłady łatwo wykluczyć), zatem $k_1 = 8$, $k_2 = 2$, a więc kobiet było łącznie $8 + 2 = 10$.

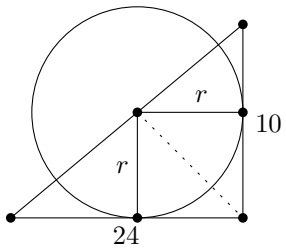
Zadanie 28. Rozpatrzmy trójkąt o bokach długości 10, 24 i 26. Niech c będzie okręgiem, którego środek leży na najdłuższym boku trójkąta i który jest styczny do dwóch pozostałych boków. Wyznacz promień okręgu c.

Wynik. 120/17

Rozwiązanie. Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wnioskujemy, że wyjściowy trójkąt jest prostokątny. Odcinek łączący wierzchołek kąta prostego ze środkiem okręgu dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne, w których promień okręgu c jest jedną z przyprostokątnych. Wyznaczmy teraz pole dużego trójkąta na dwa różne sposoby wykorzystując pola małych trójkątów:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r,$$

zatem $r = 120/17$.



Zadanie 29. Zdzichu przyszedł do kasyna z kwotą 10zł. Jednoręki bandyta to maszyna do gry działająca w następujący sposób: gracz wrzuca do maszyny 1zł w dowolnych nominałach i z prawdopodobieństwem p wygrywa główną nagrodę; w przeciwnym razie maszyna zwraca graczowi 0,50 zł. Pomóż Zdzichowi znaleźć najmniejsze prawdopodobieństwo p takie, że jeśli Zdzichu zdecyduje się na grę na jednorękim bandycie tak długo jak to możliwe lub do momentu wygrania głównej nagrody, Zdzichu będzie miał co najmniej 50% szansy na wygranie głównej nagrody.

Wynik. $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$

Rozwiązanie. Zauważmy, że Zdzichu może zagrać bez zdobycia głównej wygranej co najwyżej 19 razy, gdyż po wrzuceniu jego ostatniej złotówki do maszyny zostanie mu tylko 0,50 zł, a to mniej niż wymagana złotówka aby zagrać. Prawdopodobieństwo każdej przegranej wynosi $1 - p$, więc prawdopodobieństwo niewygrania głównej nagrody wynosi $(1 - p)^{19}$. Aby Zdzichu miał co najmniej pięćdziesięcioprocentową szansę wygrania głównej nagrody, musi zachodzić nierówność $(1 - p)^{19} \leq 0{,}5$, która jest równoważna $p \geq 1 - \sqrt[19]{0{,}5}$ i w takim razie $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$ jest poszukiwaną najmniejszą wartością p.

Zadanie 30. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite czterocyfrowe $\overline{abcd}$, które są równe $a^a + b^b + c^c + d^d$. Żadna z cyfr nie może być równa zero.

Wynik. 3435

Rozwiązanie. Żadna z cyfr nie może być większa niż 5, ponieważ $6^6 \geq 10000$. Z drugiej strony, gdyby wszystkie cyfry były równe 4, to równość nie byłaby spełniona, a gdyby były co najwyżej trzy czwórki i żadnej piątki, liczba byłaby równa co najwyżej $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$. Jedna z cyfr musi być zatem równa 5. Liczba ta musi wystąpić dokładnie raz, ponieważ $5^5 = 3125$, czyli w przeciwnym wypadku pierwsza cyfra przekroczyłaby 5. Widzimy, że $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$, zatem pierwszą cyfrą musi być 3.

Teraz wiemy już, że szukana liczba jest nie mniejsza niż $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$. 3154 nie spełnia warunków zadania, podobnie jak 3155. Kolejna liczba o cyfrach nieprzekraczających 5 to $3211 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$, zatem jedną z cyfr musi być 4. Mamy zatem co najmniej jedną cyfrę 3, co najmniej jedną cyfrę 4, co najmniej jedną cyfrę 5. Ostatnią z cyfr nie może być kolejna czwórka, ponieważ cyfra setek wyjściowej liczby przekroczyłaby 5 ($5^5 + 4^4 + 4^4 + 3^3 > 5600$). Sprawdzając pozostałe trzy przypadki otrzymujemy, że jedynym rozwiązaniem jest liczba 3435.

Zadanie 31. Ile jest takich piątek liczb dwucyfrowych, że każda z cyfr od 0 do 9 występuje w nich łącznie dokładnie raz, a przy tym każda z liczb dwucyfrowych jest parzysta i niepodzielna przez 3? Piątki różniące się tylko kolejnością liczb uznajemy za tożsame.

Wynik. 16

Rozwiązanie. Wszystkie liczby muszą mieć parzystą cyfrę jedności. Aby zapewnić niepodzielność przez 3, liczby o cyfrze jedności 0 lub 6 muszą zaczynać się cyfrą 1, 5 lub 7; liczby o cyfrze jedności 2 lub 8 – cyfrą 3, 5 lub 9; zaś liczby o cyfrze jedności 4 – cyfrą 1, 3, 7 lub 9. Jeśli liczba kończąca się cyfrą 4 będzie równa 14, to te kończące się na 0 lub 6 muszą być równe 50 i 76 lub 56 i 70 i w konsekwencji liczby kończące się na 2 i 8 muszą być równe albo 32 i 98, albo 38 i 92. Daje to razem cztery możliwości. Podobny argument pozostaje w mocy dla wyboru dowolnej innej cyfry dziesiątek dla liczby kończącej się na 4, a ponieważ możemy wybrać do tej roli jedną z czterech cyfr, to całkowita liczba piątek wynosi $4 \cdot 4 = 16$.

Zadanie 32. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające równość

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Uwaga: wyrażenie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (*podłogę*) x, tzn. największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x.

Wynik. 5439

Rozwiązanie. Niech

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Funkcja f jest oczywiście niemalejąca. Co więcej, $f(n) - f(n-1) = 1$, jeśli liczba n jest podzielna przez dokładnie jedną z liczb 5, 7 i $f(n) - f(n-1) = 3$ jeśli liczba n jest podzielna przez 35. W pozostałych przypadkach $f(n) = f(n-1)$. Ponieważ

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} \right) n = \frac{13}{35} n,$$

to dla każdego n spełniającego warunki zadania dostajemy ograniczenie

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019 = 5435 + \frac{10}{13},$$

a ponieważ n jest liczbą całkowitą, to $n \geq 5436$. Mamy $f(5436) = 2018$. Najbliższa większa od 5436 liczba podzielna przez 5 to 5440, a najbliższa podzielna przez 7 – 5439. Zatem z powyższych obserwacji wnosimy, że $f(5439) = 2019$, $f(5440) = 2020$ i 5439 jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie 33. Ile jest liczb całkowitych n, dla których istnieją dodatnie liczby całkowite $x, y \leq 1\,000\,000$ (niekoniecznie różne) spełniające warunek

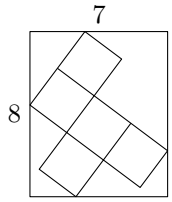
$$n = S(x) = S(y) = S(x + y),$$

gdzie $S(a)$ oznacza sumę cyfr liczby a?

Wynik. 6

Rozwiązanie. Ponieważ dla każdej liczby całkowitej dodatniej a liczby $S(a)$ i a dają tę samą resztę z dzielenia przez 9, to z warunków zadania wnioskujemy, że liczby n, x, y i $x + y$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. To oznacza, że x, a co za tym idzie również n, musi być podzielne przez 9. Jeśli $n = 9m$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m, to dla $x = y = 10^m - 1$ spełniona będzie równość podana w zadaniu. Największą możliwą sumą cyfr liczby mniejszej od miliona jest 54, zatem jest dokładnie 6 możliwych wartości liczby n: 9, 18, 27, 36, 45 i 54.

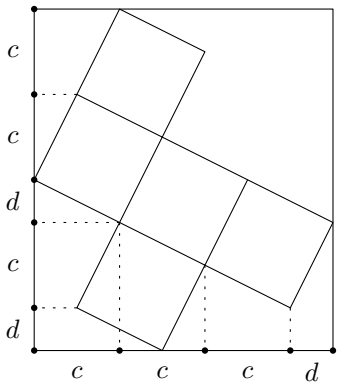
Zadanie 34. Pentomino, złożone z pięciu kwadratów o boku a, jest wpisane w prostokąt o wymiarach 7×8 tak jak na rysunku:



Wyznacz a.

Wynik. $\sqrt{5}$

Rozwiązanie. Niech c i d będą długościami odpowiednio dłuższego i krótszego rzutu boku kwadratu na boki prostokąta.



Wtedy

$$3c + 2d = 8,$$
$$3c + d = 7,$$

zatem $c = 2$ i $d = 1$. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy, że

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

Zadanie 35. Gerard ma prostokątną tabliczkę czekolady o wymiarach 5×3. Dodatkowo, posypuje on kostkę, która znajduje się w lewym górnym rogu cukrem. Gerard zjada czekoladę w następujący sposób: w każdym kroku wybiera on losowo albo zjedzenie kolumny najbardziej na prawo, albo zjedzenie najniższego wiersza, przy czym każda z opcji występuje z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Powtarza ten proces, dopóki nie zje całej tabliczki czekolady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ostatnim kroku Gerard zje tylko kostkę posypaną cukrem?

Wynik. 15/64

Rozwiązanie. Załóżmy, że tabliczka czekolady ma 3 rzędy i 5 kolumn. Zauważmy, że po wykonaniu $(5-1)+(3-1) = 6$ kroków albo tabliczka zostanie cała zjedzona oraz w ostatnim kroku nie będzie zjedzona kostka posypana cukrem, albo zostanie tylko kostka posypana cukrem. Możemy więc zinterpretować opisany w zadaniu proces następująco: Gerard wybiera ciąg liter K lub R o łącznej długości 6 i na jego podstawie zjada odpowiednio kolumnę lub rząd czekolady. Są dwie możliwości: albo ciąg zawiera dokładnie dwie litery K (i cztery R), co oznacza, że została mu kostka posypana cukrem, albo liczba liter K lub R w tym ciągu jest równa co najmniej liczbie odpowiednio kolumn lub wierszy, co oznacza, że w swoim ostatnim kroku Gerard zjadł coś innego niż kostkę posypaną cukrem.

Jest dokładnie 2^6 ciągów liter K i R, o długości 6, z których dokładnie $\binom{6}{2}$ zawiera dokładnie dwie litery K, zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

Zadanie 36. Używając dwukrotnie każdej z liczb 1, 2, ..., 9, Andrzej utworzył kilka parami różnych liczb pierwszych w taki sposób, że suma tych liczb jest możliwie najmniejsza. Ile wynosi ta suma?

Wynik. 477

Rozwiązanie. Żadna liczba pierwsza różna od 2 i 5 nie może kończyć się na 5 lub na cyfrę parzystą. Zatem każda z cyfr

$$2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8$$

musi pojawić się jako cyfra co najmniej dziesiątek wśród liczb pierwszych Andrzeja. Ponadto każda z pozostałych cyfr

$$2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9$$

musi pojawić się wśród liczb pierwszych Andrzeja (jako cyfra co najmniej jedności). Zatem suma wynosi co najmniej

$$10(2 + 5 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 + 8) + 2 + 5 + 1 + 1 + 3 + 3 + 7 + 7 + 9 + 9 = 477.$$

Z drugiej strony, sumę tę można otrzymać wybierając następujące liczby pierwsze:

$$2, 5, 29, 53, 41, 47, 61, 67, 83, 89.$$

Zadanie 37. Bolek i Lolek napisali na tablicy dwa wielomiany, Bolek napisał wielomian $B(x) = x^2 + 2x + 10$, a Lolek napisał wielomian $L(x) = x^2 - 8x + 25$. Każdy z nich podstawił do swojego wielomianu swoją ulubioną dodatnią liczbę całkowitą (odpowiednio b i l) i okazało się, że obaj dostali ten sam wynik, tzn. $B(b) = L(l)$. Znajdź wszystkie możliwe wartości $|b - l|$.

Wynik. 1, 5

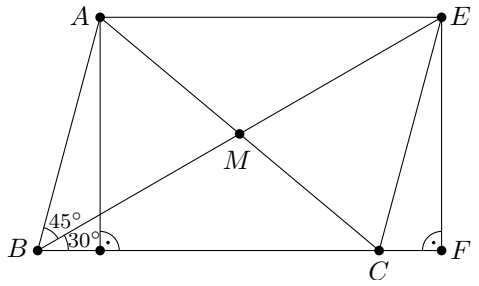
Rozwiązanie. Rozkładając na czynniki lewą stronę równania $B(b) - L(l) = 0$, otrzymujemy równanie $(b + l - 3)(b - l - 5) = 0$. Zatem $B(b) = L(l)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{b, l\} = \{1, 2\}$ lub $b - l = 5$.

Zadanie 38. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka A ma taką samą długość, jak środkowa tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka B. Ponadto wiadomo, że miara kąta ABC wynosi $75°$. Wyznacz stosunek $AB : BC$.

Wynik. $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$

Rozwiązanie. Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu B względem środka M boku AC, a F rzutem prostokątnym punktu E na prostą BC. Wtedy z pierwszego warunku zadania dostajemy, że $\sin(\angle EBC) = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$, czyli $\angle EBC = 30°$ (nie może być to kąt rozwarty z powodu drugiego warunku

zadania). Zatem $\angle ABM = \angle ABE = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.



Z twierdzenia sinusów dla trójkątów ABM i CBM mamy

$$\frac{BM}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AM}{\sin 45^\circ} = \frac{AM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

oraz

$$\frac{BM}{\sin(\angle BCA)} = \frac{CM}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\frac{1}{2}}.$$

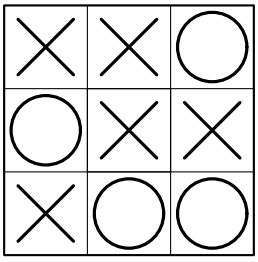
Dzieląc teraz oba równania przez siebie i korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC dostajemy

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\angle BCA)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadanie 39. Gra w kółko i krzyżyk polega na naprzemiennym wpisywaniu symboli przez dwóch graczy w pola planszy o wymiarach 3×3. Jeden z graczy wpisuje kółka, a drugi krzyżyki. Gracz wygrywa jeśli trzy jego symbole znajdują się w jednym rzędzie, kolumnie lub przekątnej. Gra kończy się remisem jeśli plansza jest całkowicie zapełniona i żaden z graczy nie wygrał. Jaka jest liczba możliwych wypełnień planszy w przypadku, gdy gra zakończyła się remisem? Wypełnienia różniące się o obrót lub symetrię uznajemy za różne. Grę może rozpocząć dowolny z graczy.

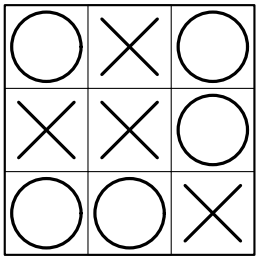
Wynik. 32

Rozwiązanie. Rozważamy cztery przypadki w zależności od symbolu znajdującego się w środkowym polu i symbolu, który pojawia się na planszy pięciokrotnie. Jeśli w środkowym polu jest krzyżyk, przy czym na planszy znajduje się łącznie pięć krzyżyków (taki przypadek określimy mianem „krzyżyk-krzyżyk”), to na planszy poza krzyżykiem na środkowym polu muszą znaleźć się jeszcze cztery inne krzyżyki. Żadne trzy krzyżyki nie mogą wypełnić całego rzędu, kolumny lub przekątnej. Ostatecznie otrzymujemy wzór przedstawiony na Rysunku 1, który nie jest niezmienniczy ze względu na żaden obrót ani symetrię osiową. Wobec tego, wzór ten odpowiada ośmiu różnym zakończeniom gry remisem.

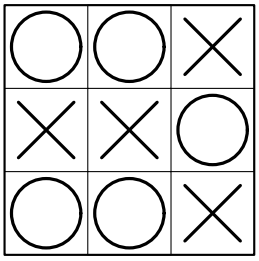


Rysunek 1

W przypadku „krzyżyk-kółko” na planszy znajduje się pięć kółek, przy czym symbol w środkowym polu to krzyżyk. Kółka nie mogą zajmować wszystkich czterech narożnych pól planszy, gdyż w przeciwnym razie piąte kółko wraz z dwoma kółkami w rogach utworzyłyby wiersz lub kolumnę złożoną z trzech kółek. Z drugiej strony, na każdej z przekątnych musi znajdować się co najmniej jedno kółko, gdyż w przeciwnym razie gracz stawiający krzyżyki wygrałby. Wobec tego w narożnikach znajdują się dokładnie trzy lub dwa kółka. W obu przypadkach mamy dokładnie jedno możliwe wypełnienie planszy prowadzące do remisu. Każde z nich powstaje przez jeden z czterech możliwych obrotów plansz przedstawionych na Rysunkach 2 i 3 (obie plansze mają oś symetrii).



Rysunek 2



Rysunek 3

Przypadki „kółko-kółko” i „kółko-krzyżyk” są analogiczne do przypadków omówionych powyżej. Wobec tego łączna liczba plansz prowadzących do remisu wynosi $2(8+4+4)=32$.

Zadanie 40. Znajdź największą liczbę całkowitą dodatnią a, dla której nie istnieje liczba całkowita dodatnia b, spełniająca

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}.$$

Wynik. 32

Rozwiązanie. Odwracając podane nierówności dostajemy

$$0{,}72 < \frac{b}{a} < 0{,}75.$$

Przedział pomiędzy 0,72 a 0,75 ma długość $0{,}03 > \frac{1}{34}$, więc dla wszystkich $a \geq 34$ istnieje liczba całkowita dodatnia b, spełniająca podany warunek. Dla $a = 33$ istnieje rozwiązanie $b = 24$ (dające $\frac{b}{a} = 0{,}7272\ldots$). Dla $a = 32$ nie ma rozwiązania, ponieważ $\frac{24}{32} = 0{,}75$ i $\frac{1}{32} > 0{,}03$.

Zadanie 41. Podczas liczącej 110 kilometrów wycieczki rowerowej z Krakowa do Częstochowy, Henryk i Ewa mają do pokonania trzy wzgórza. Tuż przed startem, niezawodny w rachunkach Henryk powiedział: „Jeśli pomnożymy przez siebie trzy odległości z Krakowa do szczytu każdego ze wzgórz, otrzymamy wielokrotność 2261”. Po chwili namysłu Ewa zauważyła: „Ponadto, wielokrotność 2261 dostaniemy, gdy pomnożymy odległości do szczytów mierzone od Częstochowy”. Po przejechaniu 80 kilometrów, Henryk, z wyraźną ulgą, rzucił: „Jeszcze tylko jeden szczyt przed nami, zaraz dotrzemy do celu”. Zakładając, że wszystkie odległości (liczone w kilometrach) są liczbami całkowitymi, wyznacz, jak daleko od Krakowa znajduje się każdy ze szczytów.

Wynik. 68, 76, 91

Rozwiązanie. Oznaczmy przez A, B, i C odległości od Krakowa do trzech szczytów. Z treści zadania wiemy, że spełnione są warunki $2261 \mid ABC$ oraz $2261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Ponieważ rozkład 2261 na czynniki pierwsze to $2261 = 7 \cdot 17 \cdot 19$, a $7 \cdot 17 = 119 > 110$, żadna z liczb A, B, C nie może być jednocześnie podzielna przez więcej niż jeden z tych czynników.

Bez straty ogólności, przyjmijmy, że $7 \mid A$, $17 \mid B$, a $19 \mid C$. Podobne rozważanie możemy zaaplikować do liczb $110-A$, $110-B$ i $110-C$. Po pierwsze, 7 musi dzielić dokładnie jedną z liczb $110-B$, $110-C$, gdyż $7 \nmid (110-A)$. Zakładając, że $7 \mid 110-B$, dostajemy, że $19 \mid 110-A$ (gdyż 19 na pewno nie dzieli $110-C$), a ponadto $17 \mid 110-C$. Analogicznie, gdy $7 \mid 110-C$, wnioskujemy, że $17 \mid 110-A$ i $19 \mid 110-B$.

Zauważmy, że jedyny sposób na przedstawienie liczby 110 w postaci $7a+19b$, gdzie a i b są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to $110 = 7 \cdot 13 + 19 \cdot 1$. Podobnie, dostajemy jedyne przedstawienia $110 = 17 \cdot 4 + 7 \cdot 6$ i $110 = 19 \cdot 4 + 17 \cdot 2$. Wracając do poprzednio uzyskanych kombinacji podzielności: łącząc $19 \mid 110-A$ i $7 \mid A$, możemy zapisać, że $110 = 19b + A = 19b + 7a$ (dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a i b), co już jednoznacznie wyznacza $A = 7 \cdot 13$. Kontynuując, otrzymujemy dwa potencjalne zestawy rozwiązań:

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

oraz

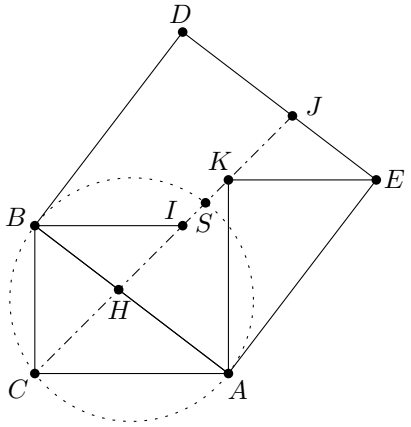
$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

Uwaga Henryka sugeruje, że trzeci szczyt znajduje się co najmniej 80 kilometrów od Krakowa, co eliminuje drugą z możliwości. Ostatecznie, szukane odległości to 68, 76 i 91.

Zadanie 42. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C, przy czym $AC = 4 - \sqrt{3}$ i $BC = \sqrt{3}$. Ponadto D i E są takimi punktami, że $ABDE$ jest kwadratem niezawierającym punktu C w jego wnętrzu, a punkt J jest punktem na odcinku DE takim, że $\angle ACJ = 45°$. Punkt K leży na odcinku CJ, przy czym $AK \parallel BC$. Ile wynosi pole trójkąta JKE?

Wynik. $3\sqrt{3}/8$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $AK = AC$, $AE = AB$ oraz $\angle EAK = \angle BAC$, a więc trójkąty AEK i ABC są przystające. Środek S kwadratu $ABDE$ leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, ponieważ ASB i ACB są kątami prostymi. Skoro $AS = BS$, to kąty wpisane ACS i BCS także są równe. Wobec tego S leży na dwusiecznej CJ. Odbijmy trójkąt JKE względem S; wówczas E przechodzi na B, J przechodzi na H, czyli na punkt przecięcia AB i CJ, oraz K przechodzi na punkt I, który leży na CJ i spełnia zależność $\angle IBC = 90°$.



Trójkąt IBC jest równoramiennym trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku B, zatem jego pole wynosi $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. Oznaczając przez kwadratowe nawiasy pole trójkąta, mamy

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{IC}{IH} = \frac{IH + HC}{IH} = 1 + \frac{HC}{IH}.$$

Ponadto, trójkąty ACH i BIH są podobne, a skala podobieństwa jest równa

$$\frac{HC}{IH} = \frac{AC}{IB} = \frac{AC}{BC}.$$

Wnioskujemy, że

$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{BC}{AC + BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Zadanie 43. Dwaj więźniowie stoją przed dwoma pudełkami. Wiedzą oni, że jedno pudełko zawiera dwie białe kulki i jedną czarną, a drugie pudełko — jedną białą kulkę i dwie czarne. Jednakże, nie wiedzą oni, które pudełko skrywa którą zawartość. Każdy więzień musi wybrać pudełko i wyjąć z niego losową kulkę (bez zwracania kulki z powrotem do pudełka). Jeśli więzień wyciągnie białą kulkę, zostaje uwolniony; w przeciwnym razie zostaje stracony. Załóżmy, że drugi więzień widzi, które pudełko wybrał pierwszy więzień i jaką kulkę wyciągnął, oraz że na tej podstawie drugi więzień wybiera pudełko w najbardziej korzystny dla siebie sposób. Jakie jest prawdopodobieństwo uwolnienia drugiego więźnia zanim pierwszy więzień wyciągnie kulkę? Zakładamy, że pierwszy więzień wybiera pudełko losowo.

Wynik. $5/9$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez c kolor kulki wyciągniętej przez pierwszego więźnia, a przez o pozostały kolor. Wówczas prawdopodobieństwo, że wyciągnął on kulkę z pudełka zawierającego kulki o kolorach c, c, o wynosi $2/3$, a prawdopodobieństwo, że wyciągnął on kulkę z pudełka zawierającego kulki o kolorach c, o, o wynosi $1/3$. Jeśli drugi więzień wybierze to samo pudełko co pierwszy więzień, wyciągnie on kulkę w kolorze c z prawdopodobieństwem

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$

i wobec tego kulkę w kolorze o wyciągnie z prawdopodobieństwem

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Z drugiej strony, jeśli drugi więzień wybierze drugie pudełko, wyciągnie on kulkę w kolorze c z prawdopodobieństwem

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

a kulkę w kolorze o z prawdopodobieństwem

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Jeżeli c jest kolorem białym, drugi więzień zostanie uwolniony jeśli wyciągnie kulkę w kolorze c. Ponieważ $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, rozsądniej dla niego jest wybrać drugie pudełko, i wówczas zostanie on uwolniony z prawdopodobieństwem $\frac{4}{9}$. Jeżeli c jest czarnym kolorem, drugi więzień zostanie uwolniony jeśli wyciągnie kulkę w kolorze o. Ponieważ $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, rozsądniej dla niego jest wybrać to samo pudełko, i wówczas zostanie on uwolniony z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Oczywiście c jest kolorem białym z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ oraz kolorem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, zatem drugi więzień zostanie uwolniony z prawdopodobieństwem

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Zadanie 44. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna n taka, że wśród dowolnych n liczb rzeczywistych (niekoniecznie różnych) z przedziału $[1, 2019]$ będą trzy mogące być bokami niezdegenerowanego trójkąta?

Wynik. 18

Rozwiązanie. Dla $n < 18$ weźmy pierwsze n elementów ciągu Fibonacciego określonego jako $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$. Oczywiście w dowolnej trójce liczb z tego ciągu największa z nich jest większa lub równa sumie dwóch pozostałych, zatem żadna z takich trójek nie może być długościami boków niezdegenerowanego trójkąta. Dla $n = 18$, niech $x_1 \leq \ldots \leq x_{18}$ będą wybranymi liczbami. Jeżeli żadne trzy nie spełniają nierówności trójkąta to x_1, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2$, $x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3$, ... W każdym kroku możemy szacować przez wyraz ciągu Fibonacciego, na końcu dostaniemy więc $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, co jest niemożliwe. Szukaną liczbą jest zatem $n = 18$.

Zadanie 45. Niech $\sigma(k)$ oznacza liczbę wszystkich (dodatnich) dzielników liczby całkowitej dodatniej k. Znajdź najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią n, że największy wspólny dzielnik liczb $\sigma(n)$ i $\sigma(n^3)$ nie jest potęgą dwójki o nieujemnym wykładniku.

Wynik. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$$

jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze to

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_t + 1).$$

Warunek zadania, że największy wspólny dzielnik nie jest potęgą dwójki jest równoważny temu, że istnieje nieparzysta liczba pierwsza q, dzieląca zarówno $\sigma(n)$ jak i $\sigma(n^3)$. Ponieważ

$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (3\alpha_t + 1)$$

to ta liczba nie jest podzielna przez 3, więc najmniejszą możliwą wartością q jest 5. Dalej, zauważmy, że q nie może dzielić jednocześnie $\alpha_i + 1$ i $3\alpha_i + 1$ ponieważ w przeciwnym wypadku musiałoby dzielić również liczbę

$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2.$$

Zatem istnieją różne $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ takie, że $q \mid \alpha_i + 1$ i $q \mid 3\alpha_j + 1$. Ponieważ szukamy najmniejszej możliwej liczby n to możemy założyć, że $t = 2$, $i = 1$ i $j = 2$.

Jeśli $q = 5$ to najmniejsze możliwe wartości α_1i α_2 to $\alpha_1 = 4$ i $\alpha_2 = 3$, a biorąc najmniejsze możliwe liczby pierwsze czyli $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$, dostajemy $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Jeśli $q \geq 7$ to $\alpha_1 \geq 6$ i $\alpha_2 \geq 2$, czyli

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432,$$

co oznacza, że liczba 432 jest najmniejszą możliwą wartością liczby n, spełniającą warunki zadania.

Zadanie 46. Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C, przy czym $AC = 15$ i $BC = 20$. Niech D będzie punktem na prostej AB takim, że $CD \perp AB$. Okrąg t wpisany w trójkąt ACD jest styczny do prostej CD w punkcie T. Okrąg c jest styczny do prostej CD w punkcie T oraz do odcinka BC. Oznaczmy punkty przecięcia okręgu c z prostą AB przez X i Y. Ile wynosi długość odcinka XY?

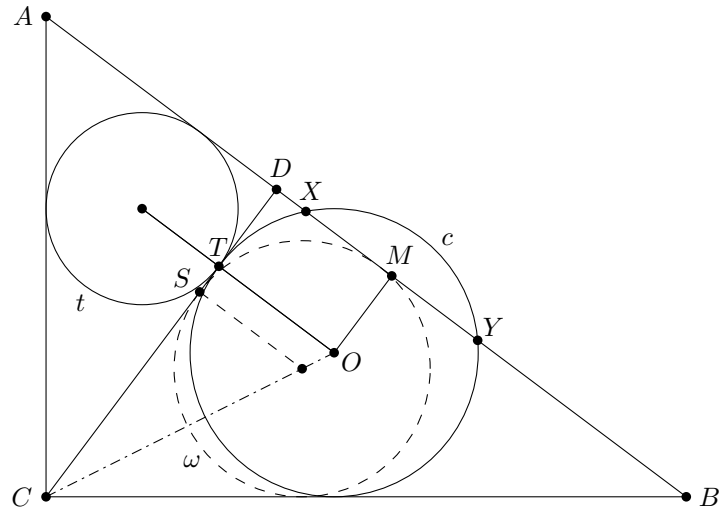
Wynik. $3\sqrt{5}$

Rozwiązanie. Korzystając z podobieństw $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$, obliczamy

$$AD = \frac{AC^2}{AB} = 9, \quad BD = \frac{BC^2}{AB} = 16, \quad CD = \sqrt{AD \cdot BD} = 12.$$

Promień okręgu t, równy DT, można obliczyć dzieląc pole trójkąta ACD przez połowę jego obwodu. Otrzymujemy $DT = 54/(36/2) = 3$. Niech okrąg ω, wpisany w trójkąt BCD, będzie styczny do prostej CD w punkcie S. Podobnie jak wcześniej, obliczamy jego promień równy $DS = 4$. Jednokładność o środku w C i skali $CT/CS = 9/8$ przekształca okrąg ω na okrąg c. Zatem promień okręgu c jest równy $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Niech M będzie środkiem odcinka XY i niech O będzie środkiem okręgu c. Wiemy, że $XO = 9/2$ oraz $OM = DT = 3$. Stąd, używając twierdzenia Pitagorasa uzyskujemy

$$XY = 2 \cdot XM = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Zadanie 47. Każde pole szachownicy o wymiarach 6×7 zostało pokolorowane na jeden z czterech kolorów: biały, zielony, czerwony lub niebieski. Powiemy, że dane kolorowanie jest *atrakcyjne*, jeśli wszystkie pola dowolnego kwadratu 2×2 na tej szachownicy mają parami różne kolory. Wyznacz liczbę atrakcyjnych kolorowań.

Wynik. 1128

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że ponieważ oczywiście dowolne dwa pole szachownicy stykające się bokiem mają różne kolory to jeśli pola w danym rzędzie są pokolorowane na więcej niż 2 kolory, to istnieją trzy kolejne pola w tym rzędzie pokolorowane na trzy różne kolory. Zauważmy ponadto, że taka trójka wyznacza jednoznacznie kolory odpowiadających trzech kolumn, tzn. trójka $1 - 2 - 3$ wymusza by pionowo sąsiadująca z nią trójka miała kolory $3 - 4 - 1$ i te dwie trójki na zmianę muszą wypełnić

odpowiednie trzy kolumny, powodując, że w tych kolumnach znajdą się dokładnie dwa kolory. To samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla kolumn zamiast rzędów. Widzimy też, że jeśli w danej kolumnie są dokładnie dwa kolory, to we wszystkich kolumnach są dokładnie dwa kolory i tak samo z wierszami. Zatem nie może być więcej niż dwóch kolorów w pewnym rzędzie i pewnej kolumnie jednocześnie.

Załóżmy teraz, że szachownica ma 6 rzędów i 7 kolumn. Policzmy liczbę kolorowań, w których w każdym rzędzie znajdują się dokładnie dwa kolory: wybieramy dwa kolory dla pierwszego wiersza (wtedy para kolorów dla każdego innego wiersza jest wyznaczona jednoznacznie) i wybierzmy wtedy kolor dla pierwszego pola w każdym z sześciu wierszy. To daje nam $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ kolorowań. Analogicznie liczba kolorowań, w których w każdej kolumnie znajdują się dokładnie dwa kolory jest równa $6 \cdot 2^7$. Teraz, musimy odjąć jeszcze liczbę kolorowań, w których zarówno w każdym rzędzie jak i w każdej kolumnie znajdują się dokładnie dwa kolory. Takie kolorowanie jest wyznaczone jednoznacznie przez lewy górny kwadrat 2×2, więc jest dokładnie $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ takich kolorowań.

Zatem odpowiedzią jest $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$.

Zadanie 48. Sto dzieci stoi w rzędzie. Pierwsze dziecko ma 4 gramy czekolady, drugie dziecko ma 8 gramów czekolady, i tak dalej, setne dziecko ma 400 gramów czekolady. Pierwsze dziecko przekazuje jedną trzecią posiadanej czekolady drugiemu dziecku (tak więc drugie dziecko ma teraz $\frac{28}{3}$ gramów czekolady). Drugie dziecko przekazuje trzeciemu dziecku jedną trzecią posiadanej czekolady, i tak dalej aż dziewięćdziesiąte dziewiąte dziecko przekaże jedną trzecią posiadanej czekolady setnemu dziecku. Ile gramów czekolady będzie na końcu posiadało setne dziecko?

Wynik. $597 + 3^{-99}$

Rozwiązanie. Po pierwszym kroku drugie dziecko ma $8 + 4/3$ gramów czekolady. W drugim kroku, przekazuje ono jedną trzecią posiadanej czekolady trzeciemu dziecku, które w rezultacie ma już $12 + 8/3 + 4/3^2$ gramów czekolady. Po trzecim kroku czwarte dziecko ma sumarycznie $16 + 12/3 + 8/3^2 + 4/3^3$ gramów czekolady. Łatwo zauważyć, że na końcu setne dziecko będzie miało

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right)$$

gramów czekolady. Oznaczmy

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{98}} + \\ & \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \\ & + 1. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego, otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right),$$

zatem

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \ldots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \ldots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ostatecznie, uzyskujemy

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Zadanie 49. Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geq 3$, dla których liczba

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

jest całkowita.

Wynik. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Rozwiązanie. Liczba n ma spełniać

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1).$$

Możemy dodać $(n-2)^2$ do prawej strony i w ten sposób pozbyć się wyrażenia n^2. Po skorzystaniu z faktu, że $n^2 - 4n + 4 - n^2 = -4(n-1)$ otrzymujemy równoważny warunek

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Ponieważ $n-1$ i $n-2$ są względnie pierwsze, możemy podzielić prawą stronę przez $n-1$. Po podstawieniu $t = n-2$ otrzymujemy $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. Korzystając ze wzoru dwumianowego dostajemy

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \ldots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015,$$

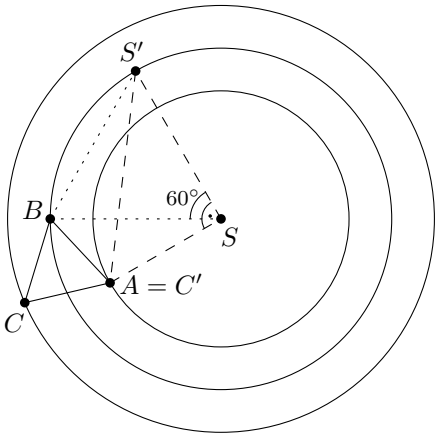
więc wystarczy znaleźć liczby t, które spełniają $t^2 \mid 2016$. Skoro $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, jedynymi możliwymi wartościami t spełniającymi warunki zadania są 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Podstawiając $n = t + 2$ otrzymujemy rozwiązania 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Zadanie 50. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, którego wierzchołki leżą na różnych współśrodkowych okręgach o promieniach odpowiednio 3, 4 i 5. Znajdź wszystkie możliwe wartości długości boków trójkąta ABC.

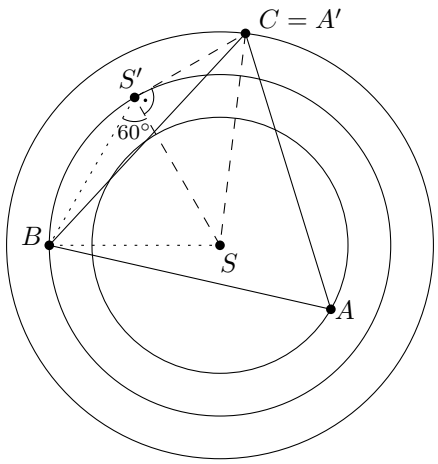
Wynik. $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

Rozwiązanie. Niech A leży na okręgu o promieniu 3, B na okręgu o promieniu 4, C na okręgu o promieniu 5 i niech S będzie wspólnym środkiem tych okręgów. Do rozważenia są dwa przypadki.

Załóżmy, że S leży na zewnątrz trójkąta ABC. Obracając C i S o $60°$ wokół B otrzymujemy punkty $C' = A$ i S'. Wówczas trójkąt SBS' jest równoboczny i ma bok długości 4 oraz $S'C' = SC = 5$. Trójkąt $SS'C'$ ma boki długości 3, 4, 5, więc $\angle S'SC' = 90°$. Zatem $\angle BSA = \angle S'SC' - \angle S'SB = 30°$. Wykorzystując twierdzenie kosinusów w trójkącie BSA otrzymujemy $AB = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.



Jeżeli S leży wewnątrz trójkąta ABC, możemy obrócić A i S o $60°$ wokół B otrzymując punkty $A' = C$ i S'. Podobnie jak w pierwszym przypadku, trójkąt $SS'A'$ jest prostokątny, przy czym $\angle SS'A' = 90°$. Wobec tego $\angle BSA = \angle BS'A' = \angle SS'A' + \angle S'SB = 150°$. Korzystając z twierdzenia kosinusów dla trójkąta BSA otrzymujemy drugie rozwiązanie $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



Zadanie 51. Siedem osób siedzi (w równych odstępach) wokół okrągłego stołu, na którym narysowanych jest siedem strzałek w taki sposób, że z każdego miejsca do siedzenia wychodzi dokładnie jedna strzałka i każde miejsce jest wskazywane przez dokładnie jedną strzałkę (strzałka może zaczynać i kończyć się na tym samym miejscu). Co minutę, osoby przesiadają się, wstając z obecnego miejsca i siadając na miejscu wskazywanym przez ich strzałkę, a następnie stół jest obracany o jedno miejsce zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Jaka jest największa możliwa liczba minut, po upływie której wszystkie osoby po raz pierwszy jednocześnie usiądą na swoich początkowych miejscach?

Wynik. 84

Rozwiązanie. Zauważmy, że co siedem minut osoby zmieniają swoje miejsca, a stół wraca do swojej pozycji początkowej. Wobec tego widzimy, że patrząc na co siódmą minutę, osoby po prostu zmieniają swoje miejsca tak jak w zwyczajnej permutacji. Najmniejsza liczba razy możliwych aplikacji permutacji na zbiorze o siedmiu elementach zanim elementy powrócą na swoje początkowe pozycje (tzw. *rząd* permutacji) może być równa co najwyżej 12. Liczba ta jest osiągana dla permutacji permutującej elementy w następujący sposób:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4.$$

W ogólności, rząd jest najmniejszą wspólną wielokrotnością długości cykli w rozkładzie o powyższej postaci; łatwo zauważyć, że 12 to w istocie największy możliwy rząd. To daje ograniczenie górne $7 \cdot 12 = 84$ minut potrzebnych aby osoby powróciły na swoje miejsca.

Jeśli strzałki są narysowane tak, że na początku tylko osoby 1 i 4 zmieniają swoje miejsca, to po siedmiu minutach osoby są spermutowane zgodnie z poniższą permutacją:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4,$$

zatem jeśli rozważać będziemy tylko co siódmą minutę, to procedura ta w rzeczy samej zajmie 84 minuty. Pozostaje zauważyć, że osoby nie mogą powrócić do początkowych pozycji w międzyczasie. Co siódmą minutę miejsca 1, 2 i 3 są zajmowane przez osoby, które siedziały na nich na samym początku (być może przepermutowane), ale w ciągu kolejnych sześciu minut przynajmniej jedna z tych osób siada na jednym z pozostałych czterech miejsc.

Zadanie 52. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Zaczynając od a_2, każdy wyraz ciągu jest połową sumy średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej dwóch sąsiadujących wyrazów. Znajdź a_{333}, jeśli $a_1 = \frac{2}{7}$ i $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Uwaga: Średnia geometryczna dodatnich liczb rzeczywistych x i y to $\sqrt{xy}$.

Wynik. 2016

Rozwiązanie. Warunek z zadania sprowadza się do

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4}$$

dla każdego $k \geq 2$. Ponieważ wyrazy ciągu są dodatnie, możemy zapisać ten warunek jako

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Z tego wynika, że ciąg $b_1, b_2, \ldots$, gdzie $b_k = \sqrt{a_k}$ jest ciągiem arytmetycznym; oznaczmy przez r różnicę tego ciągu. Wiemy, że $b_1 = \sqrt{2/7}$ oraz $b_{11} = \sqrt{7/2}$, więc

$$r = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Wyliczamy

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot r = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4+332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}.$$

Zatem $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Zadanie 53. Mikołaj ma prostokąt o obwodzie 444 i bokach będących dodatnimi liczbami całkowitymi a i b takimi, że $a > b$. Spróbował pokryć go kwadratami o boku długości $a - b$ w następujący sposób. Pierwszy kwadrat położył w lewym górnym rogu. Następnie układał kwadratową kratę o osiach równoległych do boków prostokąta zaczynając od kwadratu znajdującego się w lewym górnym rogu. W pewnym momencie (po położeniu co najmniej jednego kwadratu) musiał zakończyć, ponieważ nie dało się już dołożyć żadnego kwadratu tak, aby w całości leżał wewnątrz prostokąta. Pole niepokrytej części prostokąta wynosi 1296. Wyznacz sumę wszystkich różnych możliwych długości boku kwadratu użytego do wypełnienia prostokąta.

Wynik. 166

Rozwiązanie. Niech $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$, gdzie $0 \leq r \leq a - b - 1$. Wtedy pole niepokrytej części to $ra + rb - r^2 = -r^2 + 222r = 1296$, co jest równoznaczne z $(r-6)(r-216) = 0$. Oczywiście $a > r$ i $b > r$, skąd otrzymujemy $r = 6$. Usuńmy niepokrytą powierzchnię. Niech $x = a - r$ oraz $y = b - r$. Wtedy otrzymujemy prostokąt o polu $x \times y$ pokryty przez kwadraty o polu $(x-y) \times (x-y)$ (ponieważ $x - y = a - b$) oraz $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ponadto $x - y$ musi dzielić zarówno x jak i y, więc dzieli też $x + y$. Wybierzmy d takie, że $d \mid 210$ oraz $x - y = d$. Wtedy korzystając z równości $x + y = 210$ można wyznaczyć x i y:

$$x = \frac{210+d}{2}, \quad y = \frac{210-d}{2}.$$

Ponieważ rozwiązania muszą być dodatnimi liczbami całkowitymi (dodatnimi, ponieważ istnieje co najmniej jeden kwadrat o boku długości $a - b = x - y$) oraz $x - y > 6$ (z maksymalności pokrycia), można zauważyć, że d wyznacza rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy jest parzystym dzielnikiem 210 oraz spełnia $6 < d < 210$. A zatem d jest jedną z liczb: 10, 14, 30, 42, 70, których suma wynosi 166.

Zadanie 54. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy przez A', B', C' punkty przecięcia prostych AP, BP, CP z bokami BC, CA, AB odpowiednio. Załóżmy, że

$$A'P = B'P = C'P = 3$$

oraz

$$AP + BP + CP = 25.$$

Wyznacz $AP \cdot BP \cdot CP$.

Wynik. 279

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Niech

$$a = AP, \quad b = BP, \quad c = CP.$$

Wtedy

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{PA'}{AA'} = \frac{3}{a+3}$$

oraz analogicznie

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Co więcej, $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$, zatem

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1,$$

co po wymnożeniu mianowników i uproszczeniu równania daje

$$54 + 9(a+b+c) = abc.$$

Wynik $abc = 279$ otrzymujemy po podstawieniu $a+b+c = 25$.

Zadanie 55. Na okręgu c leży czternaście punktów $A_1, \ldots, A_{14}$ w tej kolejności przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przy czym żadne trzy odcinki o końcach w tych punktach nie przecinają się we wnętrzu c. Krystyna narysowała wszystkie te odcinki, ale potem uznała, że na rysunku nic nie widać i zdecydowała się usunąć wszystkie boki i przekątne siedmiokątów $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ oraz $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$. Na ile obszarów pozostałe odcinki dzielą wnętrze c?

Wynik. 295

Rozwiązanie. Rozważmy, co się dzieje, gdy dodajemy po kolei odcinki do rysunku. Łatwo widać, że gdy dodajemy odcinek, liczba obszarów rośnie o 1 + liczbę odcinków już narysowanych, które przecina nowy odcinek. Zatem szukana liczba obszarów to

$$1 + \text{liczba odcinków} + \text{liczba przecięć odcinków}.$$

Nazwijmy punkty $A_1, A_3, \ldots, A_{13}$ *nieparzystymi*, a pozostałe *parzystymi*. Odcinki na rysunku to dokładnie te, które łączą pewien nieparzysty punkt z pewnym parzystym punktem, więc jest ich $7 \cdot 7 = 49$. Aby obliczyć liczbę przecięć odcinków, zauważmy, że końce przecinających się odcinków muszą leżeć na okręgu w kolejności: nieparzysty, nieparzysty, parzysty, parzysty. Z drugiej strony, każda taka czwórka punktów wyznacza jednoznacznie punkt przecięcia odcinków, zatem musimy obliczyć liczbę takich czwórek. Bez straty ogólności załóżmy, że A_1 jest pierwszym nieparzystym punktem z czwórki w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Podzielmy punkty na siedem par $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$ i zauważmy, że pozostałe trzy punkty muszą należeć do różnych par. Z drugiej strony, każdy wybór trzech par wyznacza szukaną czwórkę punktów: z pierwszej pary wybierzmy nieparzysty punkt, a z pozostałych dwóch parzyste punkty. Ponieważ pierwszy nieparzysty punkt możemy wybrać na siedem sposobów, dostajemy w sumie

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

przecięć. Zatem okrąg jest podzielony na $1 + 49 + 245 = 295$ obszarów.

Zadanie 56. Wyznacz liczbę uporządkowanych czwórek (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych spełniających

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{and} \quad ab = cd.$$

Wynik. 800

Rozwiązanie. Mnożąc pierwsze równanie stronami przez a i podstawiając drugie równanie, otrzymujemy

$$(a+c)(a+d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a,$$

przy czym liczby 5 i 101 są pierwsze. Ponieważ obydwa nawiasy są większe od a, jeden z nich musi być równy $5k$, a drugi równy $101l$, przy czym $kl = a$. Niech $a+c = 5k$ oraz $a+d = 101l$ dla pewnych ustalonych k, l spełniających $kl = a$. Wtedy $c = k(5-l)$, $d = l(101-k)$ oraz $b = 505 - a - d - c = (101-k)(5-l)$. Łatwo sprawdzamy, że czwórka

$$(a, b, c, d) = (kl, (101-k)(5-l), k(5-l), l(101-k))$$

spełnia warunek $ab = cd$ i jest poprawnym rozwiązaniem danego układu równań dla dowolnych $l = 1, 2, 3, 4$ oraz $k = 1, 2, \ldots, 100$. W ten sposób otrzymujemy 400 parami różnych rozwiązań, gdyż jeśli dwie pary (k_1, l_1) oraz (k_2, l_2) dają te same rozwiązanie opisane powyżej, to wtedy $k_1 l_1 = k_2 l_2$ i $(5-l_1)k_1 = (5-l_2)k_2$ implikuje $k_1 = k_2$ i $l_1 = l_2$. Podobnie w przypadku $a + c = 101l$ i $a + d = 5k$ otrzymujemy 400 parami różnych rozwiązań

$$(a, b, c, d) = (kl, (101-k)(5-l), l(101-k), k(5-l))$$

dla każdych $l = 1, 2, 3, 4$ i $k = 1, 2, \ldots, 100$. Żadne rozwiązanie z drugiego przypadku nie pokrywa się z rozwiązaniem z pierwszego przypadku, gdyż $5k = a + c = 101l$ nie zachodzi dla żadnych rozważanych k, l. Zatem w sumie otrzymujemy $400 + 400 = 800$ rozwiązań.