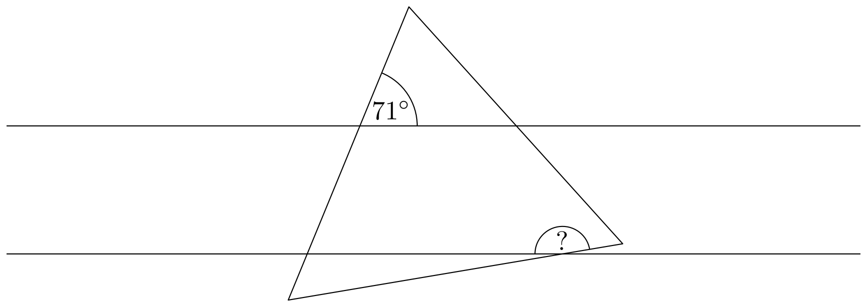
Aufgabe 1. Wie in der Skizze zu sehen, wird ein gleichseitiges Dreieck von einem Paar paralleler Geraden geschnitten. Bestimme die Größe des mit einem Fragezeichen markierten Winkels, wenn der zweite markierte Winkel mit $71°$ gegeben ist.



Aufgabe 2. Adele besitzt je ein T-Shirt und je einen Rock in jeder der folgenden sieben Farben: Rot, Blau, Grün, Gelb, Schwarz, Orange und Lila. Sie möchte immer ein T-Shirt und einen Rock in verschiedenen Farben tragen. Wenn sie ein rotes Kleidungsstück trägt, möchte sie außerdem, dass das zweite Kleidungsstück gelb ist. Wie viele solcher Outfits kann Adele zusammenstellen?

Aufgabe 3. Die Summe von sechs verschiedenen positiven ganzen Zahlen ist 22. Wie groß ist ihr Produkt?

Aufgabe 4. Wie viele identische Quader der Größe $6 \times 15 \times 20$ werden mindestens benötigt, um daraus einen lückenlosen Würfel zu bilden, wenn alle Quader gleich orientiert sein müssen?

Hinweis: Dass alle Quader gleich orientiert sein müssen, soll heißen, dass alle Quader in dieselbe Richtung schauen und weder gedreht noch gekippt verwendet werden dürfen.

Aufgabe 5. Sophie zeichnete eine Strecke der Länge 1 und wollte dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 0.2 konstruieren, in dem die Strecke eine der Seiten ist. Sophie fand heraus, dass es dafür mehrere Möglichkeiten gibt. Wie viele?

Aufgabe 6. In diesem Kryptogramm gilt: Gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern. Alle vorkommenden Ziffern sind ungleich 0. Berechne BAC.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & B \\ + & A & B & A \\ + & & C & C \\ \hline & B & A & C \end{array}$$

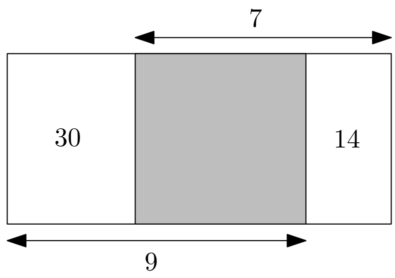
Aufgabe 7. Eine *leckere* Zahl ist eine positive ganze Zahl, bei der das Produkt der Ziffern 36 ist. Seien nun a und b folgendermaßen definiert:

- a ist die Ziffernsumme der kleinsten leckeren Zahl.
- b ist die kleinste Ziffernsumme einer leckeren Zahl.

Berechne die Differenz $a - b$.

Aufgabe 8. Am Tag der Fertigstellung bietet die erste Basis auf dem Planeten Mars Platz für 100 Personen. Danach bauen Roboter diese laufend aus, so dass die Basis jeden Monat 10 weitere Personen aufnehmen kann. Am Tag der Fertigstellung startet auch das erste Shuttle von der Erde zum Mars, um in einer 7-monatigen Reise 20 Siedler zur Basis zu befördern. Es ist die erste von n identischen Missionen, die für $0, 1, 2, \ldots, n-1$ Monate nach der Fertigstellung geplant sind. Kurz bevor neue Siedler ankommen, ist jeweils die Basis schon erweitert. Bestimme das maximale n, so dass auf der Basis immer genügend Platz für die ankommenden Siedler ist.

Aufgabe 9. Das Bild zeigt ein Rechteck, welches in drei kleinere Rechtecke zerteilt ist. Bestimme den Flächeninhalt des mittleren Rechtecks, wobei die Flächeninhalte der äußeren zwei Rechtecke und die zwei markierten Längen gegeben sind.



Aufgabe 10. Bibi und Tina fordern sich beim Náboj-Wettbewerb gegenseitig heraus: Sobald eine von ihnen für die Aufgabe mit der Nummer n eine falsche Antwort abgibt, muss sie $10n$ Liegestützen machen. Es gibt 42 Aufgaben. Bibi schaut sich nur Aufgaben an, deren Nummern ein Vielfaches von 5 sind. Tina schaut sich nur Aufgaben an, deren Nummern bei einer Division durch 5 den Rest 1 ergeben.

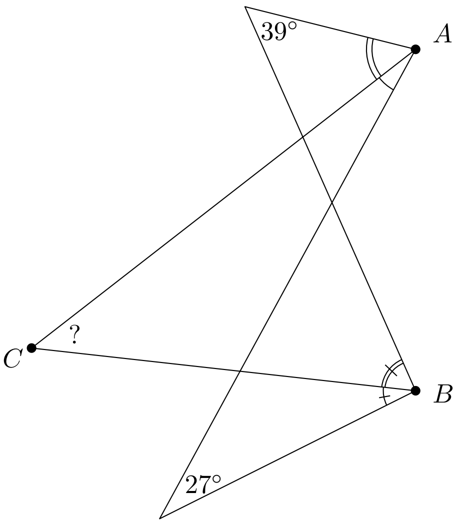
Es stellte sich heraus, dass jede von ihnen zumindest eine falsche Antwort abgegeben hat, keine Aufgabe zweimal falsch beantwortet wurde und Bibi und Tina gleich viele Liegestützen machen mussten. Wie viele Liegestützen hat Bibi dann mindestens machen müssen?

Aufgabe 11. In einer Gruppe von neun Freunden haben sich einige Geld ausgeliehen. Eines Tages beschließen sie, alle ihre Schulden zu begleichen. Die Tabelle zeigt die Schulden für jedes Paar von Freunden, beispielsweise ist Freund A dem Freund B genau 5 Geldeinheiten schuldig. Wir bezeichnen als *Transaktion*, wenn eine Person einer anderen Person Geld gibt. Wie viele Transaktionen braucht es mindestens, um alle Schulden zu begleichen?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	−5	−1	0	3	3	5	2	4
B	5	0	3	−5	1	0	2	7	−4
C	1	−3	0	−5	2	3	6	−3	0
D	0	5	5	0	−8	−4	7	2	1
E	−3	−1	−2	8	0	4	−11	4	−7
F	−3	0	−3	4	−4	0	6	−4	0
G	−5	−2	−6	−7	11	−6	0	−1	5
H	−2	−7	3	−2	−4	4	1	0	4
I	−4	4	0	−1	7	0	−5	−4	0

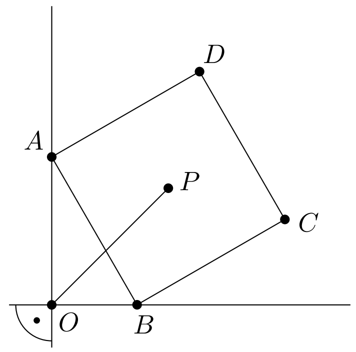
Aufgabe 12. Alex und Maxi haben beim Spazierengehen 35 Kastanien gefunden. Sie verteilen diese auf mehrere Haufen, wobei jeder Haufen aus mindestens zwei Kastanien besteht. Sie nehmen von jedem Haufen eine Kastanie und legen diese auf den ersten Haufen. Dadurch haben nun alle Haufen gleich viele Kastanien. Wie viele Kastanien waren zu Beginn am zweiten Haufen?

Aufgabe 13. In der folgenden Figur sind die Größen von zwei Winkeln explizit gegeben. Ferner ist bekannt, dass sich die Größen der gekennzeichneten, nebeneinander liegenden Winkel mit Scheitel im Punkt A wie 2:1 verhalten und dasselbe auch für die entsprechenden Winkel mit Scheitel in B gilt. Dabei ist der größere der beiden Winkel jeweils mit einem doppelten Bogen gekennzeichnet. Bestimme die Größe des Winkels $\angle BCA$ in Grad.



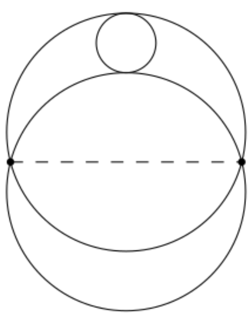
Aufgabe 14. Die Funktion $f(x) = 9x^2 + ax - 2022$ ist für alle reellen Zahlen x definiert. Für wie viele ganze Zahlen a enthält der Wertebereich genau 2022 verschiedene negative ganzzahlige Werte?

Aufgabe 15. Ein Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt P ist in den rechten Winkel $\angle BOA$ eingeschrieben, wobei $|AO| = 6$ und $|OP| = 4\sqrt{2}$ gilt. Bestimme unter diesen Voraussetzungen das Produkt der Abstände des Punktes D zu den Geraden OA und OB.



Aufgabe 16. Das U-Bahn-System der Stadt Nábojpolis besteht aus einer einzigen kreisförmigen Linie mit 2022 Stationen. Die Stationen sind von 1 bis 2022 durchnummeriert. Um von einer Station zur nächsten zu gelangen, braucht man stets gleich lang. Als Peter die Stadt besucht, kauft er ein Wochenticket und beschließt, die gesamte Zeit in der U-Bahn zu verbringen. Er beginnt seine Reise bei der Station 1 und sein Zug fährt die Stationen in aufsteigender Reihenfolge an – die nächste Station ist also 2. An der Wand einer Station sieht er ein schönes Rätsel. Das Rätsel zu lösen dauert viermal so lang, wie Peter bereits unterwegs war, bis er das Rätsel sah. Als er das Rätsel fertig löst, ist er gerade in der Station 2022. Bei welcher Station hat er das Rätsel entdeckt?

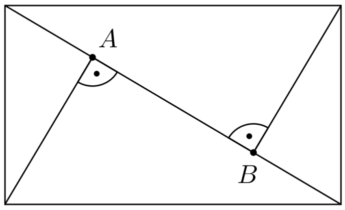
Aufgabe 17. In der folgenden Figur sind drei Kreise zu sehen. Der kleine Kreis mit Radius 1 berührt die beiden größeren Kreise, welche beide den gleichen Radius besitzen. Ferner liegt der Mittelpunkt eines Kreises genau in der Mitte der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der beiden anderen Kreise. Bestimme die Länge der gestrichelten Sehne.



Aufgabe 18. Es stehen 2022 Milch trinkende Drachen in einer Reihe. Der erste hat 1 Liter Milch in seinem Krug, der zweite 2 Liter, ..., Drache 2022 hat 2022 Liter Milch in seinem Krug. Der erste Drache leert nun die Hälfte seiner Milch plus einen halben Liter in den Krug des zweiten Drachen. Danach leert der zweite Drache die Hälfte seiner Milch plus einen halben Liter in den Krug des dritten Drachen. Das geht so weiter, bis Drache 2021 die Hälfte seiner Milch und einen halben Liter in den Krug des Drachen 2022 leert. Wie viel Milch (in Liter) enthält der Krug des Drachen 2022 danach?

Aufgabe 19. Der Punkt X wird zufällig in einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 2 ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Strecken AX, BX, CX und DX alle länger als 1 sind?

Aufgabe 20. Das Verhältnis zwischen den Seiten des Rechtecks ist $2:1$ und die Distanz von A nach B ist 1. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?



Aufgabe 21. Es waren einmal fünf Zwerge, die trugen Zipfelmützen, ein jeder in einer anderen Farbe. Zwei dieser Zwerge machten sich einen Spaß und tauschten ihre Mützen. Davon angesteckt fand solch eine Mützentauschaktion zwischen irgendwelchen zwei Zwergen noch einmal statt, und schließlich geschah es ein drittes Mal, dass zwei Zwerge ihre Zipfelmützen tauschten. Nach diesen drei spaßigen Aktionen trug keiner der Zwerge mehr die Zipfelmütze, die er zu Beginn auf seinem Kopf hatte. Auf wie viele Arten kann dieser gesamte Tauschprozess vonstatten gegangen sein?

Aufgabe 22. Marcus hat alle römischen Zahlen von $I, II, III, IV, \ldots$ bis zu einer Zahl $z \geq IV$ auf eine Tafel geschrieben, jede Zahl in eine neue Zeile. Aurelius stellt nun fest, dass die Zeichenfolgen IV, IX, XL, XC, CD und CM alle gleich häufig auf der Tafel vorkommen. Wie groß muss z mindestens sein?

Hinweis: Gib die gesuchte Zahl in ihrer Dezimalform an, nicht als römische Zahl.

Aufgabe 23. Von 50 Kindern spielen einige Eishockey, einige Feldhockey, einige betreiben auch beide Sportarten oder keine davon. Die Anzahl der Kinder, die gar kein Hockey spielen, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Feldhockey spielenden Kinder. Es gibt 15 Kinder mehr, die ausschließlich Eishockey spielen, als solche, die beide Sportarten betreiben. Finde alle möglichen Anzahlen für die Kinder, die kein Eishockey spielen, und berechne deren Produkt.

Aufgabe 24. Die Punkte A, B, C, D liegen auf einem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt M. Die Geraden AB und CD stehen im rechten Winkel zueinander und die Strecken AB und CD sind jeweils Durchmesser eines Kreises. Diese zwei Kreise berühren sich in einem einzigen Punkt P und sind gleich groß. Bestimme die Länge der Strecke MP.

Aufgabe 25. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von reellen Zahlen, so dass

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{n+1} + a_n + 24$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Bestimme den größtmöglichen Wert von $a_1 + a_{2022}$.

Aufgabe 26. Mehr als 39 %, aber weniger als 40 % der Mitglieder eines Schachclubs sind Buben. Wenn eines der Mädchen sich entschließt, aus dem Club auszutreten, dann liegt der Prozentanteil der Buben immer noch unter 40 %. Wenn aber stattdessen ein weiterer Bub dem Club beitritt, dann ist dieser Prozentanteil mindestens 40 %. Was ist die kleinstmögliche Anzahl der Mitglieder dieses Schachclubs?

Aufgabe 27. Die drei quadratischen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - bx + 1980, \\ f_2(x) &= x^2 - (b+1)x + 2024, \\ f_3(x) &= x^2 - (b+2)x + a, \end{aligned}$$

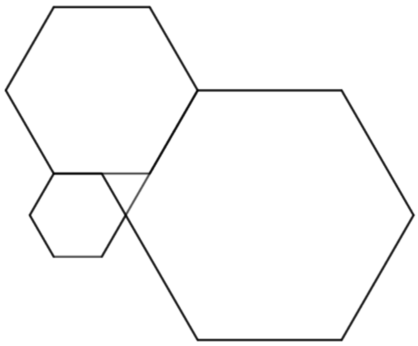
mit reellen Zahlen a, b haben die folgenden Eigenschaften: f_1 und f_2 haben eine gemeinsame Nullstelle, f_1 und f_3 haben ebenfalls eine gemeinsame Nullstelle und auch f_2 und f_3 haben eine gemeinsame Nullstelle, aber es gibt keine gemeinsame Nullstelle für alle drei Funktionen. Bestimme den Koeffizienten a.

Aufgabe 28. Bei einem Volleyballturnier waren insgesamt sechs Spieler dabei: Alice, Bob, Charlie, David, Eva und Franz. In jeder Runde spielten jeweils zwei Spieler gegen zwei andere Spieler. Jedes mögliche Paar spielte gegen jedes andere Paar exakt einmal. Alice hat 30 Mal gewonnen, David 12 Mal und Franz 18 Mal. Wie oft hat Bob gewonnen?

Aufgabe 29. Wir starten mit einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5. Wir teilen dieses Dreieck entlang seiner Höhe in zwei ähnliche Dreiecke und wiederholen diesen Vorgang mit jedem der Teildreiecke, wodurch sich die Anzahl der Dreiecke in jedem Schritt verdoppelt. Berechne den durchschnittlichen Umfang der Dreiecke, die man nach fünf Schritten erhält.

Aufgabe 30. Marcin hat sich entschieden, an seiner Kletterwand eine aus 10 Griffen bestehende Route zu klettern. Die Griffe sind nummeriert von 1 bis 10, wobei 1 der am tiefsten gelegene und 10 der höchstgelegene Griff ist. Er benutzt dabei nur einen Arm und ein Bein wie folgt: Er startet mit der Hand auf Griff 3 und dem Fuß auf Griff 1. In einem Schritt kann er die Hand oder den Fuß um mehrere Griffe aufwärts bewegen, aber die Nummern der zwei Griffe, die er zu jedem Moment benutzt, dürfen sich höchstens um 3 und müssen sich mindestens um 1 unterscheiden. Dabei muss sich die Hand stets höher als der Fuß befinden. Die Route gilt als beendet, sobald er Griff 10 festhält. Wie viele verschieden Routen kann Marcin so klettern?

Aufgabe 31. Das kleinste der drei regelmäßigen Sechsecke in dieser Abbildung hat Seitenlänge 1. Wie groß ist der Flächeninhalt des kleinsten Kreises, der alle drei Sechsecke einschließt?



Aufgabe 32. Thomas und Veronika spielen ein Spiel auf einem 42×42 großen Schachbrett. Zuerst platziert Thomas $x \geq 8$ Springer auf dem Schachbrett, auf jedem Feld maximal einen. Nachdem Veronika acht Springer ausgewählt hat, entfernt Thomas alle Springer vom Brett, die Veronika nicht gewählt hatte. Veronika gewinnt, falls keine der acht verbleibenden Springer einander angreifen. Bestimme das kleinste x, für welche Veronika sicher sein kann, dass sie gewinnt, egal wie Thomas die x Springer platziert.

Hinweis: Ein Springer greift andere Springer nach den üblichen Regeln im Schach an.

Aufgabe 33. Chris ist mit seinem Ruderboot auf einem Fluss unterwegs, der eine Meile breit ist. Er rudert immer mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Er benötigt 27 Minuten, um in seinem Ruderboot eine Meile flussabwärts zu gelangen, und 36 Minuten, um von der einen Seite des Flusses genau den gegenüber liegenden Punkt am anderen Ufer zu erreichen. Wie lange braucht er, um eine Meile flussaufwärts zu rudern? Gib die Antwort in Minuten an.

Aufgabe 34. Die Zwillingsbrüder Felix und Lorenz trainieren auf einer ovalen Laufbahn. Sie starten am selben Punkt, der deutlich als Start gekennzeichnet ist, und laufen in der gleichen Richtung um die Laufbahn, wobei jeder seine konstante Geschwindigkeit beibehält. Das Training endet, sobald der Neuling Felix eine Runde auf der Laufbahn zurückgelegt hat und zum Startpunkt zurückkehrt. Lorenz ist hochtalentiert und läuft sechsmal schneller als Felix.

Die Zwillinge sehen identisch aus. Wenn man sich jedoch einen Schnappschuss aus dem Training anschaut, bei dem es sich einfach um ein Foto des Stadions handelt und auf dem die Uhrzeit der Aufnahme nicht festgehalten wird, kann man in der Regel feststellen, um welchen Bruder es sich handelt – nur anhand der oben genannten Informationen und dieses einen Schnappschusses. Wie oft kann man während des Trainings einen Schnappschuss machen, bei dem man die Brüder nicht unterscheiden kann?

Hinweis: Weder das Foto der beiden zu Beginn noch das am Ende des Trainings wird mitgezählt.

Aufgabe 35. Ein Textdokument bestehend aus durchgängigem Text wurde ursprünglich mit 60 Zeilen pro Seite gesetzt. Als die Anzahl der Zeilen pro Seite auf 57 reduziert wurde, erhöhte sich die Seitenanzahl um zwei. Bestimme die Summe aus der kleinsten und der größten Gesamtzahl an Seiten, die das Textdokument ursprünglich gehabt haben kann.

Aufgabe 36. *Wechselläuten* ist eine Form des Glockenläutens, bei der *Lieder* aus einer Folge von *Runden* gebildet werden. Pro Runde werden sämtliche Glocken in einer bestimmten Reihenfolge genau je einmal geläutet. Betrachte nun drei Glocken, bezeichnet als 1, 2 und 3. Aus technischen Gründen kann sich die Position einer Glocke in zwei aufeinander folgenden Runden höchstens um eins unterscheiden. Ein Lied wird *langweilig*, wenn zwei aufeinander folgende Runden identisch sind. Wie viele nicht langweilige Lieder mit 21 Runden gibt es, deren erste und letzte Runde jeweils $(1, 2, 3)$ ist?

Aufgabe 37. Carola hat fünf regelmäßige Vielecke $P_0, P_1, \dots P_4$, alle mit Seitenlänge 1. Sie nimmt das Vieleck P_0, das ein Quadrat ist, und legt es auf den Tisch. Danach fügt sie die anderen vier Vielecke nach den folgenden Regeln auch auf den Tisch hinzu:

- Im Uhrzeigersinn gesehen, teilt sich jedes der Vielecke $P_1, \dots, P_4$ genau eine Seite mit dem Quadrat P_0.
- Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ hat das Vieleck P_i genau eine Seite mit dem Vieleck P_{i+1} gemeinsam und das Gleiche gilt auch für P_4 und P_1.

Anschließend misst Carola den Umfang der Fläche, die durch diese fünf Vielecke überdeckt wird. Bestimme alle Werte, die sie unter der Beachtung genau dieser Regeln erhalten haben kann, und gib als Antwort deren arithmetisches Mittel an.

Aufgabe 38. Es sei $f\colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine injektive Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x) > -\frac{4}{x}$ und $f(f(x)+\frac{4}{x}) = 3$ für alle $x > 0$ gilt. Bestimme $f(16)$.

Hinweis: Eine Funktion f ist *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

Aufgabe 39. Lisa findet auf ihrer Wanderung eine Quelle. Sie hat zwei Flaschen dabei, eine mit dem Volumen von 2022 ml und eine mit dem Volumen von 51 ml. Sie kann Wasser von einer Flasche in die andere füllen, kann eine beliebige Flasche voll auffüllen und kann eine beliebige Flasche in den Bach entleeren. Durch diese drei Arten von Aktionen möchte sie folgende Situation erreichen:

- Sie kennt das Volumen V des Wassers in einer der Flaschen.
- Dieses Volumen V ist das kleinstmögliche unter den gegebenen Bedingungen.

Wie oft muss Lisa mindestens das Wasser von einer Flasche in die andere füllen, um ihr Ziel zu erreichen?

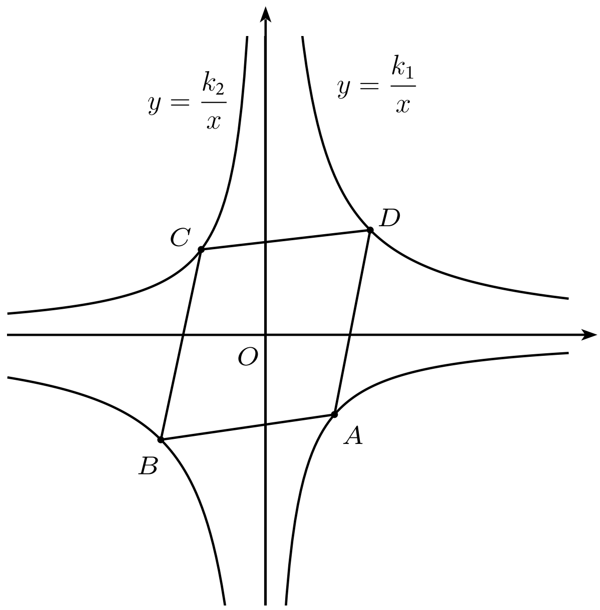
Aufgabe 40. Seien a und b positive ganze Zahlen, für die $a + b$ ein Teiler von $51 \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$ ist. Wie viele verschiedene Werte kann

$$\frac{51 \cdot \mathrm{kgV}(a, b)}{a + b}$$

annehmen?

Hinweis: Mit $\mathrm{kgV}(a, b)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der positiven ganzen Zahlen a und b gemeint.

Aufgabe 41. In der folgenden Abbildung liegen die Eckpunkte der Raute / des Rhombus $BADC$ auf den Graphen der Funktionen $y = \frac{k_1}{x}$ und $y = \frac{k_2}{x}$. Berechne $|\frac{k_1}{k_2}|$, wenn die Größe des Winkels $\angle BCD$ mit $120°$ vorgegeben ist.



Aufgabe 42. In einem Beutel befinden sich 2022 Murmeln in sechs verschiedenen Farben. Es sei bekannt, dass beliebige 2000 der Murmeln stets mindestens fünf verschiedene Farben enthalten. Welches ist das minimale N, so dass wir, wenn wir nur die Information aus dem letzten Satz haben, sicher sein können, dass, wenn wir beliebige N Murmeln nehmen, mindestens vier verschiedene Farben darunter sind?

Aufgabe 43. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(x) = f(137 - x) = f(2202 - x) = f(3028 - x).$$

Was ist die größte Anzahl unterschiedlicher Werte, die in der Liste $f(1), f(2), f(3), \dots, f(2022)$ erscheinen können?

Aufgabe 44. Gegeben sei ein gleichschenkeliges, rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| = |AC| = 4$. Im Inneren des Dreiecks wird ein Punkt P mit $|PA| = 2$ gewählt. Bestimme den minimalen Wert von $\frac{1}{2}|BP| + |CP|$.

Aufgabe 45. In einem 4×4–Gitter aus Quadraten werden in acht der 16 Quadrate Spiegel platziert. Diese Spiegel

- befinden sich jeweils auf einer Diagonalen des Quadrats,
- reflektieren nur auf einer Seite,
- reflektieren ankommende Strahlen, wenn diese auf die spiegelnde Seite treffen,
- und verschlucken die Strahlen, wenn diese auf die andere, nicht spiegelnde Seite treffen.

In jeder der vier Zeilen ist links und rechts am Rand des Gitters jeweils ein Laser platziert, der waagrecht ins Innere des Gitters zeigt. Wie viele Konfigurationen von Spiegeln erfüllen die Bedingung, dass alle acht Laserstrahlen das Gitter entweder nach oben oder nach unten hin verlassen?

Hinweis: Die Strahlen sollen also weder verschluckt werden noch sollen sie auf eine der Laserquellen, die sich an der linken bzw. rechten Außenwand des Gitters befinden, treffen.

Aufgabe 46. Finde die kleinste positive ganze Zahl, die zu ihrem Siebenfachen wird, dadurch dass man ihre letzte Ziffer nach vorne verschiebt.

Hinweis: Hier ein Beispiel für das Verschieben der letzten Ziffer nach vorne: 135 wird zu 513

Aufgabe 47. Die zwei Magier Arithmetix und Combinatorica treffen sich zu einer Revanche – sie hatten sich erstmals bei Náboj 2018 getroffen. Beide starten mit 100 Lebenspunkten (LP). Arithmetix kennt zwei Zaubersprüche: Einer macht 50 LP Schaden, in anderen Worten, er reduziert die Lebenspunkte des Gegners um 50 LP, der andere reduziert die Zielgenauigkeit des Gegners bis zum Ende des Spiels um 25%, beispielsweise von 65% auf 40%. Die Zielgenauigkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zauber auch tatsächlich funktioniert. Dabei wird negative Zielgenauigkeit als 0% aufgefasst. Beide Zaubersprüche von Arithmetix haben zu Beginn 100% Zielgenauigkeit. Combinatorica verwendet immer den gleichen Zauberspruch, der 50 LP Schaden macht, mit einer ursprünglichen Zielgenauigkeit von 100%. Die zwei Magier wenden abwechselnd jeweils einen Zauberspruch an. Arithmetix beginnt. Er entscheidet jedes Mal, welchen Zauberspruch er verwendet, indem er eine faire Münze wirft. Das Duell endet, sobald einer der Magier 0 oder weniger Lebenspunkte hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden gewinnt, ohne Schaden zu nehmen?

Aufgabe 48. Seien a und b positive ganze Zahlen. Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $A_1 = b$, $A_2 = a$ und

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 3.$$

Sei $(B_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $B_1 = a + 2b$, $B_2 = 3a + b$ und

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 3.$$

Außerdem gibt es Indices k und l mit $A_k = 2022$ und $B_l = 2793$. Was ist der kleinste Wert von $a \cdot b$?

Aufgabe 49. Ein perfekter Binärbaum mit einer Tiefe von 10 hat $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ Knoten. An jedem Knoten des Baumes ist ein Apfel und in jedem Apfel befinden sich $2^{11} - 2$ Würmer. Alle Kanten haben die Länge 1. Plötzlich entscheiden alle Würmer in allen Äpfeln, dass es an der Zeit ist, den Apfel zu wechseln und zwar so, dass keine zwei Würmer, die im selben Apfel lebten, zusammen in einen anderen Apfel ziehen, und kein Wurm in seinem ursprünglichen Apfel bleibt. Wie weit müssen alle Würmer aller Äpfel zusammen kriechen, um diesen neuen Zustand zu erreichen?

Hinweis: Ein *perfekter Binärbaum* ist ein Baum, in dem alle inneren Knoten genau zwei Kinder und alle Blätter die gleiche Tiefe haben.

Aufgabe 50. Sei p eine Primzahl. Dann bezeichnen wir mit N_p die Anzahl aller Tripel (a, b, c), so dass $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ und

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3abc \pmod{p}$$

gilt. Finde die Summe aller Primzahlen $p \leq 1000$ mit $N_p > p^2 + p$.

Aufgabe 51. Auf wie viele Art und Weisen kann man Könige (mindestens einen) so auf ein 3×11-Schachbrett stellen, dass sich keine zwei gegenseitig bedrohen?

Hinweis: Ein König bedroht alle acht Felder, die an das Feld, auf dem er sich befindet, waagrecht, senkrecht oder diagonal angrenzen.

Aufgabe 52. Für ein gegebenes spitzwinkliges Dreieck ABC seien die Punkte A', B', C' wie folgt definiert: A' ist der Punkt, in dem die Höhe von A auf BC den nach außen gerichteten Halbkreis mit BC als Durchmesser schneidet. Die Punkte B', C' sind entsprechend definiert. Bezeichne $[XYZ]$ den Flächeninhalt eines Dreiecks XYZ. Bekannt ist $[BCA'] = 5$, $[B'CA] = 6$, $[BC'A] = 7$. Wie groß ist dann $[ABC]$?

Aufgabe 53. Im Echtzeit-Strategiespiel *Die Siedler* spielt Valentin auf einer neuen Insel, die folgende Eigenschaften hat:

- Die Insel in Form einer Kreisscheibe hat an ihrem Ufer drei Häfen A, B und C.
- Es gibt vier wichtige Gebäude D, E, G und H, die die Eckpunkte eines Rechtecks $DEGH$ bilden.
- Im Zentrum D der Insel befindet sich das Schloss.
- Die Kirche E liegt genau auf halber Strecke zwischen Hafen B und Hafen A.
- Die Jägerhütte G liegt näher am Hafen B als am Hafen A.
- Das Lager H mit allen Rohstoffen liegt genau im Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Valentin weiß, dass die Entfernung von D nach E 8 km und die Entfernung von E nach G 13 km beträgt. Wie viele Kilometer muss er sein Erz vom Lager zum nächst gelegenen Hafen transportieren?