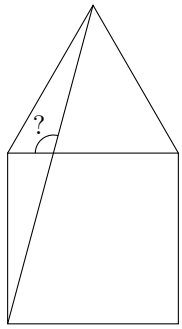
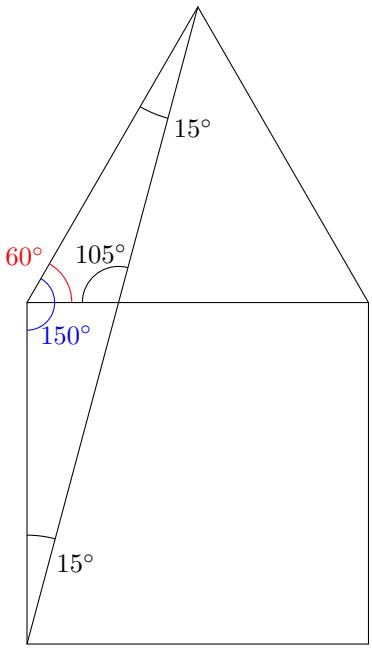
**Zadanie 1.** Schemat domu składa się z kwadratu i trójkąta równobocznego o tej samej długości boku. Jaka jest miara w stopniach zaznaczonego kąta?




*Wynik.* $105°$

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że dorysowany odcinek jest podstawą trójkąta równoramiennego o miarach kątów równych $150°$, $15°$ i $15°$. Szukana miara kąta wynosi więc $180° - 60° - 15° = 105°$.




**Zadanie 2.** Członkowie klubu sportowego stoją w rzędzie pozując do fotografii i każdy z nich ma na sobie klubową bluzę. Bluzy są ponumerowane różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Fotograf zauważył, że zawodnik stojący najbardziej po prawej ma numer 72 i numer każdego zawodnika dzieli numer zawodnika stojącego po jego prawej z perspektywy fotografa. Ilu maksymalnie sportowców może stać w rzędzie?

*Wynik.* 6

*Rozwiązanie.* Zaczynamy od znajdującego się najbardziej po prawej numeru 72 i idziemy w lewo. Wtedy każda kolejna liczba jest równa poprzedniej podzielonej przez pewną liczbę całkowitą $n > 1$. Skoro $72 = 2^3 \cdot 3^2$ i w każdej kolejnej liczbie wykładnik przy pewnym czynniku pierwszym spada, to nie możemy mieć więcej niż $1 + 3 + 2 = 6$ zawodników. Jest to osiągalne np. dla ciągu $1, 2, 4, 8, 24, 72$.

**Zadanie 3.** W pewnej orkiestrze smyczkowej każdy z członków potrafi grać na skrzypcach lub na altówce i dokładnie jedna czwarta wszystkich członków grupy potrafi grać na obu tych instrumentach. Ponadto wiemy, że dokładnie 32 osoby potrafią grać na skrzypcach i dokładnie 23 osoby potrafią grać na altówce. Ilu członków liczy orkiestra?

*Wynik.* 44

*Rozwiązanie.* Niech $n$ będzie szukaną liczbą muzyków. Dodając do siebie 23 i 32, otrzymujemy łączną liczbę muzyków, ale licząc podwójnie wszystkich tych, którzy grają na obu instrumentach. Ponieważ takich osób jest dokładnie $n/4$, wnioskujemy, że

$$23 + 32 = 55 = n + \tfrac{n}{4} = \tfrac{5}{4}n,$$

więc $n = 44$.

**Zadanie 4.** Andrzej pomnożył pięć kolejnych dodatnich liczb całkowitych, otrzymując w wyniku liczbę $C$. Łukasz zrobił to samo, ale zaczynając od liczby o jeden większej, wskutek czego otrzymał iloczyn $D$. Ile wynosił najmniejszy z czynników Łukasza, jeśli wiemy, że $C/D = 4/5$?

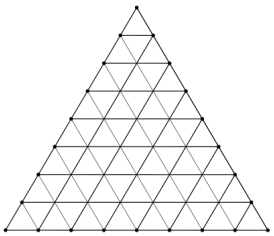
*Wynik.* 21

*Rozwiązanie.* Niech $n$ będzie pierwszą z liczb Andrzeja, wówczas $C = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Łukasz zaczął od liczby $n+1$, a zatem $D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Mamy więc

$$\frac{4}{5} = \frac{C}{D} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Rozwiązując to równanie względem $n$, otrzymujemy $n = 20$. Zatem najmniejszy z czynników Łukasza wynosi 21.

**Zadanie 5.** W każdy z małych trójkątów na poniższym rysunku wpisano liczbę małych trójkątów sąsiadujących z nim krawędzią. Wyznacz sumę wszystkich liczb wpisanych na rysunku.



*Wynik.* 168

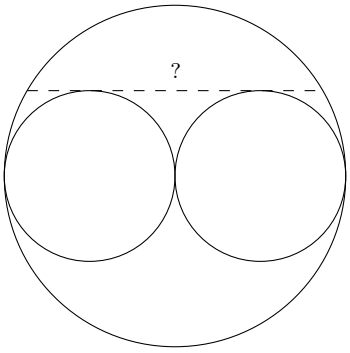
*Rozwiązanie.* Na rysunku znajduje się 18 brzegowych trójkątów z dwoma sąsiadami i 3 trójkąty z tylko jednym sąsiadem. Pozostałe $64 - 18 - 3 = 43$ trójkąty mają po trzech sąsiadów, a zatem szukana suma wynosi $3 \cdot 43 + 2 \cdot 18 + 3 = 168$.

**Zadanie 6.** Wyznacz największą dodatnią liczbę całkowitą $n$, dla której liczba $n^2 - 5n + 6$ jest pierwsza.

*Wynik.* 4

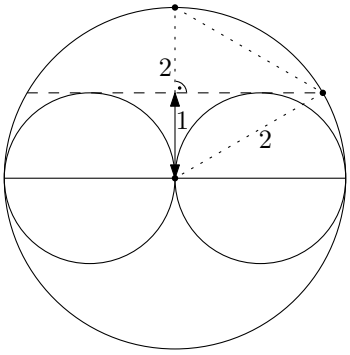
*Rozwiązanie.* Liczba $n(n-5)$ jest iloczynem liczby parzystej i nieparzystej, więc $n^2 - 5n + 6 = n(n-5) + 6$ jest liczbą parzystą dla dowolnej liczby całkowitej $n$. Ponieważ jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, to musimy mieć $n^2 - 5n + 6 = 2$. Rozwiązując to równanie, otrzymujemy $n = 1$ lub $n = 4$. Zatem szukana największa liczba wynosi 4.

**Zadanie 7.** Dwa okręgi o promieniu 1 są styczne zewnętrznie i znajdują się wewnątrz większego okręgu, do którego również oba są styczne. Wyznacz długość zaznaczonego przerywaną linią odcinka, który jest styczny do obu małych okręgów, a którego końce znajdują się na dużym okręgu.




*Wynik.* $2\sqrt{3} \approx 3.46410$

*Rozwiązanie.*



Przerywany odcinek znajduje się w odległości 1 ponad poziomą średnicą dużego okręgu. Środek dużego okręgu, jeden z końców zaznaczonego odcinka oraz „najwyższy” punkt dużego okręgu tworzą trójkąt równoboczny o boku długości 2. Zatem długość przerywanego odcinka to podwojona długość wysokości w okręgu równobocznym o boku długości 2 – i może być wyliczona np. przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.

**Zadanie 8.** Czterech matematyków usiadło razem w restauracji i zamówiło miskę pełną obwarzanków. Dominik wyszedł na chwilę do toalety, a Adam, Beata i Czarek w międzyczasie zaczęli jeść obwarzanki. Co minutę zjadali oni jednego obwarzanka, dzieląc się nim po równo. Po pewnym czasie Dominik powrócił do stołu, i teraz wszyscy czworo kontynuowali jedzenie jednego obwarzanka co minutę. Tym razem jednak Dominik zjadał 2/5 każdego z obwarzanków, a pozostała trójka zjadała po 1/5 każdego z obwarzanków. Po pewnym czasie Adam zauważył, że Dominik zjadł tyle samo, co on. Jaki jest stosunek czasu, który Dominik spędził w toalecie, do czasu kiedy był przy stole i uczestniczył w posiłku?

*Wynik.* 3/5

*Rozwiązanie.* Niech $t_a$ oznacza długość czasu, przez który Dominik był w toalecie, a $t_p$ niech oznacza długość czasu, przez który Dominik uczestniczył w posiłku. Adam i Dominik zjedli tyle samo obwarzanków, a zatem

$$\frac{2}{5}t_p = \frac{1}{3}t_a + \frac{1}{5}t_p \Rightarrow \frac{t_a}{t_p} = \frac{3}{5}.$$

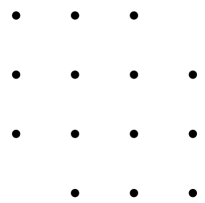
**Zadanie 9.** Kantor na warszawskiej Pradze oferuje następujące monety: koronę czeską za 40 gr, 2 korony za 50 gr, 5 koron za 1 zł, 10 koron za 2 zł, 20 koron za 4,10 zł i 50 koron za 9,90 zł. Jacek chce wymienić wszystkie swoje pieniądze w kwocie 11,80 zł na korony, ale nie chce kupować więcej niż jednej czeskiej monety tego samego rodzaju. Ile koron może uzyskać Jacek? Podaj sumę wszystkich rozwiązań.

*Wynik.* 58

*Rozwiązanie.* Problem sprowadza się do rozwiązania równania $11{,}8 = 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4{,}1 \cdot x_5 + 9{,}9 \cdot x_6$, gdzie wszystkie $x_i$ muszą być równe 0 lub 1.

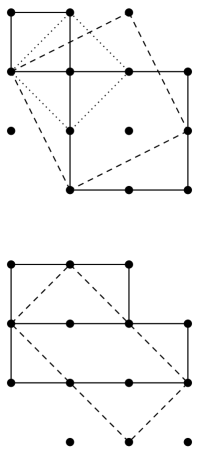
Skoro $0{,}4 + 0{,}5 + 1 + 2 + 4{,}1 < 11{,}8$, to $x_6$ musi być równe 1. Równanie zatem sprowadza się do $1{,}9 = 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4{,}1 \cdot x_5$. Ponieważ dla $x_4 = 1$ lub $x_5 = 1$ wydana kwota przekroczyłaby 11,80 zł, to musimy mieć $x_4 = x_5 = 0$. Skoro $0{,}4 + 0{,}5 + 1 = 1{,}9$, to jedynym rozwiązaniem jest $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 1$ and $x_5 = x_4 = 0$. Jacek kupi więc $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ koron czeskich.

**Zadanie 10.** Na kracie jednostkowej zaznaczono czternaście punktów jak na rysunku poniżej. Ile jest prostokątów, których wierzchołki znajdują się w zaznaczonych punktach?



*Wynik.* 27

*Rozwiązanie.* Istnieje siedem typów prostokątów o wierzchołkach w zaznaczonych punktach.



Na rysunku znajduje się kolejno: 7 kwadratów jednostkowych, 2 kwadraty o wymiarach $2 \times 2$, 4 kwadraty o boku jak kwadrat zaznaczony kropkowanymi liniami oraz 2 kwadraty o boku jak kwadrat zaznaczony linią przerywaną. Ponadto na rysunku znajduje się 8 prostokątów wymiaru $1 \times 2$, 2 prostokąty wymiaru $1 \times 3$ oraz 2 prostokąty przystające do prostokąta zaznaczonego linią przerywaną.

Łącznie na rysunku znajduje się więc $7 + 2 + 4 + 2 + 8 + 2 + 2 = 27$ prostokątów.

**Zadanie 11.** Znajdź taką dodatnią liczbę całkowitą $n$, że najmniejsza wspólna wielokrotność 60 i $n$ jest o 777 większa niż największy wspólny dzielnik 60 i $n$.

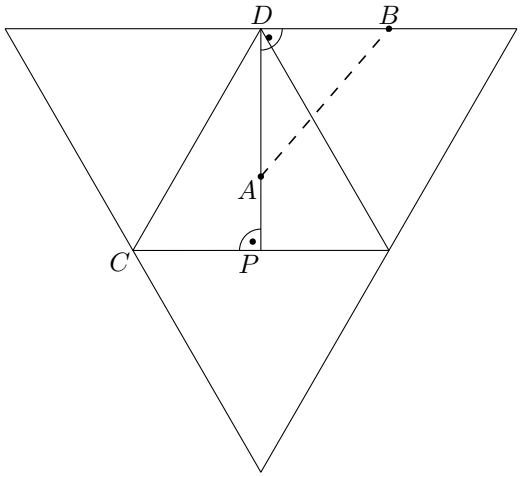
*Wynik.* 39

*Rozwiązanie.* Chcemy rozwiązać równanie $\mathrm{NWW}(60, n) = 777 + \mathrm{NWD}(60, n)$. Największy wspólny dzielnik musi dzielić 60, czyli być równy 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 20, 30 lub 60. Wśród tych dzielników, tylko liczba 3 może być dodana do 777 tak, by otrzymać wielokrotność 60. Zatem $\mathrm{NWD}(60, n) = 3$ i $\mathrm{NWW}(60, n) = 780$. Wynika stąd, że $60 \cdot n = \mathrm{NWD}(60, n) \cdot \mathrm{NWW}(60, n) = 3 \cdot 780$, więc $n = 39$.

**Zadanie 12.** Mrówka znajduje się na środku ściany czworościanu foremnego o krawędzi długości 1. Przemieszczając się po powierzchni czworościanu, chce ona dojść do środka dowolnej krawędzi, która nie należy do płaszczyzny ściany, na której się obecnie znajduje. Jaką, co najmniej, odległość musi pokonać?

*Wynik.* $\sqrt{7/12} \approx 0.76376$

*Rozwiązanie.*




Rozważmy siatkę tego czworościanu jak na rysunku powyżej. Mrówka znajduje się w punkcie $A$ i chce dostać się do punktu $B$. Ponieważ sprowadziliśmy problem do postaci dwuwymiarowej, najkrótsza droga będzie odcinkiem (zaznaczonym na rysunku linią przerywaną). Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $DCP$ mamy: $|PD|^2 = |CD|^2 - |CP|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4$, czyli $|PD| = \sqrt{3/4}$. Punkt $A$ jest środkiem ściany, więc

$$|AD| = \frac{2}{3}|PD| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Z treści zadania mamy natomiast $|DB| = 1/2$, zatem używając ponownie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

stąd

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.76376.$$

**Zadanie 13.** Agnieszka, Beata, Cecylia i Dorota wylosowały w pewien sposób liczby 3, 6, 9 and 12 (żadna z liczb nie została wylosowana przez więcej niż jedną z kobiet). Wiadomo, że dwie z kobiet zawsze kłamią, a dwie zawsze mówią prawdę. Wygłosiły one następujące stwierdzenia:

- Agnieszka: Moja liczba jest dwukrotnie większa od liczby Doroty.
- Beata: Moja liczba jest trzykrotnie większa od liczby Doroty.
- Cecylia: Moja liczba jest czterokrotnie większa od liczby Doroty.
- Dorota: Moja liczba nie jest najmniejsza.

Ile wynosi iloczyn liczb wylosowanych przez kłamczuchy?

*Wynik.* 27

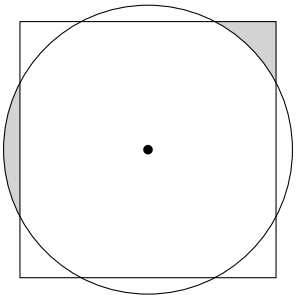
*Rozwiązanie.* Gdyby Dorota wylosowała 3, oznaczałoby to, że kłamie. Zatem dokładnie jedna z pozostałych musiałaby kłamać, co nie jest możliwe, bo oznaczałoby, że dwie z kobiet wylosowały tę samą liczbę. Gdyby Dorota wylosowała 9 lub 12, oznaczałoby to, że wszystkie pozostałe kłamały, bo w puli nie ma do dyspozycji wyższych wielokrotności żadnej z tych liczb – a zatem Dorota wylosowała 6. Spośród pozostałych kobiet jedynie Agnieszka mogła powiedzieć prawdę, jako że $6 \cdot 3$ ani $6 \cdot 4$ również nie występują w puli. Tak więc Agnieszka wylosowała liczbę 12. Zatem kłamczuchami są Beata i Cecylia, które wylosowały (w pewnej kolejności) liczby 3 i 9. Iloczyn tych liczb wynosi 27.

**Zadanie 14.** Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, która posiada dokładnie 24 dodatnie dzielniki, w tym dokładnie 8 dzielników nieparzystych.

*Wynik.* 420

*Rozwiązanie.* Liczba dodatnich dzielników liczby $n = {p_1}^{a_1} \dots {p_k}^{a_k}$ jest równa $(a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$. Skoro $24 = 2^3 \cdot 3$ oraz szukana liczba posiada 8 nieparzystych dzielników, to czynnik 2 występuje w rozkładzie szukanej liczby na czynniki pierwsze w dokładnie drugiej potędze. Zauważmy, że albo szukana liczba zawiera w swoim rozkładzie trzy najmniejsze nieparzyste liczby pierwsze w pierwszej potędze, albo najmniejszą nieparzystą liczbę pierwszą w trzeciej potędze i drugą najmniejszą w potędze pierwszej, albo najmniejszą nieparzystą liczbę pierwszą w siódmej potędze (ponieważ $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$). Ale $3 \cdot 5 \cdot 7 < 3^3 \cdot 5 < 3^7$, więc najmniejsza liczba $n$ wynosi $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

**Zadanie 15.** Okrąg i kwadrat mają wspólny środek. Jaki jest stosunek boku kwadratu do promienia okręgu, jeżeli wiemy, że oba obszary zamalowane na szaro mają takie samo pole?



*Wynik.* $\sqrt{\pi} \approx 1.77246$

*Rozwiązanie.* Skoro oba obszary zamalowane na szaro mają takie samo pole, to kwadrat i koło mają takie samo pole, gdyż pole każdego z nich równe jest polu części wspólnej obu figur powiększonemu o czterokrotność obszaru zamalowanego na szaro. Jeżeli przez $a$ oznaczymy bok kwadratu, a przez $r$ promień okręgu to dostaniemy, że $a^2 = r^2\pi$ a zatem $a : r = \sqrt{\pi}$.

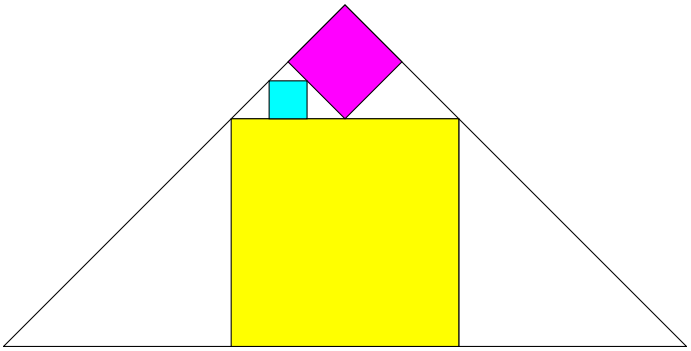
**Zadanie 16.** Ania zapisała ciąg $1, 2, 3, \dots, 20$ wraz ze znakami plus lub minus pomiędzy jego elementami, w taki sposób, że uzyskane wyrażenie było równe 192. Na ile sposobów mogła tego dokonać?

*Wynik.* 5

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że liczba 1 będzie zawsze potraktowana jako dodatnia, ponieważ minusy mogły być postawione wyłącznie pomiędzy liczbami.

Gdyby wszystkie znaki były plusami, to wynik wyniósłby 210. Skoro Ania uzyskała o 18 mniej, to musiała postawić minusy przed liczbami, które sumują się do 9. Jest jedna trójka takich liczb $(2, 3, 4)$, trzy pary $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ oraz pojedyncza liczba 9. Zatem mamy pięć możliwości.

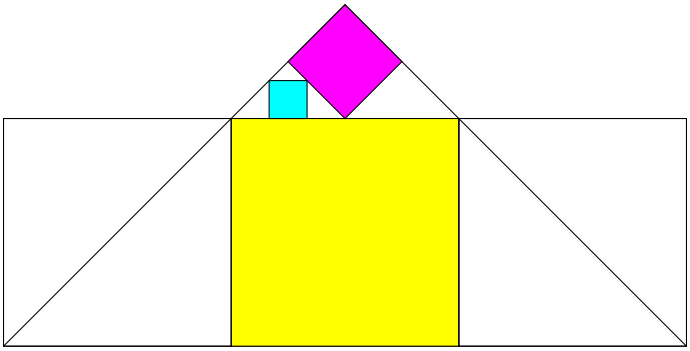
**Zadanie 17.** Trzy kwadraty umieszczono wewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego jak na rysunku:



Jaką część pola trójkąta stanowi pole błękitnego kwadratu?

*Wynik.* 1/81

*Rozwiązanie.* W rozwiązaniu kluczowe jest, aby zaobserwować, że długość boku żółtego kwadratu stanowi jedną trzecią długości podstawy trójkąta. Łatwo to zauważyć, przedłużając „zewnętrzne” trójkąty do kwadratów.



Stąd możemy wywnioskować, że stosunek pola żółtego kwadratu do pola trójkąta wynosi

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Korzystając ponownie z analogicznej obserwacji, wnosimy, że długość boku błękitnego kwadratu stanowi jedną szóstą boku żółtego kwadratu, a zatem stosunek ich pól wynosi 1/36. Szukany stosunek otrzymujemy wymnażając oba uzyskane stosunki, otrzymując w wyniku 1/81.

**Zadanie 18.** Znajdź sumę wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie mogą być zapisane w postaci $2a + 3b$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych $a, b$. Mówimy, że liczby całkowite dodatnie $m, n$ są względnie pierwsze, jeśli $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$.

*Wynik.* 26

*Rozwiązanie.* Łatwo zauważyć, że żadnej spośród liczb $1, 2, 3, 4, 6, 10$ nie możemy zapisać w tej postaci, skoro $a, b \geqslant 1$ i $NWD(a, b) = 1$. Z drugiej strony, dowolną liczbę nieparzystą $n \geqslant 5$ można zapisać biorąc $(a, b) = (\frac{n-3}{2}, 1)$, każdą liczbę postaci $n = 4l \geqslant 8$ możemy uzyskać podstawiając $(a, b) = (2l - 3, 2)$, a liczby postaci $n = 4l + 2 \geqslant 14$ uzyskujemy podstawiając $(a, b) = (2l - 5, 4)$.

**Zadanie 19.** Wielomian nazwiemy kartridżopodobnym, jeżeli posiada dwa całkowite pierwiastki różniące się o 1, wszystkie jego współczynniki są całkowite, a ich suma wynosi 2020. Ile jest wszystkich kartridżopodobnych wielomianów stopnia drugiego?

*Wynik.* 4

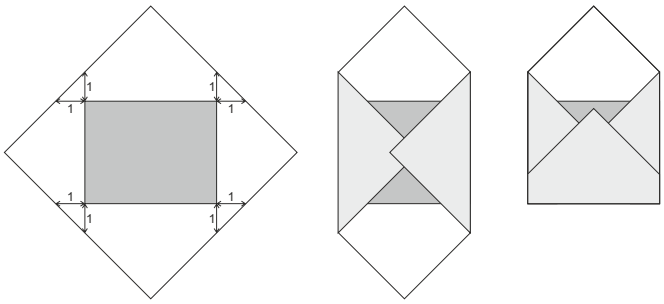
*Rozwiązanie.* Wielomian spełniający warunki ma mieć dwa pierwiastki, a więc można go przedstawić w postaci $c(x - a)(x - b)$, gdzie $a$ i $b$ są całkowitymi pierwiastkami, a $c$ jest współczynnikiem wiodącym – a więc również liczbą całkowitą. Sumę współczynników otrzymujemy podstawiając do wielomianu $x = 1$, a więc wynosi ona $c(a - 1)(b - 1)$. Skoro żądamy, aby ten iloczyn wynosił $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ i ponadto $a - 1$ i $b - 1$ różnią się o 1, mamy cztery możliwości skomponowania tego iloczynu ($2020 = 1010 \cdot 1 \cdot 2$, $2020 = 1010 \cdot (-1) \cdot (-2)$, $2020 = 101 \cdot 4 \cdot 5$, $2020 = 101 \cdot (-4) \cdot (-5)$).

**Zadanie 20.** Pewien pociąg składał się z 40 wagonów ponumerowanych od 1 do 40, każdy mogący pomieścić 40 pasażerów. Na początku w wagonie 1 siedział jeden pasażer, w wagonie 2 siedziało dwóch pasażerów, itd., aż do wagonu 40, w którym siedziało czterdziestu pasażerów. Niestety w pewnym momencie ze względów technicznych ostatni wagon musiał zostać odłączony, a zajmujący go pasażerowie zostali zmuszeni do przemieszczenia się do innych wagonów. Przechodzili oni kolejno do wagonów o mniejszych numerach, zajmując pierwsze wolne miejsce – jeżeli wagon był już zapełniony, pasażer przechodził do kolejnych wagonów (o mniejszych numerach), aż znalazł wolne miejsce. Podczas podróży przez kolejne awarie musiały zostać odłączone również wagony $39, 38, \ldots, 23$, a pasażerowie w analogiczny sposób przesiedli się do pozostałych wagonów. Ilu pasażerów zajmowało miejsca w wagonie 2 po wszystkich awariach?

*Wynik.* 19

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że pociągiem podróżowało łącznie $40 \cdot 41/2 = 820$ pasażerów. Ponieważ pociąg po awariach składa się z 22 wagonów, co najmniej 20 z nich musi być pełnych, w przeciwnym razie pociąg pomieściłby maksymalnie $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ pasażerów. A zatem w pierwszych dwóch wagonach musi siedzieć 20 pasażerów i jako że wagon 2 nie może być pełny (bo nie ma wystarczająco wielu pasażerów, aby go wypełnić), to w wagonie 1 dalej przebywa tylko jeden pasażer. A zatem w wagonie 2 znajduje się 19 pasażerów.

**Zadanie 21.** Jacek nie może kupić kopert, postanowił więc wykonać je samemu. Aby stworzyć prostokątną kopertę, Jacek używa kwadratowej kartki papieru o przekątnej 30 cm, zagina lewy i prawy róg, następnie zagina dolny róg i zamyka kopertę zaginając górny róg. Aby poprawnie zakleić kopertę, brzegi muszą na siebie nachodzić na szerokości dokładnie 1 cm (jak na rysunku), a po zamknięciu koperty górny róg nie może znajdować się poniżej dolnej krawędzi koperty. Jaka jest największa możliwa szerokość koperty Jacka?




*Wynik.* 18

*Rozwiązanie.* Oznaczmy szerokość koperty przez $a$, wysokość koperty przez $b$, a długość przekątnej kwadratu przez $d$. Patrząc na przekątną kwadratu na pierwszym rysunku, dochodzimy do wniosku, że $d = b + a + 2$. Aby koperta zagięła się poprawnie, musi zachodzić nierówność $\frac{d-b}{2} \leqslant b$, czyli $b \geqslant \frac{d}{3}$. Łącząc te dwa stwierdzenia otrzymujemy $a \leqslant \frac{2}{3}d - 2$.

**Zadanie 22.** Jadwiga wybrała trzy dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $c$, a nastepnie obliczyła sumy $a + b$, $b + c$, $c + a$. Okazało się, że są to trzy różne kwadraty liczb całkowitych. Jaka była najmniejsza możliwa wartość $a + b + c$?

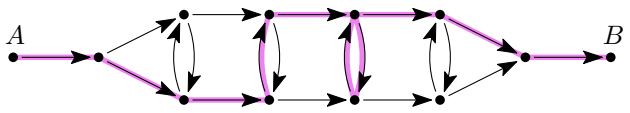
*Wynik.* 55

*Rozwiązanie.* Niech $a + b = d^2$, $b + c = e^2$, $c + a = f^2$ dla różnych dodatnich liczb całkowitych $d$, $e$, $f$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $d < e < f$, ponieważ liczby króre wybrała Marta były dodatnie. Wówczas

$$d^2 + e^2 = a + c + 2b > a + c = f^2. \qquad (\heartsuit)$$

Nasza szukana wartość to $(d^2 + e^2 + f^2)/2$. Szukamy więc trójki kwadratów spełniających $(\heartsuit)$, których suma jest parzysta i jak najmniejsza. Taką trójką liczb jest $(d^2, e^2, f^2) = (25, 36, 49)$, a więc odpowiedź to 55.

**Zadanie 23.** Ile jest różnych ścieżek na poniższym rysunku prowadzących z punktu $A$ do punktu $B$ i używających każdej strzałki co najwyżej raz? (Na rysunku zaznaczono na fioletowo przykładową ścieżkę)




*Wynik.* $162 = 2 \cdot 3^4$

*Rozwiązanie.* Ścieżka jest całkowicie określona przez następujące wybory: pójdź najpierw w górę lub w dół (dwie możliwości), a następnie dla każdej z czterech poziomych par wierzchołków: nie skorzystaj z żadnej pionowej krawędzi, skorzystaj z jednej lub skorzystaj z obydwu (trzy możliwości dla każdego wierzchołka). Zatem odpowiedź to $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

**Zadanie 24.** Ile jest liczb czterocyfrowych o tej własności, że różnica między każdymi dwoma sąsiednimi cyframi wynosi 3? Liczba nie może zaczynać się od zera.

*Wynik.* 29

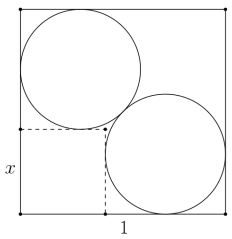
*Rozwiązanie.* Kodujemy liczby w następujący sposób: piszemu U jeżeli cyfra po prawej jest większa od cyfry po lewej oraz D jeżeli liczba po lewej jest większa od liczby po prawej. Przykładowo 1474 kodujemy jako UUD, a 1414 jako UDU.

Jest 8 możliwych kodów i dla każdego z nich liczba jest zdeterminowana przez pierwszą cyfrę:

| kod | UUU | UUD | UDU | UDD | DUU | DUD | DDU | DDD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| możliwe pierwsze cyfry | brak | 1–3 | 1–6 | 3–6 | 3–6 | 3–9 | 6–9 | 9 |

W sumie dostajemy $3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 4 + 1 = 29$ liczb spełniających warunki zadania.

**Zadanie 25.** Dwa styczne koła tego samego rozmiaru wpisane są w kwadrat jednostkowy jak na rysunku. Oblicz długość boku kwadratu, który ma wspólny róg z większym kwadratem i jest styczny do okręgów.




*Wynik.* $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41421$

*Rozwiązanie.* Oznaczając przez $x$ szukaną długość boku dostajemy, że promień okręgów wynosi $r = \frac{1-x}{2}$. Przekątna kwadratu jednostkowego jest podzielona przez środki okręgów i ich punkt styczności na cztery części. Dwa z nich to promienie, a pozostałe dwa to przekątne kwadratów o boku długości $r$. W sumie mamy

$$\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r = (1-x)(1+\sqrt{2}).$$

Rozwiązując powyższe równanie dostajemy $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

**Zadanie 26.** Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ spełniają następujące warunki:

- Dla dowolnego nieparzystego $i$ suma wszystkich liczb z wyjątkiem $x_i$ wynosi 2.
- Dla dowolnego parzystego $i$ suma wszystkich liczb z wyjątkiem $x_i$ wynosi 0.

Jaka jest wartość sumy $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}$?

*Wynik.* 2020/2019

*Rozwiązanie.* Sumując wszystkie równania, otrzymujemy

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

więc szukany wynik wynosi 2020/2019.

**Zadanie 27.** Dwoje graczy gra w grę wykonując ruchy na przemian. Każdy ruch polega na zamianie dodatniej liczby całkowitej $n$ w inną dodatnią liczbę całkowitą znajdującą się w przedziale $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$. Gracz, który nie może wykonać ruchu przegrywa. Dla jak wielu liczb początkowych w przedziale $[1, 1000]$ optymalna strategia zapewni rozpoczynającemu graczowi zwycięstwo?

*Wynik.* 620

*Rozwiązanie.* Nazwijmy *wygrywającymi* liczby, dla których optymalna strategia zapewnia zwycięstwo rozpoczynającemu od nich graczowi, resztę zaś *przegrywającymi*. Zauważmy, że liczba $n$ jest wygrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy w przedziale $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ istnieje liczba przegrywająca; co za tym idzie, liczba $n$ jest przegrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy w przedziale $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ nie ma żadnej liczby przegrywającej (a być może nie ma w nim w ogóle żadnej liczby).

Liczba 1 jest w oczywisty sposób liczbą przegrywającą, więc – zgodnie z podanymi powyżej zasadami – 2 i 3 są wygrywające. To z kolei implikuje fakt, iż liczby $4, \ldots, 7$ są przegrywające, jako że dla każdej z nich zachodzi $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Z tego następnie wynika wygrywający charakter liczb $8, \ldots, 21$ i tak dalej. Kontynuując to rozumowanie, stwierdzamy ostatecznie istnienie wygrywających liczb $44, \ldots, 129$ oraz $260, \ldots, 777$. Łącznie w przedziale $[1, 1000]$ istnieje więc 620 liczb wygrywających.

**Zadanie 28.** Dwa okręgi o średnicach odpowiednio $AB = 17$ oraz $AC = 7$ przecinają się w punktach $A$ oraz $D$. Załóżmy, że $CD = 4$. Rozważ wszystkie możliwe odległości między środkami okręgów i oblicz ich iloczyn.

*Wynik.* 60

*Rozwiązanie.* Kąty $ADB$ oraz $ADC$ są proste ponieważ są oparte na średnicy. Zatem $B$, $C$ oraz $D$ leżą na jednej prostej. Na mocy Twierdzenia Pitagorasa $BD^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2$, więc $BC = 16 \pm 4$ (w zależności od tego w jakiej kolejności na prostej leżą punkty $B, C, D$). Odcinek łączący środki okręgów jest odcinkiem łączącym środki boków w trójkące $ABC$, więc jest równoległy do boku $BC$ i jego długość jest połową jego długości, więc możliwe odległości to odpowiednio $20/2 = 10$ oraz $12/2 = 6$, a ich iloczyn wynosi 60.

**Zadanie 29.** Siedem trolejbusów kursuje między czternastoma przystankami leżącymi przy jednej prostej ulicy. Każdy trolejbus rozpoczyna swój kurs na jednym z przystanków i porusza się w jednym kierunku, aż dotrze do końca ulicy, gdzie znajduje się pierwszy lub ostatni przystanek na ulicy. Tam trolejbus zawraca i kontynuuje kurs w przeciwnym kierunku. Wszystkie trolejbusy poruszają się z tą samą prędkością i przejeżdżają przez dokładnie jeden przystanek w ciągu minuty. Zarządca linii umieścił trolejbusy na przystankach w taki sposób, że

1. na każdym przystanku znajduje się co najwyżej jeden trolejbus;
2. po minucie kursowania trolejbusów, dalej na każdym przystanku będzie znajdował się co najwyżej jeden trolejbus – niezależnie od tego, w których kierunkach będą one kursować.

Na ile sposobów trolejbusy mogły zostać przypisane do przystanków? Zakładamy, że wszystkie trolejbusy są identyczne.

*Wynik.* 20

*Rozwiązanie.* Drugi warunek jest równoważny temu, że żadne dwa trolejbusy nie mogą znajdować się w odległości dokładnie dwóch przystanków. Oczywiście „parzyste" i „nieparzyste" przystanki są od siebie niezależne i z podanego warunku wynika, że zarówno na wszystkich „parzystych" przystankach, jak i na wszystkich „nieparzystych" przystankach mogą znajdować się łącznie maksymalnie 4 trolejbusy. Zatem 4 trolejbusy znajdują się na przystankach parzystych, a 3 na przystankach nieparzystych, lub odwrotnie (3 trolejbusy na przystankach nieparzystych i 4 na przystankach parzystych). Zgodnie z warunkami, 4 trolejbusy można rozmieścić na przystankach parzystych (lub na przystankach nieparzystych) tylko na jeden sposób. Zatem odpowiedź wynosi $2 \cdot N$, gdzie $N$ jest liczbą sposobów, na które możemy umieścić 3 kamienie na 7 miejscach w rzędzie, aby każde dwa były oddzielone co najmniej jednym wolnym miejscem. Aby wyznaczyć $N$, rozważmy 4 wolne miejsca i zauważmy, że jest 5 pozycji gdzie można umieścić kamienie (przed każdym wolnym miejscem lub na końcu). Stąd 3 kamienie można rozmieścić na tych 5 pozycjach na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów. Odpowiedź wynosi zatem $2 \cdot 10 = 20$.

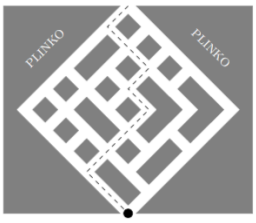
**Zadanie 30.** Witek wydaje książkę liczącą 2020 stron ponumerowanych kolejno liczbami $1, 2, 3, \ldots, 2020$. Po korekcie zdecydował się dołączyć na początku książki jeszcze streszczenie liczące 11 stron. Ile cyfr musi zmienić, aby wszystkie strony były ponownie poprawnie ponumerowane? Cyfra ze starej numeracji stron może być użyta w nowej numeracji tylko na tej samej pozycji (jedności, dziesiątek, tysięcy, itd.), a nowo dodane cyfry, jak np. cyfra 1 dodana po zmianie $95 \to 106$, nie są zliczane.

*Wynik.* 4251

*Rozwiązanie.* Zacznijmy od policzenia, ile cyfr zostanie niezmienionych. Łatwo zauważyć, że dla dowolnej liczby jednocyfrowej lub dwucyfrowej, operacja $+11$ powoduje zmianę wszystkich cyfr liczby. Zatem cyfry niezmieniające się muszą być cyframi setek lub tysięcy. Dalej, jeśli ostatnie dwie cyfry liczby są pomiędzy 00 i 88, to cyfra setek nie ulegnie zmianie. Ponadto, w każdej liczbie pomiędzy 1000 a 1988 cyfra tysięcy pozostaje niezmieniona. Zatem dla liczb mniejszych niż 2000, mamy $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ cyfr, które zostają niezmienione. Dodatkowo, cyfra tysięcy i setek pozostanie niezmieniona dla liczb pomiędzy 2000 i 2020, czyli mamy dodatkowe $2 \cdot 21 = 42$ niezmienione cyfry.

Policzmy teraz łączną liczbę cyfr użytych do ponumerowania książki przed korektą. Dla stron pomiędzy 1 i 9 będzie to 9 cyfr, dla stron pomiędzy 10 a 99 mamy $90 \cdot 2$ cyfr, dla stron pomiędzy 100 i 999 mamy kolejnych $900 \cdot 3$ cyfr i wreszcie do ponumerowania stron od 1000 do 2020 użyto $1021 \cdot 4$ cyfr. Daje to łącznie 6973 cyfry. Zatem $6973 - 2722 = 4251$ cyfr musi zostać zmienionych.

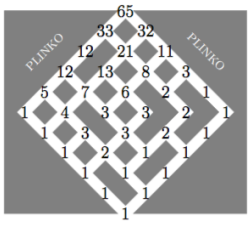
**Zadanie 31.** Czarodziej Vierr-tarra wrzuca do pudełka plinko krążek, który spada na sam dół. Ile jest możliwych dróg przejścia krążka przez to pudełko? Na rysunku przedstawiona jest przykładowa droga.




*Wynik.* 65

*Rozwiązanie.* W każdym miejscu przecięcia się dróg piszemy liczbę, która oznacza ile możliwych dróg może pokonać krążek od tego punktu. Numerujemy od samego dołu, gdzie mamy tylko jedną możliwą drogę i idziemy do góry. Każda

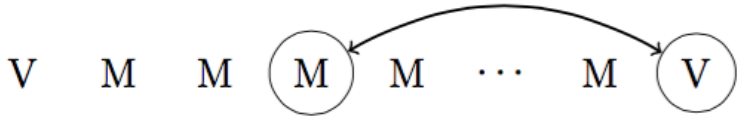
liczba jest sumą liczb znajdujących się bezpośrednio pod nią.



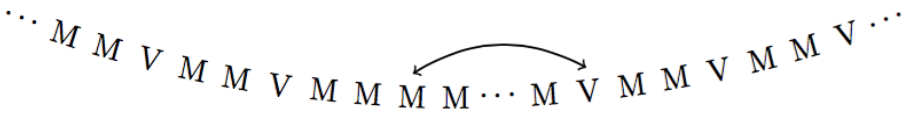

**Zadanie 32.** Król Artur i jego 100 rycerzy zasiadło przy okrągłym stole. Wszystkim wegetarianom zaserwowano ser, a pozostałym uczestnikom biesiady podano kurczaka. Król Artur zauważył, że otrzymał mniejszą porcję kurczaka niż rycerz po jego lewej stronie, zarządził zatem by każdy przekazał swój talerz osobie po prawej. Królewska porcja kurczaka była teraz odpowiednich rozmiarów, ale aż 64 rycerzy otrzymało zły posiłek. Wszyscy przekazali więc ponownie swój talerz sąsiadowi po prawej. Król Artur znów otrzymał za małą porcję kurczaka, więc każdy przekazał swój talerz sąsiadowi po prawej po raz trzeci. Po tej zamianie tylko dwóch rycerzy (i żaden z nich nie był królem) otrzymało zły posiłek, zamienili więc oni swoje talerze i uczta mogła się rozpocząć. Ilu rycerzy króla Artura je kurczaka?

*Wynik.* 68

*Rozwiązanie.* Zauważmy najpierw, że królowi i trzem rycerzom po jego lewej stronie zaserwowano kurczaka. Zatem po trzecim przekazaniu talerzy, pierwszy wegetariański posiłek po lewej stronie króla został przekazany jedzącemu mięso i pierwszy wegetarianin po prawej stronie króla otrzymał mięso. Są to właśnie ci dwaj rycerze, którzy musieli wymienić się talerzami.




Finalnie każdy inny biesiadnik otrzymał takie same danie co osoba odległa o trzy miejsca po jego lewej stronie, zatem usadzenie rycerzy wygląda następująco

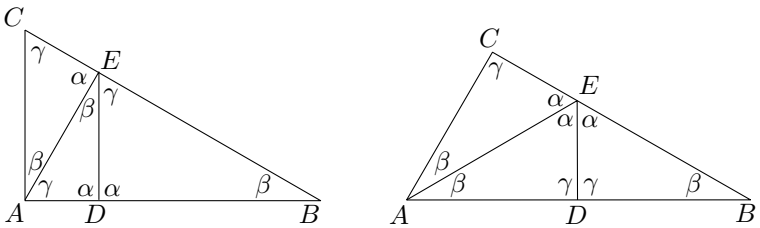



Każdy wegetarianin i każdy jedzący mięso usadzony po prawj stronie wegetarianina otrzymał niewłaściwe danie po pierwszym przekazaniu talerzy. Zatem przy stole siedzi $64/2 = 32$ wegetarian. Pozostali rycerze jedzą kurczaka tak jak ich król i jest ich $100 - 32 = 68$.

**Zadanie 33.** Dawid chce narysować trójkąt $ABC$, oraz punkty $D$ i $E$ odpowiednio na bokach $AB$ i $BC$ tak, aby trójkąty $ABC$, $AEC$, $ADE$, $BDE$ były podobne. Jaka jest suma wszystkich możliwych miar kąta $BAC$ (w stopniach)?

*Wynik.* 150

*Rozwiązanie.* Oznaczmy kąty w trójkącie $ABC$ przez $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (w standardowy sposób). Z podobieństwa trójkątów $\angle EAC = \beta$ oraz $\angle AEC = \alpha$. Kąty $EDA$ i $EDB$ sumują się do $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, więc muszą być sobie równe, stąd albo kąt $\alpha$, albo kąt $\gamma$ jest równy $90°$. Łatwo możemy sprawdzić, że w obie sytuacje jednoznacznie wyznaczają kąty w trójkącie, jak na rysunku poniżej. W pierwszej $\alpha = 90°$, a w drugiej dostajemy $3\alpha = 180°$, czyli $\alpha = 60°$. Ostatecznym wynikiem jest więc $90° + 60° = 150°$.



**Zadanie 34.** Pięcioro elfów, pomocników świętego Mikołaja, musi zaplanować swój harmonogram pracy na 10 kolejnych przedświątecznych dni w taki sposób, aby każdego dnia dokładnie dwoje elfów było na swojej zmianie, i oboje odpoczywali kolejnego dnia. Ile istnieje możliwych harmonogramów pracy elfów, w których każda para elfów dzieli jedną ze zmian?

*Wynik.* 240

*Rozwiązanie.* Narysujmy elfy jako wierzchołki diagramu, na którym odcinek pomiędzy dwoma wierzchołkami reprezentuje wspólną zmianę dwojga elfów. Chcemy znaleźć liczbę sposobów na narysowanie wszystkich $5 \cdot 4/2 = 10$ odcinków po kolei, w taki sposób, żeby żadne dwa kolejne odcinki nie miały wspólnego wierzchołka. Pierwszy z nich może być wybrany na 10 sposobów, następny na 3 sposoby i w dwóch następnych krokach mamy zawsze dwie możliwości. Jednakże, niezależnie od tych czterech dokonanych wyborów, dostajemy taką samą sytuację, tzn. każdy inny poprawny wybór odcinków możemy uzyskać przez przenumerowanie wierzchołków. Piąty wybór może doprowadzić do dwóch istotnie różnych rezultatów: albo uzyskamy cykl składający się z pięciu odcinków, lub cykl z czterech odcinków z „ogonem". Pierwsza opcja prowadzi odpowiednio do 1, 2, 1, 1 i 1 możliwości w kolejnych krokach, z kolei w drugim przypadku nie możemy doprowadzić procedury do końca w poprawnych sposób, jako że dwa ostatnie odcinki musiałyby zawierać „koniec ogona". Wnosimy stąd, że istnieje

$$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

możliwych harmonogramów pracy.

**Zadanie 35.** Łucja ma trójkąt o bokach długości 32, 50 i $x$. Co więcej, istnieje trójkąt podobny, który ma dwa boki takiej samej długości jak boki trójkąta Łucji i nie jest do niego przystający. Znajdź sumę wszystkich możliwych wartości $x$.

*Wynik.* 27721/200

*Rozwiązanie.* Niech $a < b < c$ będą długościami boków trójkąta Łucji. Zauważmy, ze sytuacja opisana w zadaniu może zachodzi tylko, gdy spełniona jest zależność $a : b = b : c$. Mamy trzy możliwości: (1) $a = 32$, $b = 50$ i dostajemy, że $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$; (2) $a = 32$, $c = 50$ i dostajemy, że $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$; (3) $b = 32$, $c = 50$ i dostajemy, że $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$. Łatwo sprawdzić, że we wszystkich trzech przypadkach spełniona jest nierówność trójkąta, a więc wynikiem jest suma tych trzech wartości $x$.

**Zadanie 36.** Biegacz trenuje na bieżni w kształcie obwodu czterdziestokąta foremnego. Jego plan treningowy wygląda następująco: najpierw biegnie z początkowego wierzchołka do wierzchołka sąsiedniego, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, i tam robi sobie krótką przerwę. Powtarza następnie tę procedurę, aż obiegnie całą bieżnię i zrobi sobie przerwę w początkowym wierzchołku. Potem zaczyna biec ponownie, ale tym razem robi sobie przerwę za każdym razem, gdy przebiegnie po dwóch bokach czterdziestokąta. Po kolejnej przerwie w początkowym wierzchołku ponownie zwiększa o jeden długość odcinka jaki przebiega bez przerwy, i biega w kółko aż wypadnie mu przerwa w początkowym wierzchołku, i tak dalej. Ile razy biegacz zrobi sobie przerwę zanim w końcu przebiegnie cały wielokąt bez przerwy? Na początku treningu ani po ostatnim biegu biegacz nie ma przerwy.

*Wynik.* 902

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że biegacz odbywa dokładnie $\frac{40}{NWD(40,a)}$ przebiegów długości $a$ boków wielokąta, gdzie $NWD(x, y)$ oznacza największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych $x$, $y$. Dla wszystkich możliwych liczb $d = NWD(40, a)$ (innymi słowy, dla dzielników 40) wypiszmy wszystkie możliwe wartości $a$:

- $d = 1$ dla $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$,
- $d = 2$ dla $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$ dla $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$ dla $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$ dla $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$ dla $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$ dla $a \in \{20\}$,
- $d = 40$ dla $a \in \{40\}$.

Całkowitą liczba przebiegów możemy wyliczyć sumując iloczyny liczb $\frac{40}{d}$ i rozmiarów zbiorów wypisanych w odpowiednich wierszach powyżej [1]. Otrzymujemy $40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 903$. Zatem biegacz zrobił sobie 902 przerw.

[1] rozmiary te można wyrazić jako $\varphi(40/d)$, przy użyciu funkcji Eulera $\varphi$.

**Zadanie 37.** Doktorant żyjący na planecie o kształcie sześcianu musi zużyć swój budżet na podróże, odwiedzając uczelnie, które znajdują się w wierzchołkach sześcianu (w każdym wierzchołku znajduje się dokładnie jedna uczelnia). Budżet wystarcza na 2020 podróży i musi być całkowicie wykorzystany. Doktorant startuje ze swojej macierzystej uczelni i wyjeżdża najpierw do jednej z sąsiadujących (tzn. połączonych krawędzią) uczelni. Kontynuuje podróż dalej w ten sam sposób za każdym razem wybierając następną sąsiadującą uczelnię losowo, przy czym nie może wrócić na swoją uczelnię wcześniej niż po 2020-stej podróży. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku 2020-stej podróży doktorant trafi do domu?

*Wynik.* 2/9

*Rozwiązanie.* Oznaczmy początkowy wierzchołek (tzn. wierzchołek, w którym znajduje się uczelnia doktoranta) przez $A$, jego sąsiadów przez $B_1$, $B_2$, $B_3$, ich sąsiadów (różnych od $A$) przez $C_1$, $C_2$, $C_3$ i ostatni wierzchołek przez $D$. Łatwo zauważyć, że po nieparzystej liczbie podróży jedynymi możliwymi pozycjami doktoranta są $B_i$ lub $D$, a po parzystej liczbie podróży możliwe jest dotarcie jedynie do $C_i$ lub $A$ (który nie jest dozwolony przed 2020-stą podróżą). Niech $P_n(V)$ oznacza prawdopodobieństwo dotarcia do wierzchołka $V$ w wyniku $n$-tej podróży. Ze względu na symetrię, mamy $P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) =: P_n(B)$ dla każdego $n$ i analogicznie dla wierzchołków $C_i$. Łatwo policzyć, że dla kilku początkowych kroków jedyne niezerowe prawdopodobieństwa to:

- $P_0(A) = 1$
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$
- $P_2(C) = \frac{1}{3}$
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$, $P_3(B) = \frac{2}{9}$
- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

Widzimy więc, że po czterech podróżach sytuacja jest identyczna do sytuacji po dwóch podróżach. Zatem możemy wywnioskować, że prawdopodobieństwa powtarzają się okresowo, $P_{2019}(B) = \frac{2}{9}$, więc po 2020 podróżach mamy (tym razem możliwy jest powrót do $A$)

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

**Zadanie 38.** Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$ oraz dodatniej liczby całkowitej $n$ zdefiniujmy operację $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Wyznacz sumę wszystkich liczb rzeczywistych $a$, które spełniają równanie

$$(\ldots((a \star 2020) \star 2019) \star \cdots \star 2) \star 1 = a.$$

*Wynik.* 27

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że $x \star 3 = 3$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x$. Zatem równanie sprowadza się do $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$, więc $a = 27$ jest jedynym rozwiązaniem.

**Zadanie 39.** Czworo studentów postanowiło zapisać się na niektóre z czterech dostępnych przedmiotów. Postanowili, że każdy z nich zapisze się na co najmniej jeden przedmiot, a ponadto na dokładnie jeden z przedmiotów zapisze się więcej niż jeden z nich. Na ile sposobów mogą tego dokonać?

*Wynik.* 2052

*Rozwiązanie.* Oznaczmy przedmioty liczbami 1, 2, 3 i 4, a studentów literami $A$, $B$, $C$ i $D$. Załóżmy, że przedmiot 1 jest tym, który został wybrany przez więcej niż jednego ze studentów (policzywszy wynik z tym założeniem, musimy go jedynie pomnożyć przez 4). Zatem istnieje tylko pięć sposobów przypisania przedmiotu 2 (może być wybrany przez jednego wśród $A$, $B$, $C$, $D$ lub przez nikogo). Podobnie, istnieje pięć sposobów przypisania przedmiotów 3 i 4. Łącznie mamy zatem $5^3 = 125$ sposobów przypisania tych przedmiotów studentom. W jednym z tych przypadków, żaden ze studentów nie zostanie zapisany na żaden z tych przedmiotów. W $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ przypadkach, trzech spośród studentów zostanie zapisanych na któryś z tych przedmiotów.

Teraz policzmy, ile jest przypadków, w których dokładnie jeden student zostanie zapisany na któryś z tych trzech przedmiotów. Mamy $4 \cdot 3$ możliwości, gdzie jeden z nich zostaje zapisany na jeden z przedmiotów, a na pozostałe dwa przedmioty nie zapisuje się nikt; $4 \cdot 3$ możliwości, gdzie jeden z nich wybiera dokładnie dwa przedmioty, a na trzeci nie zapisuje się nikt; i 4 możliwości, gdzie jeden z nich zapisuje się na wszystkie trzy przedmioty. Razem, daje to $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 = 28$ możliwości. Oznacza to, że jest $125 - 1 - 24 - 28 = 72$ możliwości przypisania przedmiotów 2, 3, 4 w taki sposób, że dokładnie dwóch studentów zostaje zapisanych na któryś z nich.

Możemy teraz przystąpić do rozważenia przedmiotu 1 (który jest jedynym z zapisanym więcej niż jednym ze studentów $A$, $B$, $C$, $D$). Wiemy, że każdy student, który nie zapisał się na żaden z pozostałych przedmiotów, musi zostać zapisany na przedmiot 1; zaś każdy, który zapisał się na jakiś inny przedmiot, może zapisać się na przedmiot 1 lub nie – o ile zagwarantujemy, że co najmniej dwóch studentów zapisze się na przedmiot 1. Oznacza to, że jest

jeden sposób przypisania studentów do przedmiotu 1, jeśli żaden ze studentów nie zapisał się na żaden z pozostałych przedmiotów; dokładnie 2 sposoby, jeśli dokładnie jeden ze student zapisał się na któryś z pozostałych przedmiotów; dokładnie 4 sposoby, jeśli dokładnie dwóch studentów zapisało się na któryś z pozostałych przedmiotów; dokładnie 7 sposobów, jeśli dokładnie trzech studentów zapisało się na któryś z pozostałych przedmiotów (7 zamiast 8, ponieważ co najmniej jeden z tych trzech studentem musi zostać zapisany na przedmiot 1). To prowadzi do obliczenia wyniku: $4(1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$.

**Zadanie 40.** Rozważmy sumę wszystkich liczb, które posiadają dokładnie $1000^{1000}$ cyfr, spośród których każda jest równa 1, 2 lub 4. Znajdź trzy ostatnie cyfry rozważanej sumy.

*Wynik.* 259

*Rozwiązanie.* Niech $n$ będzie liczbą, która składa się tylko z cyfr 1, 2 i 4. Jeśli zamienimy wszystkie 1, które występują w zapisie dziesiętnym liczby $n$ na 2, wszystkie 2 na 4 oraz wszystkie 4 na 1, to otrzymamy inną liczbę, która składa się tylko z cyfr 1, 2 i 4. Stosując opisaną operację trzy razy, otrzymamy wyjściową liczbę $n$. Pogrupujmy wszystkie liczby, które wystąpią w naszej sumie w trójki, takie, że każda liczba znajdująca się w danej trójce jest otrzymywana za pomocą opisanej operacji z innej liczby z tej trójki. Suma każdej takiej trójki jest równa liczbie $B$, która składa się z $1000^{1000}$ cyfr 7, ponieważ każda cyfra tej sumy jest sumą cyfr 1, 2 i 4 (w pewnej kolejności). Wszystkich sumowanych liczb jest $3^{1000^{1000}}$, więc liczba trójek wynosi $3^{1000^{1000}-1}$, a zatem suma, o którą pytamy w zadaniu jest równa

$$3^{1000^{1000}-1}B.$$

Interesują nas tylko trzy ostatnie cyfry, więc policzymy reszty modulo 1000. Oczywiście $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Co więcej, skoro 3 i 1000 są względnie pierwsze, możemy zastosować Twierdzenie Eulera, by poradzić sobie z potęgą 3: Mamy $\varphi(1000) = 400$, co oczywiście jest dzielnikiem liczby $1000^{1000}$, więc

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000},$$

gdzie ujemny wykładnik oznacza odwrotność modulo 1000. Skoro

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000},$$

to odwrotnością modulo 1000 liczby 3 jest $-333 \equiv 667 \pmod{1000}$. Zatem szukana liczba wynosi

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

**Zadanie 41.** W trójkącie $ABC$ miara kąta przy wierzchołku $A$ jest dwa razy większa od miary kąta przy wierzchołku $B$. Wszystkie długości boków trójkąta są liczbami całkowitymi, a długość boku $BC$ jest możliwie najmniejsza. Jaki jest iloczyn długości boków trójkąta?

*Wynik.* 120

*Rozwiązanie.* Oznaczamy długości boków trójkąta przez $a$, $b$ i $c$ (tak, że naprzeciw wierzchołka $A$ mamy bok długości $a$, naprzeciw wierzchołka $B$ mamy bok długości $b$, a naprzeciw wierzchołka $C$ mamy bok długości $c$) oraz kąt przy wierzchołku $B$ jako $\beta$. Z twierdzenia sinusów dostajemy że:

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta,$$

skąd otrzymujemy $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Teraz z twierdzenia sinusów otrzymujemy, że

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{3\sin\beta - 4\sin^3\beta}{\sin\beta} = 3 - 4\sin^2\beta = 4\cos^2\beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$

czyli $cb = a^2 - b^2$. Najmniejszym $a$, dla którego istnieją $b$ i $c$, które spełniają tą równość oraz są bokami trójkąta, jest $a = 6$. Wtedy $b = 4$ i $c = 5$. Zatem iloczyn długości boków wynosi 120.

**Zadanie 42.** Przy okrągłym stole znajduje się 30 miejsc. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę miejsc (co najmniej jedno) w taki sposób, żeby żadne dwa wybrane miejsca nie sąsiadowały ze sobą? Wybory różniące się o obrót uznajemy za różne.

*Wynik.* 1860497

*Rozwiązanie.* Niech $A(n)$ będzie liczbą wyborów z zadania dookoła stołu, przy którym jest $n$ miejsc. Dla wygody będziemy liczyć także wybory z zerem wybranych miejsc. Udowodnimy następującą relację rekurencyjną:

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2) \tag{R}$$

dla $n \geqslant 5$. Podzbiór $M$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ nazwiemy *cyklicznie rzadkim* jeśli nie zawiera sąsiednich liczb, a także nie zawiera równocześnie 1 i $n$. Liczba $A(n)$ jest równa liczbie cyklicznie rzadkich podzbiorów $\{1, \ldots, n\}$.

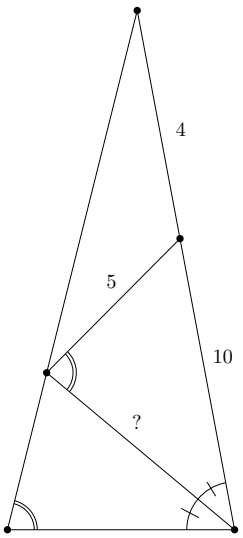
Niech $B(n)$ oznacza liczbę *rzadkich* podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$, tj. takich, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb (nie ma warunku dotyczącego 1 i $n$). Wtedy $B(n)$ spełnia równanie $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$ — istnieje dokładnie $B(n-1)$ podzbiorów niezawierających $n$ oraz $B(n-2)$ zawierających $n$.

Przeprowadźmy podobne rozumowanie dla $A(n)$. Liczba cyklicznie rzadkich podzbiorów zawierających $n$ jest równa $B(n-3)$, ponieważ podzbiory takie nie zawierają ani 1, ani $n$, natomiast reszta elementów tworzy dowolny rzadki podzbiór zbioru $\{2, \ldots, n-2\}$. Dalej, jeśli cykliczny rzadki podzbiór nie zawiera $n$, wtedy pozostałe elementy mogą tworzyć dowolny rzadki podzbiór zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$. Wynika z tego, że relacja

$$A(n) = B(n-1) + B(n-3)$$

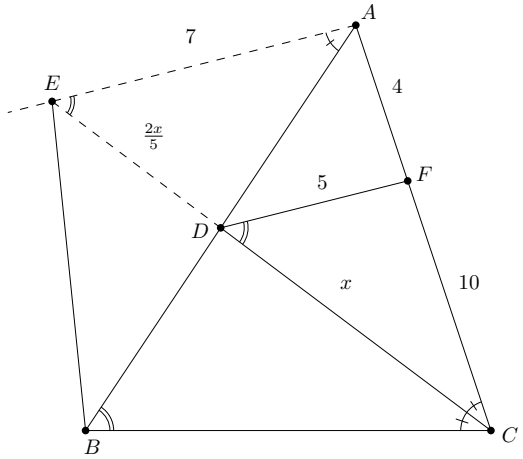
jest prawdziwa dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 3$. Ponieważ (przesunięte) ciągi $B(n-1)$ oraz $B(n-3)$ spełniają żądaną relację, to spełnia ją też ich suma $A(n)$. Udało nam się zatem dowieść równość (R) dla dowolnego $n \geqslant 5$. Możemy zauważyć, że $A(3) = 4$ oraz $A(4) = 7$. Używając (R) możemy policzyć wszystkie następne wartości, w szczególności $A(30) = 1860498$. W zadaniu wykluczamy wybory z zerem wybranych miejsc, zatem odpowiedź jest o jeden mniejsza.

**Zadanie 43.** Mikołaj wziął udział w warsztatach online dotyczących gięcia drutu i jako zadanie do domu dostał do wykonania konstrukcję z obrazka. Zapamiętał dwie pary zaznaczonych równych kątów i długości trzech odcinków. Niestety zapomniał czwartej długości (oznaczonej znakiem zapytania) i teraz ma problem z wykonaniem zadania. Pomóż mu i znajdź brakującą długość.




*Wynik.* $5\sqrt{\frac{7}{2}} \approx 9.354134$

*Rozwiązanie.*




Oznaczmy punkty jak na rysunku, dorysujmy prostą równoległą do $DF$ przechodzącą przez punkt $A$ i oznaczmy jej przecięcie z prostą $CD$ przez $E$. Oznaczmy długość $CD$ jako $x$. Możemy zauważyć podobieństwo trójkątów $CDF \sim CEA$, skąd $ED = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5}$ i $EA = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7$. Skoro $\angle AEC = \angle FDC = \angle DBC$, to na czworokącie $AEBC$ można opisać okrąg. Wynika stąd, że $\angle EAB = \angle ECB = \angle ACD$, a więc dostajemy, że $EDA \sim EAC$ i stąd

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}} \approx 9.354134.$$

**Zadanie 44.** Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, spełnia warunek

$$f(m+n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$. Znajdź średnią arytmetyczną wszystkich możliwych wartości $f(2020)$.
*Uwaga:* W tym zadaniu $\mathbb{N}$ oznacza zbiór *dodatnich* liczb całkowitych.

*Wynik.* 1011

*Rozwiązanie.* Pokażemy najpierw, że $f(n) \leqslant n+1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jako że $f(n+1) \geqslant f(n) + f(f(1)) - 1 \geqslant f(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $f$ jest niemalejąca. Załóżmy, że

$$f(m) > m+1 \quad \text{dla pewnego } m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Oznacza to, że $f(m) = m + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 2$. Wtedy

$$f(2m) \geqslant f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geqslant 2m + 2(c-1) + 1.$$

Używając tego argumentu indukcyjnie otrzymujemy $f(2^r m) \geqslant 2^r m + 2^r(c-1) + 1$. Łącząc tę nierówność, nierówność z treści zadania oraz fakt że $f$ jest niemalejąca otrzymujemy, że

$$f(2^r m + 1) \geqslant f(f(2^r m)) \geqslant f(2^r m + 2^r(c-1) + 1),$$

zatem znów z monotoniczności mamy $f(2^r m + 1) = f(2^r m + 2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1) + 1)$. Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ wybierzmy $r_k \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{r_k}(c-1) > k$. Wtedy

$$f(2^{r_k} m + 1 + k) \geqslant f(2^{r_k} m + 1) + f(f(k)) - 1 \geqslant f(2^{r_k} m + 1 + k) + f(f(k)) - 1,$$

skąd $f(f(k)) \leqslant 1$. Oznacza to, że $f(f(k)) = 1$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Stąd także $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geqslant f(m)$ i dalej $f(m) = 1$, co przeczy założeniu (1). Zatem rzeczywiście, $f(n) \leqslant n+1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

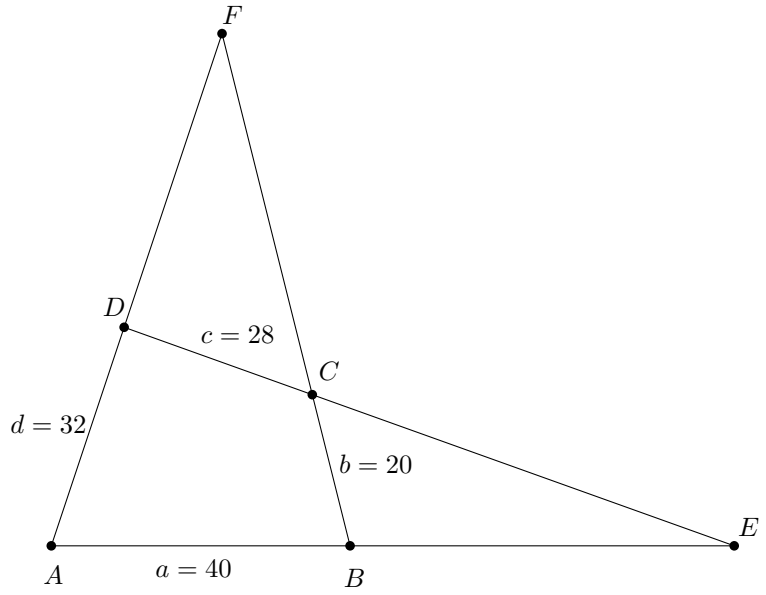
Okaże się, że dla danej liczby całkowitej dodatniej $N > 1$, wartość $f(N)$ może przyjmować dowolną wartość ze zbioru $\{1, 2, \ldots, N+1\}$. Aby to zobaczyć, rozważmy najpierw $A < N$. Niech $f_1(n) = 1$ dla $n \leqslant A$, oraz $f_1(n) = A$ dla $n > A$. Funkcja $f_1$ spełnia warunek oraz $f_1(N) = A$. Dalej, funkcja $f_2(n) = n$ także spełnia warunek i $f_2(N) = N$. Także funkcja $f_3(n) = N\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ daje $f_3(N) = N + 1$ oraz spełnia warunek. Istotnie, mamy:

$$f_3(m) + f_3(f_3(n)) = N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leqslant N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leqslant N\left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n) + 1$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ for $N > 1$ oraz że $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$ dla dowolnych rzeczywistych $x, y \in (0, \infty)$.

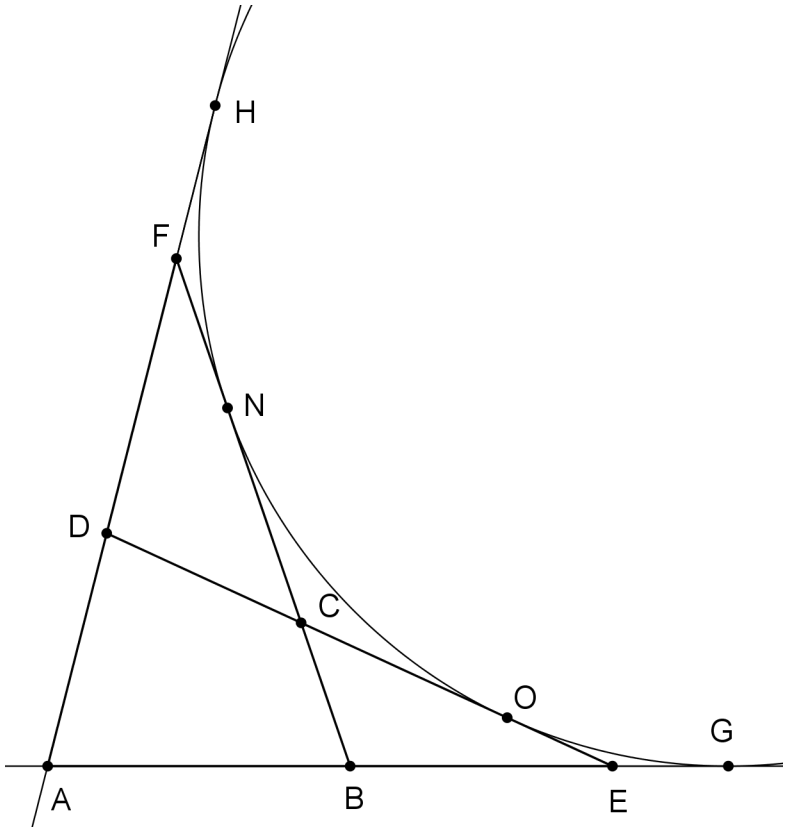
Ponieważ $2020 > 1$, wynik jest średnią wszystkich liczb całkowitych dodatnich z przedziału od 1 do 2021, tj. $\frac{2022}{2} = 1011$.

**Zadanie 45.** Działka farmera Karola ma kształt czworokąta o bokach długości: $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ (jak na rysunku). W spadku po swoim dziadku odziedziczył on dodatkowo dwie trójkątne działki $BEC$ oraz $DCF$, ograniczone bokami pierwotnej działki Karola lub ich przedłużeniami. Wiedząc, że na fragment ogrodzenia $\overline{BE} + \overline{EC}$ potrzeba łącznie płotu o długości 80, podaj długość płotu potrzebną do postawienia fragmentu ogrodzenia $\overline{CF} + \overline{FD}$.




*Wynik.* 88

*Rozwiązanie.* Najpierw pokażemy, że trójkąty $\triangle BEC$, $\triangle AED$, $\triangle DCF$ oraz $\triangle ABF$ mają wspólny okrąg dopisany styczny do prostych $AB$ i $AD$.




Niech $G$ będzie punktem styczności okręgu dopisanego do $\triangle BEC$ naprzeciw wierzchołka $B$, leżącym na prostej $AB$. Odległość pomiędzy $B$ i $G$ jest równa połowie obwodu trójkąta, tj. $BG = \frac{1}{2}(CB + BE + EC)$. Niech teraz $G'$ będzie punktem styczności okręgu dopisanego do trójkąta $AED$ naprzeciwko wierzchołka $A$, leżącym na prostej $AB$.

Korzystając z zależności $a+b=60=c+d$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} AG' &= \frac{1}{2}(AE+ED+DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB+BE+EC+CD+DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB+BE+EC+AB+BC) \\ &= AB+\frac{1}{2}(BE+EC+BC), \end{aligned}$$

a stąd $G=G'$. W takim razie punkt styczności $O$, leżący na prostej $CE$, jest jednoznacznie wyznaczony dla obu trójkątów, skąd wynika, że trójkąty $BEC$ oraz $AED$ mają identyczny okrąg dopisany. Analogicznie możemy pokazać, że trójkąty $DCF$ oraz $ABF$ mają wspólny okrąg dopisany. Jest on identyczny dla wszystkich czterech rozważanych trójkątów, ponieważ środek okręgu dopisanego leży na dwusiecznej $\angle EAF$ i na dwusiecznej $\angle ECF$. Skoro styczne do okręgu mają równą długość, z faktu że $AG=AH$ otrzymujemy, że trójkąty $AED$ oraz $ABF$ mają obwody równej długości. Stąd

$$\begin{aligned} CF+FD &= AB+BF+FA-AB-BC-DA \\ &= AE+ED+DA-AB-BC-DA \\ &= BE+EC+CD-BC \\ &= 80+28-20=88 \end{aligned}$$

jako długość $CF+FD$.

**Zadanie 46.** Dla jak wielu liczb $k\in\{1,\ldots,2020\}$ równanie $p^3+q^3+r^3=3pqr+k$ ma rozwiązanie $(p,q,r)$, gdzie $p$, $q$, $r$ są dodatnimi liczbami całkowitymi?

*Wynik.* 1568

*Rozwiązanie.* Zapiszmy podane równanie w formie

$$p^3+q^3+r^3-3pqr=\frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right)=k.$$

Zauważmy, że jeżeli ostatnie wyrażenie w nawiasie jest niezerowe, to jego wartość wynosi co najmniej dwa, a ponadto liczby $p,q,r$ nie mogą być wszystkie sobie równe. Stąd $k\geqslant 4$. Jak łatwo zauważyć, trójka $(p,q,r)=(n,n,n+1)$ jest rozwiązaniem przy $k=3n+1$ dla dowolnego $n\geqslant 1$. Analogicznie, trójka $(p,q,r)=(n,n+1,n+1)$ jest rozwiązaniem przy $k=3n+2$ dla dowolnego $n\geqslant 1$. Jeżeli wreszcie $3\mid k$, skorzystamy z jeszcze innej formy zapisu równania, mianowicie

$$p^3+q^3+r^3-3pqr=(p+q+r)^3-3(p+q+r)(pq+qr+rp),$$

aby zobaczyć, że zachodzić musi także $3\mid p+q+r$ i wobec tego niewątpliwie $9\mid k$. Co więcej, trójka $(p,q,r)=(n-1,n,n+1)$ stanowi rozwiązanie równania przy $k=9n$ dla dowolnego $n\geqslant 2$. Pozostaje już tylko zbadać przypadek $k=9$. Jeżeli dodatnie liczby całkowite $p,q,r$ są parami różne, zachodzi $k=\frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right)\geqslant(1+2+3)\frac{1}{2}(1+1+4)=18$; jeżeli natomiast $p=q\neq r$, przepisujemy równanie w formie $9=(2p+r)(p-r)^2$. Skoro $2p+r>1$, spełniona musiałaby być zależność $9=(2p+r)(p-r)^2$ oraz $|p-r|=1$, co nie jest możliwe, jako że wówczas $r=p\pm 1$, a przecież $9\neq 3p\pm 1$. Ostatecznie zatem dochodzimy do wniosku, iż wszystkie możliwe wartości $k\in\{1,\ldots,2020\}$ mogą być uzyskane poprzez usunięcie ze zbioru liczb mniejszych od 4 oraz wielokrotności 3, a następnie przywrócenie do niego wielokrotności 9 oprócz samej dziewiątki. Rezultat wynosi więc $2020-3-672+223=1568$.