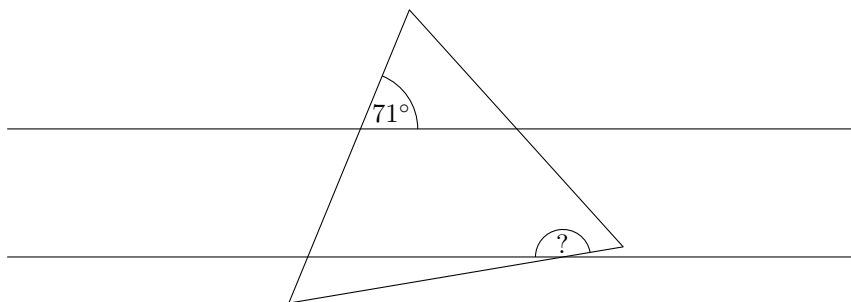
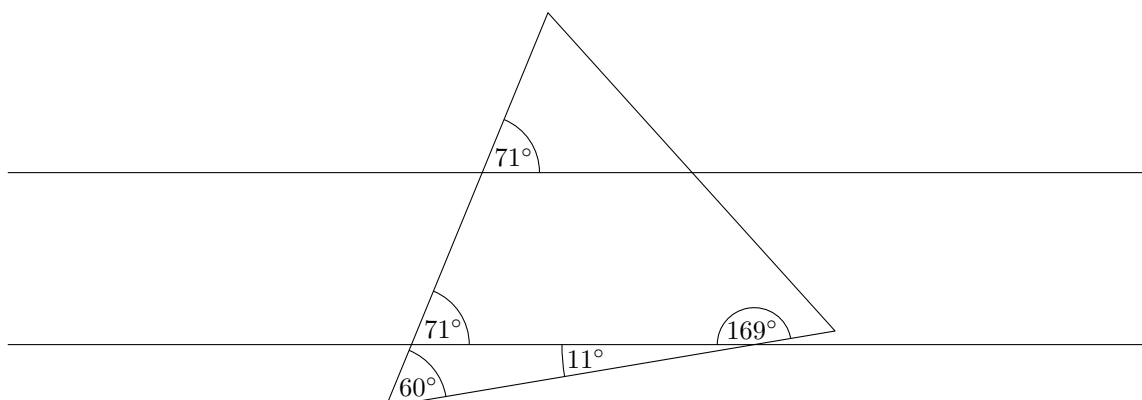


**Ülesanne 1.** Võrdkülgse kolmnurga külgesid lõikab kaks paralleelset sirget. Joonisel on antud kujundi ühe nurga suurus. Leia küsimärgiga tähistatud nurga suurus.



*Vastus.* 169

*Lahendus.* Kuna sirged on paralleelsed ja kuna kolmnurga sisenurkade summa on  $180^\circ$ , siis saame arvutada nurkade suurused väiksemas kolmnurgas, mis asub alumise joone all:  $60^\circ$ ,  $180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$  ja  $180^\circ - 109^\circ - 60^\circ = 11^\circ$ . Seega on otsitava nurga suurus  $180^\circ - 11^\circ = 169^\circ$ .



**Ülesanne 2.** Adelel on seitse eri värvi T-särki ja seitse eri värvi seelikut, kus värvid on punane, sinine, roheline, kollane, must, oranž ja lilla. Ta tahab alati kanda seelikut ja T-särki, mis oleksid eri värvi. Kui üks neist kahest riideesemest on punane, siis soovib ta, et teine oleks kindlasti kollane. Kui mitu erinevat sobivat rõivakomplekti saab ta nii moodustada?

*Vastus.* 32

*Lahendus.*  $6 \cdot 6$  rõivakomplekti saab moodustada värvidest, mis on punasest erinevad. Kuues neist on seelik ja T-särk sama värvi. Lisaks on kaks rõivakomplekti, mis kasutavad vaid punast ja kollast värvi. Kokku on sobivaid rõivakomplekte  $36 - 6 + 2 = 32$ .

**Ülesanne 3.** Kuue erineva positiivse täisarvu summa on 22. Mis on nende korrutis?

*Vastus.* 840

*Lahendus.* Vähim võimalik 6 erineva positiivse täisarvu summa on  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ . Kuna soovitud summa on vaid ühe võrra suurem, siis on ainus võimalus  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$ , kuna ükskõik mis teisele täisarvule üht liites saame kaks arvu, mis on sama suured.  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 840$

**Ülesanne 4.** Vähemalt kui mitut samasugust  $6 \times 15 \times 20$  plokki on vaja, et ehitada neist plokkide täis kuup, kui kõik plokid peavad olema asetatud samapidi?

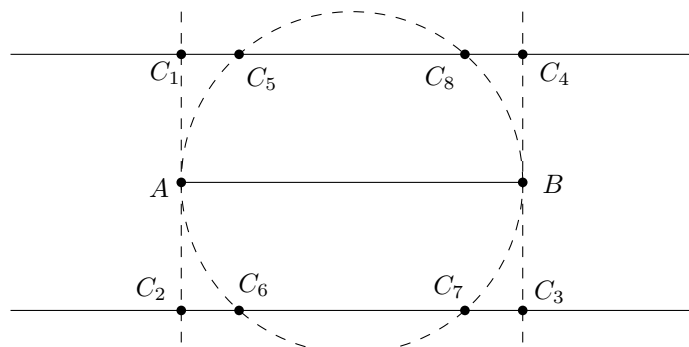
*Vastus.* 120

*Lahendus.* Asetuse tingimus ütleb meile, et kuubi küljepikkus peab jaguma arvudega  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $15 = 3 \cdot 5$  ja  $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ , seega ka arvuga  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ , mis on selgelt juba ise sobiv küljepikkus. Plokke on seega vaja  $\frac{60^3}{6 \cdot 15 \cdot 20} = 120$ .

**Ülesanne 5.** Sandra joonestas pikkusega 1 sirglõigu ja soovis seejärel konstrueerida pindalaga 0,2 täisnurkset kolmnurka, kasutades joonestatud sirglõiku kolmnurga ühe küljena. Siis mõistis ta, et seda on võimalik teha mitmel eri viisil. Kui mitmel?

*Vastus.* 8

*Lahendus.* Olgu  $A, B$  Sandra lõigu otspunktid. Paneme tähele, et kolmandast tipust  $C$  küljele  $AC$  tõmmatud kõrgus peab olema pikkusega  $0,4$  (siis on kolmnurga pindala  $\frac{1 \cdot 0,4}{2} = 0,2$ , nagu soovitud). Sellest tuleneb, et  $C$  peab asuma ühel kahest küljega  $AB$  paralleelsest sirgest. Kui täisnurk on  $A$  juures, siis peab  $C$  asuma küljega  $AB$  risti oleval sirgel, mis läbib tippu  $A$ . Selle lõikepunktid kummagi paralleelse sirgega annavad esimesed kaks lahendit, joonisel  $C_1$  ja  $C_2$ . Sarnaselt kui täisnurk on tipu  $B$  juures, saame lahendid  $C_3$  ja  $C_4$ . Kui täisnurk on tipu  $C$  juures, siis ütleb Thalese teoreem, et see vastab  $C$  asumisele ringjoonel diameetriga  $AB$ . Kuna  $0,4 < \frac{1}{2}$ , siis on lõikepunkte neli:  $C_5, C_6, C_7$  ja  $C_8$ , mis ükski ei kattu eelnevalt leitud punktidega. Järeldame, et kokku on kaheksa erinevat viisi.



**Ülesanne 6.** Järgmise krüptogrammi iga täht tähistab erinevat nullist erinevat numbrit. Leia  $\overline{BAC}$ .

$$\begin{array}{r} A \quad A \quad B \\ + \quad A \quad B \quad A \\ + \quad \quad C \quad C \\ \hline B \quad A \quad C \end{array}$$

*Vastus.* 732

*Lahendus.* Kolmandas tulbas näeme, et  $A + B$  liitmine numbrile  $C$  annab endiselt viimaseks numbriks  $C$ , mis tähendab, et  $A + B = 10$ . Nüüd, vaadates teist tulp, teame juba, et esimesest tulbast lisandub üks kümneline, seega  $A + B + C + 1 = 11 + C = \overline{1A} = 10 + A$ , kuna summa on selgelt suurem kui lihtsalt  $A$ . See annab, et  $C + 1 = A$ . Liitmine esimesest tulbast annab seega  $A + A + 1 = B$ . Nüüd on meil kolm võrdust  $A, B$  ja  $C$  jaoks, mida lahendades saame, et  $A = 3$ ,  $B = 7$  ja  $C = 2$  ning seega on vastus  $BAC = 732$ .

**Ülesanne 7.** Maitsev arv on positiivne täisarv, mille numbrite korrutis on 36. Olgu arvud  $a$  ja  $b$  defineeritud järgmiselt:

- $a$  on kõige väiksema maitstva arvu numbrite summa,
- $b$  on kõige väiksem numbrite summa, mis saab olla maitssval arvul.

Leia vahe  $a - b$ .

*Vastus.* 3

*Lahendus.* Paneme tähele, et 36 algtegurdus on  $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ . Vähimal maitssval arvul on selgelt ka kõige väiksem võimalik arv numbreid. Kuna pole võimalik, et maitsev arv oleks ühekohaline, siis piisab vaadata kahekohalisi maitssvaid arve, mille üks näide on 66. Et leida kõige väiksem võimalik, mis oleks siis ka vähim maitsev arv, peab kõigepealt tegema esimese numbri (ja 36 jagaja)  $d$  võimalikult väikeseks, kusjuures  $\frac{36}{d}$  ei tohi olla suurem kui 9. Näeme, et see on 49, numbrite summaga 13.

Et leida maitsev arv, mille numbrite summa on võimalikult väike, vaatame kõigepealt arvu 2233, mille numbrite summa on 10. Kuna nende numbrite puhul kehtib  $d_1 + d_2 \leq d_1 \cdot d_2$  ja kuna iga maitstva arvu numbrid peavad jagama arvu 36, siis saame kontrollida näiteks kui kasutada numbrit 4, siis annab arvu 433 numbrite summa 10, nagu ka arvu 2233 numbrite summa. Ükskõik missuguse kahe numbri kombineerimisel läheb summa kas suuremaks kui 10 või jääb sellega võrdseks. Vähim võimalik numbrite summa on seega 10. Seega on vahe  $13 - 10 = 3$ .

**Ülesanne 8.** Ühel päeval lõpetasid robotid Marsil esimese baasi ehitamise, kus on ruumi 100 inimesele. Sellest ajast alates on nad baasi laiendanud, et iga kuu aja järel mahuks baasi 10 inimest rohkem. Samal päeval, kui baasi algne ehitamine lõpetati, alustab Marsi poole teed esimene kosmoselaev, mis 7 kuud kestva teekonna järel viib Marsile 20 uut elanikku. See oli esimene  $n$  ühesugusest missioonist, mis stardivad vastavalt  $0, 1, 2, \dots, n-1$  kuud pärast esimest päeva. Leia suurim võimalik  $n$  väärtus, mille puhul Marsi baasi mahutavust kunagi ei ületata.

*Vastus.* 16

*Lahendus.* Seitse kuud pärast valmimispäeva saabuvad esimesed 20 inimest ja selles ajast alates on baasis  $k$ ndal kuul pärast valmimispäeva  $20(k - 6)$  inimest,  $k \geq 7$ . Selle ajaga suureneb baasi mahtuvus  $100 + 10k$  inimeseni, mis annab meile võrratuse

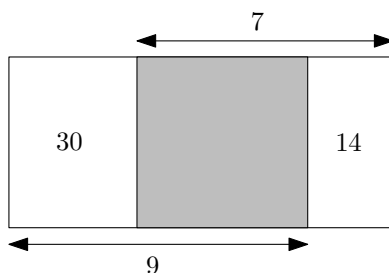
$$20(k - 6) \leq 100 + 10k.$$

Seda saame lihtsustada kujule

$$k \leq 22.$$

Seega ei saanud viimane kosmoselaev väljuda hiljem kui seitse kuud enne kahekümne teist kuud ja seega on kõige pikem võimalik kosmoselaevade välja saatmise graafik  $0, 1, \dots, 15 = 22 - 7$  kuud pärast valmimispäeva. Seega on  $n$  suurim võimalik väärtus 16.

**Ülesanne 9.** Pildil on ristkülik, mis on jagatud kolmeks väiksemaks ristkülikuks. Leia keskmise ristküliku pindala, kui antud on ülejäänud kahe ristküliku pindalad ja kaks märgitud pikkust.



*Vastus.* 42

*Lahendus.* Olgu ristkülikute kõrguseks  $h$  ja otsitav pindala  $A$ . Siis  $30 + A = 9h$  ja  $A + 14 = 7h$ . Lahendades selle võrrandisüsteemi saame, et  $h = 8$  ja  $A = 42$ .

**Ülesanne 10.** Marek ja Laur otsustavad üksteisele väljakutse esitada: kui keegi neist esitab Náboj ülesandele number  $n$  vale vastuse, siis peab esitaja tegema  $10n$  kätekõverdust. Náboj'l on 42 ülesannet. Marek vaatas ainult neid ülesandeid, mille järjekorranumbrid jaguvad arvuga 5, ja Laur ainult neid, mille järjekorranumbrid annavad arvuga 5 jagamisel jäägi 1. Nad mõlemad esitasid vähemalt ühe vale vastuse, ühelegi ülesandele ei vastatud kaks korda valesti ja Marek tegi sama arvu kätekõverdusi, mis Laur. Mis on vähim võimalik arv kätekõverdusi, mida Marek võis teha?

*Vastus.* 550

*Lahendus.* Kuna Marek lahendab ainult neid ülesandeid, mille järjekorranumber jagub arvuga 5, siis jagub Mareki poolt tehtud kätekõverduste arv 50ga. Seega peab ka Lauri poolt tehtud kätekõverduste arv jaguma 50ga. Kuna Laur lahendas ainult ülesandeid, mille järjekorranumbrid andsid viiega jagamisel jäägi 1, siis pidi Laur esitama vähemalt 5 valet vastust, et tema kogu kätekõverduste arv jaguks 50ga.

Kui Laur esitas valed vastused ülesannetele 1, 6, 11, 16 ja 21 ja Marek valed vastused ülesannetele 10, 20 ja 25, siis tegid nad kumbki 550 kätekõverdust. Kuna 1, 6, 11, 16 ja 21 on viis Lauri lahendatud ülesannet, mille järjekorranumbrite summa on vähim võimalik, siis ongi 550 vähim võimalik kätekõverduste arv, mida Marek teha sai.

**Ülesanne 11.** Üheksast sõbrast koosnevas rühmas on mõned teistele raha laenanud. Ühel päeval otsustavad nad võlgadest vabaneda. Tabelis on kirjas iga sõprade paari kohta võlgnevused, nt  $A$  on  $B$ -le võlgu 5 rahaühikut. Kui *ülekanne* tähendab, et üks inimene annab mingi koguse raha teisele, leia vähim võimalik arv ülekandeid, mis on vajalik, et kõigist võlgadest vabaneda.

|   | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G   | H  | I  |
|---|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| A | 0  | -5 | -1 | 0  | 3  | 3  | 5   | 2  | 4  |
| B | 5  | 0  | 3  | -5 | 1  | 0  | 2   | 7  | -4 |
| C | 1  | -3 | 0  | -5 | 2  | 3  | 6   | -3 | 0  |
| D | 0  | 5  | 5  | 0  | -8 | -4 | 7   | 2  | 1  |
| E | -3 | -1 | -2 | 8  | 0  | 4  | -11 | 4  | -7 |
| F | -3 | 0  | -3 | 4  | -4 | 0  | 6   | -4 | 0  |
| G | -5 | -2 | -6 | -7 | 11 | -6 | 0   | -1 | 5  |
| H | -2 | -7 | 3  | -2 | -4 | 4  | 1   | 0  | 4  |
| I | -4 | 4  | 0  | -1 | 7  | 0  | -5  | -4 | 0  |

Vastus. 6

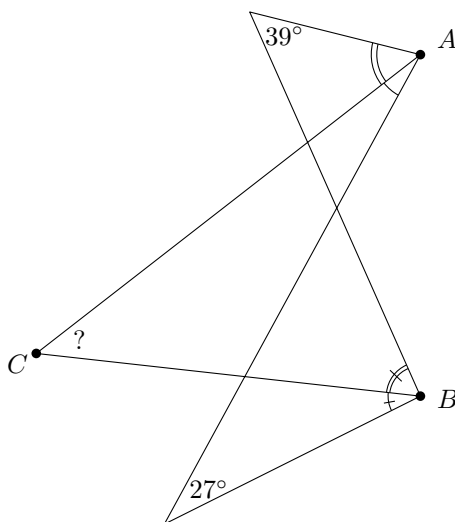
**Lahendus.** Kõik read kokku liites saame üheksa sõbra bilansid:  $+11, +9, +1, +8, -8, -4, -11, -3, -3$ . Kuna neist viis on negatiivsed, siis peab toimuma vähemalt viis ülekannet. Teisest küljest peab üks neist kandma raha üle sõbrale, kelle bilanss on  $+1$  ja üle kantav summa ei saa olla ülekandja ainus tehing, seega vajalikud on vähemalt 6 ülekannet. Seda on lihtne saavutada.

**Ülesanne 12.** Artur ja Martin leidsid jalutades 35 kastanimuna. Nad jagasid need mitmesse (rohkem kui ühte) kuhja, igaühes vähemalt 2 kastanimuna, ja siis võtsid igast kuhjast ühe kastanimuna ja panid selle esimesse kuhja. Nüüd on igas kuhjas sama arv kastanimune. Kui mitu kastanimuna oli alguses teises kuhjas?

Vastus. 8

**Lahendus.** 35 positiivsed jagajad on 1, 5, 7, 35. Kuna kõik kuhjad on lõpuks sama suured, siis peab üks neist jagajaist olema kuhjade arv. Kuna kuhjasid on palju, siis ei saa see olla 1. Samuti ei saa see olla 35, kuna igas kuhjas oleks siis ainult üks kastanimuna. Kui oleks seitse kuhja, siis peaks lõpuks igas kuhjas olema viis kastanit, aga seega oleks algsest kuhjade suurused  $-1, 6, 6, 6, 6, 6, 6$ , mis ei ole võimalik. Ainus võimalik lahendus on 5 kuhja algse kastanite jaotusega 3, 8, 8, 8, 8.

**Ülesanne 13.** Järgmisel pildil on arvuliselt antud kahe nurga suurused. Lisaks teame, et punkti  $A$  juures tähistatud nurkade suurused suhtuvad kui  $2 : 1$  ja sama kehtib punkti  $B$  juures tähistatud nurkade jaoks; suurem nurk on alati tähistatud topeltkaarega. Leia nurga  $ACB$  suurus kraadides.



Vastus. 31

**Lahendus.** Kui tähistame  $|\angle PCD| = \alpha$  ja  $|\angle PBD| = \beta$ , siis saame, et  $39^\circ + 3\alpha = 27^\circ + 3\beta$ , kasutades sisenurkade summat kolmnurkades  $AOC$  ja  $BOD$ . Analoogselt järeldame, et  $|\angle BAC| + |\angle ACP| = |\angle BPC| + |\angle ABP|$ , millest saame, et  $39^\circ + 2\alpha = |\angle BPC| + 2\beta$ . Esimesest võrdusest arvutame, et  $\beta - \alpha = 4^\circ$  ning siis leiame teise võrduse abil, et  $|\angle BPC| = 39^\circ + 2(\alpha - \beta) = 31^\circ$ .

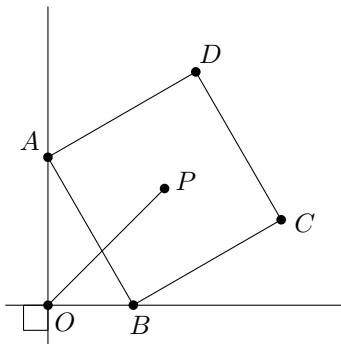
**Ülesanne 14.** Kui mitme täisarvu  $a$  jaoks saavutab funktsioon  $f(x) = 9x^2 + ax - 2022$ , mis on defineeritud kõigi reaalarvude  $x$  jaoks, täpselt 2022 erinevat negatiivset täisarvulist väärtust?

Vastus. 11

**Lahendus.** Kirjutades  $f(x) = (3x + \frac{a}{6})^2 - \frac{a^2}{36} - 2022$  näeme, et  $f$  saavutab täpselt kõik reaalarvulised väärtused, mis on suuremad kui  $-\frac{a^2}{36} - 2022$  või sellega võrdsed. Antud tingimus tähendab siis, et  $-2023 < -\frac{a^2}{36} - 2022 \leq -2022$ , mis on võrdväärne tingimusega  $\frac{a^2}{36} < 1$  ja seega  $a^2 < 36$ . See kehtib täpselt väärtuste  $a \in \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$  jaoks ja seega on vastus 11.

**Ülesanne 15.** Ruut  $ABCD$  keskpunktiga  $P$  joonistatakse täisnurkse kolmnurga  $AOB$  küljele. Kui on antud, et

$|AO| = 6$  ja  $|OP| = 4\sqrt{2}$ , siis leia kahe kauguse korrutis: punkti  $D$  kauguse sirgest  $OA$  ja punkti  $D$  kauguse sirgest  $OB$ .



*Vastus.* 48

*Lahendus.* Tõmbame ristlõigud punktist  $P$   $x$ -teljele (aluspunkt  $E$ ) ja  $y$ -teljele (aluspunkt  $F$ ). Siis on kolmnurgad  $PFA$  ja  $PEB$  võrdsed. Seega  $|PF| = |PE|$ . Edasi näeme, et  $PFOE$  on ruut, seega  $|OE| = |OF| = \frac{OP}{\sqrt{2}} = 4$ . Seega  $|BE| = |AF| = |OA| - 4 = 2$  ja  $|OB| = |OE| - |BE| = 4 - 2 = 2$ . Lisaks kui tõmbame ristlõigu punktist  $D$   $y$ -teljele, siis saame, et kolmnurgad  $DGA$  ja  $AOB$  on võrdsed, seega  $|DG| = |OA| = 6$ ,  $|AG| = |OB| = 2$ . Seega  $x_D = 6$ ,  $y_D = 8$  ning  $k = 48$ .

**Ülesanne 16.** Nábojpolise metroosüsteemis on üksainus ringliin 2022 jaamaga, mille nimed on  $1, 2, \dots, 2022$ . Iga kahe naaberjaama vahelised kaugused on võrdsed. Linna külastades ostis Peeter nädalapileti ja otsustas kogu aja veeta metros, tehes lihtsalt kogu ringliinile mitu korda ringi peale. Ta alustab oma reisi jaamas 1 ja ta rong sõidab jaamanumbrite suurenemise suunas (st järgmine jaam on 2). Ühe jaama seinal näeb ta ilusat ülesannet. Ülesande lahendamine võtab aega neli korda kauem, kui Peetri reis seni kestnud on, ja kohe pärast lahenduse leidmist avastab ta end jaamast 2022. Mis oli ülesannet sisaldanud jaama number?

*Vastus.* 1214

*Lahendus.* Olgu  $x$  jaam, kus Peeter näeb ülesannet. Kaugus jaamast 1 (Peetri alguspunkt) kuni jaamani  $x$  on  $x - 1$ . Läbitud vahemaa ülesande lahendamise lõppedes on  $5 \cdot (x - 1)$ . Alustades jaamast 1 ja läbides  $5 \cdot (x - 1)$  jaama lõpetab Peeter jaamas  $1 + 5 \cdot (x - 1) = 2022 \pmod{2022}$ . Nüüd vaatame  $x$  väärtust, mille puhul

$$\begin{aligned} 1 + 5 \cdot (x - 1) &= 2022 \pmod{2022} \\ 5 \cdot (x - 1) &= -1 \pmod{2022} \\ 5x &= 4 \pmod{2022} \end{aligned}$$

kehtiks. Jagades 2022 arvuga 5 saame jäägi 2. See tähendab, et  $5 \cdot 404 = 2020$  ja

$$5 \cdot 404 = -2 \pmod{2022}$$

Korrutades mõlemad pooled arvuga 3:

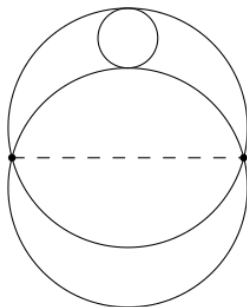
$$5 \cdot 1212 = -6 \pmod{2022}$$

Liites mõlemale poolele 10:

$$5 \cdot 1214 = 4 \pmod{2022}$$

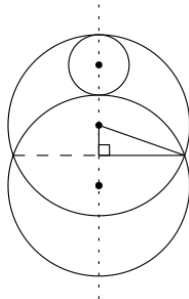
Seega nägi Peeter ülesannet jaamas 1214.

**Ülesanne 17.** Joonisel on kolm ringjoont: väike ringjoon raadiusega 1 puutub kaht suuremat ringjoont, mis on suuruselt võrdsed. Lisaks on ühe ringjoone keskpunkt teise kahe ringjoone keskpunkte ühendava lõigu keskpunkt. Leia punktiiriga märgitud sirglõigu pikkus.



*Vastus.*  $4\sqrt{2} \doteq 5,657$

*Lahendus.* Keskpunkti tingimus tähendab, et kõik ringjooned asuvad punktiiriga märgitud sirglõigu (mille asetame horisontaalselt) keskristsirgel. Näeme, et ringjoone keskpunkt, mis on teisi ühendava lõigu keskpunktiks, on ülemise suure ringjoone keskpunkt. Kahe suurema ringjoone keskpunktide vahe saab arvutada kui nende kõige ülemiste punktide vahe, mis on võrdne väikse ringjoone diameetriga, st 2. Tähistades kahe suurema ringjoone raadiuste pikkuse kui  $R$ , saame, et  $R - 1 = 2$ , mis tähendab, et  $R = 3$ . Nüüd vaatame täisnurkset kolmnurka, mille tipud on keskmise ringjoone keskpunkt, täpilise sirglõigu keskpunkt ja üks kahe suurema ringjoone lõikepunktidest. Pythagorase teoreem annab täpilise lõigu pikkuseks siis  $2\sqrt{3^2 - 1^2} = 4\sqrt{2}$ .



**Ülesanne 18.** Reas seisavad 2022 piima joovat draakonit. Esimesel neist on 1 liiter piima, teisel 2 jne, kuni 2022. draakonini, kellel on 2022 liitrit. Esimene draakon annab pool oma piimast ja veel pool liitrit piima teisele, seejärel annab teine pool oma piimast ja veel pool liitrit piima kolmandale ja nii edasi, kuni 2021. draakon annab pool oma piimast ja veel pool liitrit piima 2022. draakonile. Kui palju piima (liitrites) on seejärel 2022. draakonil?

*Vastus.* 4043

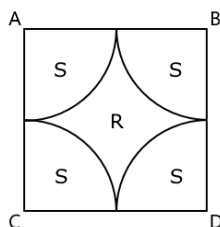
*Lahendus.* Oletame, et enne  $n$ -ndat üleandmist on  $n$ -ndal draakonil  $2n - 1$  liitrit piima. Siis on pärast üleandmist  $n + 1$ -ndal draakonil  $n + 1 + \frac{2n-1}{2} + \frac{1}{2} = 2n + 1 = 2(n + 1) - 1$  liitrit. Triviaalse induktsiooni tulemusena on  $k$ -ndal draakonil, kus  $k \geq n$ , pärast lisapiima saamist  $2k - 1$  liitrit piima. Kuna esimesel draakonil on alguses  $1 = 2 \times 1 - 1$  liitrit piima, siis on viimasel draakonil lõpuks  $2 \times 2022 - 1 = 4043$  liitrit piima.

**Ülesanne 19.** Ruudu  $ABCD$  sisepiirkonnas valitakse juhuslikult punkt  $X$ . Ruudu küljepikkus on 2. Mis on tõenäosus, et lõikude  $AX$ ,  $BX$ ,  $CX$  ja  $DX$  pikkused on kõik suuremad kui 1?

*Vastus.*  $1 - \frac{\pi}{4} \doteq 0,215$

*Lahendus.* Tähistus.  $[X]$  tähistab  $X$  pindala.

Punktid  $X$ , mis rahuldavad kõiki võrratusi, asuvad joonisel tähistatud regioonis  $R$ .



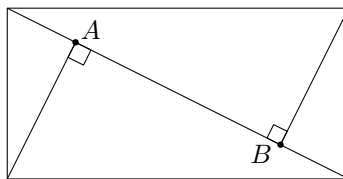
Arvutame tõenäosuse, leides  $[R]/[ABCD]$ .

$[ABCD]$  on lihtsalt 4.

$$[R] = [ABCD] - 4[S] \quad [R] = 4 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 4 - \pi$$

$$[R]/[ABCD] = \frac{4-\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

**Ülesanne 20.** Ristküliku külgede pikkuste suhe on  $2 : 1$  ja kaugus punktide  $A$  ja  $B$  vahel on 1. Mis on ristküliku pindala? (Väikese ruudukesega tähistatud nurgad on täisnurgad.)



*Vastus.*  $10/9 \doteq 1,111$

*Lahendus.* Joonistatud diagonaal jaotab ristküliku kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Olgu kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus  $a$  ja hüpotenuus  $1 + 2b$ . Nagu joonisel näha, jaotab kõrgus kolmnurga kaheks sarnaseks täisnurkseks kolmnurgaks kaatetitega  $a$  ja  $b$  ning  $1 + b$  ja  $a$ . Kuna need kolmnurgad on sarnased ja nende hüpotenuuside pikkuste suhe on  $2 : 1$ , siis saame, et  $2 \cdot b = a$  ja  $2 \cdot a = 1 + b$ . Sealt saame, et  $a = \frac{2}{3}$  ja  $b = \frac{1}{3}$ . Kogu ristküliku pindala on siis võrdne diagonaali pikkuse ja  $a$  korrutisega.  $(1 + 2b) \cdot a = (1 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

**Ülesanne 21.** Viis päkapikku kandsid erinevat värvi mütsi. Kaks päkapikku vahetasid oma mütsid, seejärel vahetasid taas mingid kaks päkapikku oma mütsid ning siis juhtus seesama ka kolmandat korda. Kui mitmel viisil võisid päkapikud niimoodi oma mütsi vahetada, kui on teada, et lõpuks ei kandnud ükski päkapikk enam sama värvi mütsi, mida algselt?

*Vastus.* 180

*Lahendus.* *Lahendus 1:* Esimese vahetuse jaoks on  $\binom{5}{2} = 10$  võimalust. Seejärel on kaks võimalust: järgmine vahetus kas sisaldab esimese vahetusega ühist päkapikku (1) või mitte (2). Juhul (1) on teise vahetuse jaoks  $2 \cdot 3 = 6$  võimalust ning viimane vahetus on üheselt määratud. Juhul (2) on teise vahetuse jaoks  $\binom{3}{2} = 3$  võimalust ning viimase vahetuse jaoks 4 võimalust. Seega kokku on  $10 \cdot (3 \cdot 4 + 6) = 180$  võimalust.

*Lahendus 2:* Tekkiv permutatsioon peab koosnema tsüklitest suurustega 2 ja 3. Selliseid permutatsioone on  $\binom{5}{2} \cdot 2$  (sest vaja on valida elemendid, mis kuuluvad 2-tsükklisse ning seejärel valida allesjäänud 3-tsükli suund). Selle 3-tsükli tekitamiseks kahe vahetuse abil on 3 võimalust. Viimaks on 3 valikut, millal teha 2-tsüklile vastav vahetus, seega kokku on võimalusi  $20 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ .

**Ülesanne 22.** Markus kirjutas tahvlile rooma numbrid  $I, II, III, IV, \dots$  kuni  $z$ , igaüks eraldi reale. Aurelius märkas, et tahvlil on võrdne kogus järgnevaid tähekombinatsioone:  $IV, IX, XL, XC, CD$  ja  $CM$ . Mis on vähim  $z \geq IV$ , mille korral see on võimalik? (Anna vastus kümnendsüsteemis, mitte rooma numbrina.)

*Vastus.* 999

*Lahendus.* Tähekombinatsiooni  $IV$  arv tahvlil on võrdne arvude 1 kuni  $z$  (kümnendsüsteemis kirjutamisel) üheliste kohtadel esinevate numbrite 4 arvuga. Samamoodi kombinatsiooni  $IX$  arv on võrdne üheksate arvuga üheliste kohtadel. Kombinatsioonide  $XL$  ja  $XC$  kogused on võrdsed vastavalt neljade ja üheksate kogusega kümneliste kohtadel ning kombinatsioonide  $CD$  ja  $CM$  kogused on võrdsed vastavalt neljade ja üheksate kogusega sajaliste kohtadel.

Kuna  $z \geq IV$ , siis peab kõiki tähekombinatsioone olema tahvlil vähemalt 1, sealhulgas kombinatsiooni  $CM$ . Järelikult  $z \geq 900$ . Kuid siis  $CD$  kogus tahvlil on vähemalt 100, seega peab ka  $CM$  kogus tahvlil olema vähemalt 100. Järelikult  $z \geq 999$ .

Me saame kergesti veenduda, et  $z = 999$  korral on kõiki numbrikombinatsioone tahvlil 100 tükki, sest fikseerides ühe numbri, on ülejäänud kahe numbri valikuks (ajutiselt lubades arvu algusesse ka nulle) täpselt 100 võimalust. Seega on  $z = 999$  vähim võimalik.

**Ülesanne 23.** 50 õpilasest mõned mängivad jäähokit ja mõned saalihokit (iga õpilane võib mängida ühte, mõlemat või mitte kumbagi nendest mängudest). Nende õpilaste arv, kes ei mängi kumbagi, on kaks korda suurem kui nende õpilaste arv, kes mängivad saalihokit. Ainult jäähokit mängivate õpilaste arv on 15 võrra suurem mõlemat mängu mängivate õpilaste arvust. Leia jäähokit mittemängivate õpilaste arvu kõikvõimalikud väärtused. Vastuseks esita nende korrutis.

*Vastus.* 14725

*Lahendus.* Olgu  $j, s, m, e$  vastavalt ainult jäähokit, ainult saalihokit, mõlemat ja ei kumbagi mängu mängivate õpilaste arvud. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} j + s + m + e &= 50, \\ e &= 2 \cdot (s + m), \\ j &= m + 15, \end{aligned}$$

kus kõik muutujad  $j$  suhtes avaldades saame  $s = \frac{1}{3}(95 - 4j)$ ,  $e = \frac{2}{3}(50 - j)$ ,  $m = j - 15$ . Et kõik muutujad oleksid mittenegatiivsed täisarvud, peab  $j$  üks arvudest 17, 20, 23. Otsitava suuruse  $s + e$  võimalikud väärtused on vastavalt  $9 + 22 = 31$ ,  $5 + 20 = 25$ ,  $1 + 18 = 19$ , mille korrutis on 14725.

**Ülesanne 24.** Punktid  $A, B, C, D$  asuvad ringjoonel, mille raadius on 1 ja keskpunkt  $M$ . Lõigud  $AB$  ja  $CD$  on risti. Ringjooned diameetritega  $AB$  ja  $CD$  on võrdse suurusega ja puutuvad ühesainsas punktis  $P$ . Leia lõigu  $MP$  pikkus.

*Vastus.*  $1/\sqrt{3} \doteq 0,577$

*Lahendus.* Nihutame ja pöörame joonist, nii et  $AB$  ja  $CD$  oleksid paralleelsed vastavalt  $x$  ja  $y$ -telgedega ning  $M = (0,0)$ . Siis on võimalik fikseerides ühe punktidest  $A, B, C, D$  ülejäänud tekitada peegelduste teel:

$$A = (x, -y), B = (x, y), C = (y, x), D = (-y, x),$$

kus  $x^2 + y^2 = 1$ , kuna ringjoone raadius on 1. Üldisust kitsendamata olgu  $x > 0, y > 0$ .

Vaatleme nüüd ringjooni diameetritega  $AB$  ja  $CD$ . Ühelt poolt on kummagi ringjoone raadius  $y$ , kuna  $|AB| = |CD| = 2y$ . Teiselt poolt aga on ringjoonte keskpunktide koordinaadid  $(x, 0)$  ja  $(0, x)$  ning kuna need ringjooned puutuvad, on keskpunkte ühendav lõik võrdne raadiuste summaga, järelikult  $2y = \sqrt{2}x$ . Asendades selle tingimusse  $x^2 + y^2 = 1$ , saame  $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . Viimaks, kuna  $P = (\frac{x}{2}, \frac{x}{2})$ , on järelikult  $|MP| = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Ülesanne 25.** Olgu  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  selline reaalarvude jada, et

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{n+1} + a_n + 24$$

kehtib iga positiivse täisarvu  $n$  korral. Leia summa  $a_1 + a_{2022}$  suurim võimalik väärtus.

*Vastus.* 8

*Lahendus.* Kombineerides võrdused  $n = x$  ja  $n = x + 1$  jaoks, saame  $a_{x+2}^2 - a_{x+2} = a_x^2 - a_x$ . Seega kehtib iga positiivse täisarvu  $n$  korral

$$a_{x+2n}^2 - a_{x+2n} = a_x^2 - a_x.$$

Järelikult

$$a_{2+2 \cdot 1010}^2 - a_{2+2 \cdot 1010} = a_2^2 - a_2.$$

Seega, kuna me teame, et  $a_2^2 - a_2 + a_1^2 - a_1 = 24$ , siis järelikult ka  $a_{2022}^2 - a_{2022} + a_1^2 - a_1 = 24$ .

Olgu  $a = a_{2022} + a_1$ . Ruutkeskmise ja aritmeetilise keskmise vahelise võrratuse põhjal  $a_{2022}^2 + a_1^2 \geq \frac{a^2}{2}$ . Seega,  $24 \geq \frac{a^2}{2} - a$ .

Selle ruutvõrratuse lahendamisel saame  $a \leq 8$ . Seda tingimust rahuldab jada  $a_n = 4$ .

**Ülesanne 26.** Rohkem kui 39 %, kuid vähem kui 40 % maleklubi liikmetest on poisid. Kui üks tüdrukutest otsustaks klubist lahkuda, oleks poiste osakaal endiselt alla 40 %. Kui aga selle asemel liituks klubiga veel üks poiss, oleks poiste osakaal vähemalt 40 %. Mis on vähim võimalik klubi liikmete hetkearv?

*Vastus.* 64

*Lahendus.* Olgu  $n$  klubi liikmete arv ja  $a$  poiste arv. Saame võrratuste süsteemi

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} &> 0.39, \\ \frac{a}{n-1} &< 0.4, \\ \frac{a+1}{n+1} &\geq 0.4. \end{aligned}$$

Korrutades teise ja kolmanda võrratuse pooled viiega ning vabanedes nimetajatest saame

$$2n - 2 > 5a \geq 2n - 3.$$

Kuna  $5a$  on täisarv ja  $2n - 2$ ,  $2n - 3$  järjestikused täisarvud, peab kehtima  $5a = 2n - 3$ . Asendades selle esimesse võrrandisse, saame avaldada  $n > 60$ . Et  $a = \frac{1}{5}(2n - 3)$  oleks ka täisarv, on väikseim võimalik  $n$  väärtus seega 64.

**Ülesanne 27.** Me oleme leidnud kolm ruutfunktsiooni järgnevate omadustega: Funktsioonil  $f_1$  leidub ühine nullkoht nii funktsiooniga  $f_2$  kui  $f_3$  ning funktsioonil  $f_2$  leidub funktsiooniga  $f_3$  ühine nullkoht, kuid ei leidu nullkohta, mis oleks ühine kõigil kolmel funktsioonil. Samuti oleme me leidnud, et funktsioonid esituvad järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - bx + 1980, \\ f_2(x) &= x^2 - (b+1)x + 2024, \\ f_3(x) &= x^2 - (b+2)x + a, \end{aligned}$$

kus  $a, b$  on mingid reaalarvud. Leia  $a$  väärtus.

*Vastus.* 2070

*Lahendus.* Ülesande tingimuste põhjal peab funktsioonidel olema kokku kolm nullkohta  $k_1, k_2, k_3$  ning funktsioonid seega avalduma kujul

$$\begin{aligned} (x - k_1)(x - k_2) &= x^2 - (k_1 + k_2)x + k_1 \cdot k_2, \\ (x - k_1)(x - k_3) &= x^2 - (k_1 + k_3)x + k_1 \cdot k_3, \\ (x - k_3)(x - k_2) &= x^2 - (k_3 + k_2)x + k_3 \cdot k_2. \end{aligned}$$

Üldisust kitsendamata olgu  $b = k_1 + k_2$ ,  $b + 1 = k_1 + k_3$  ja  $b + 2 = k_2 + k_3$ . Selle võrrandisüsteemi lahendamine annab  $k_1 = \frac{b-1}{2}$ ,  $k_2 = \frac{b+1}{2}$  and  $k_3 = \frac{b+3}{2}$ . Kuna  $1980 = k_1 \cdot k_2 = \frac{(b-1)(b+1)}{4}$ , siis saame lahendada ruutvõrrandi  $b$  suhtes, mis annab  $k_1 = 44$ ,  $k_2 = 45$ ,  $k_3 = 46$ . Järelikult  $a = 45 \cdot 46 = 2070$ .

**Ülesanne 28.** Võrkpalliturniiril oli kuus osalejat: Alice, Bob, Charlie, Dave, Eva ja Frank. Igas mängus mängisid mingid kaks mängijat mingi kahe ülejäänud mängija vastu. Iga mängijatepaar mängis iga teise mängijatepaari vastu täpselt ühe korra. Alice võitis 30 mängu, Dave 12 mängu ja Frank 18 mängu. Kui mitu mängu võitis Bob?

*Vastus.* 10

*Lahendus.* Iga mängija mängib  $5 \cdot 6 = 30$  mängu, sest partneri jaoks on 5 valikut ning vastaste jaoks  $\binom{4}{2} = 6$  valikut. Järelikult pidi Alice võitma kõik oma mängud. Iga kaks mängijat mängivad koos  $\binom{4}{2} = 6$  mängu ja teineteise vastu  $4 \cdot 3 = 12$  mängu (4 valikut ühe mängija partneri jaoks ja 3 valikut teise mängija partneri jaoks).

Kuna Frank võitis 18 mängu ning mängis Alice'i vastu 12 mängu (mille ta kindlasti kaotas), siis järelikult pidi ta võitma kõik mängud, kus ta ei mänginud Alice'i vastu.

Dave'i 12 võidust 6 olid koos Alice'iga ja 3 koos Frankiga (sest need 3 mängu, kus nad mängisid Alice'i vastu, nad kaotasid). Ülejäänud 3 võidetud mängus ei olnud kummaski tiimis ei Alice'it ega Franki. Et selliseid mängu ongi ainult 3, pidi järelikult Dave võitma kõik mängud, kus ei olnud Alice'it ega Franki. Selle info põhjal näeme, et Bob, Charlie ja Eve võitsid kõik täpselt 6 mängu Alice'iga, 3 mängu Frankiga ja 1 mängu Dave'iga. Seega kokku võitis Bob  $6 + 3 + 1 = 10$  mängu.

**Ülesanne 29.** Vaatleme täisnurkset kolmnurka küljepikkustega 3, 4, 5. Tõmmates kõrguse, saame selle jaotada kaheks sarnaseks kolmnurgaks. Seda protsessi saame korrata, tõmmates igal sammul igas kolmnurgas kõrguse ning kahekordistades kolmnurkade arvu. Leia viie sammu järel kolmnurkade keskmine übermõõt.

*Vastus.*  $\frac{50421}{25000} = 2,01684 \doteq 2,017$

*Lahendus.* Leiame esmalt kolmnurkade übermõõtude summa. Igal sammul muutub iga kolmnurk  $T$  kaheks temaga sarnaseks kolmnurgaks  $T_1$  ja  $T_2$ , kus sarnasustegurid on  $\frac{3}{5}$  and  $\frac{4}{5}$ . Seega  $T_1$  ja  $T_2$  übermõõtude summa on  $\frac{7}{5}$  korda suurem kui  $T$  übermõõt. Järelikult suureneb igal sammul übermõõtude summa  $\frac{7}{5}$  korda. Seega viie sammu järel on übermõõtude summa  $(3 + 4 + 5) \left(\frac{7}{5}\right)^5$  ning kuna kolmnurki on  $2^5$ , on keskmine übermõõt

$$12 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{50421}{25000}.$$

**Ülesanne 30.** Martin ronib ronimisseinal rada, mis koosneb 10 nukist, mis on nummerdatud alt üles numbritega 1, ..., 10, kasutades ainult ühte kätt ja ühte jalga. Ta alustab käega nukil number 3 ja jalaga nukil number 1. Igal sammul ta saab liigutada kätt või jalga üles ühe või rohkema nuki võrra, kuid tema käsi peab olema alati jalast kõrgemal ning kahe nuki arvud, mida ta igal hetkel kasutab, võivad erineda maksimaalselt 3 ja minimaalselt 1 võrra. Ta lõpetab ronimise siis, kui tema käsi jõuab nukini number 10. Kui mitmel erineval viisil saab Martin seda rada ronida?

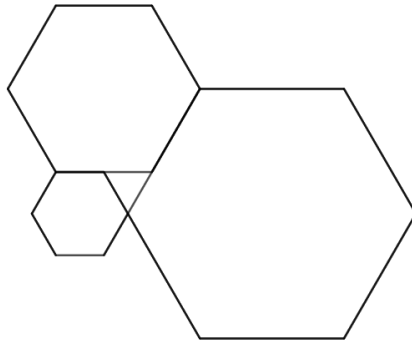
*Vastus.* 1458

*Lahendus.* Me saame visualiseerida Martini kõikvõimalikud asendid seinal koos võimaluste arvuga nende saavutamiseks järgmise tabeli abil:

|    | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6   | 7   | 8   | 9   |
|----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 3  | 1 | 1 |   |    |    |     |     |     |     |
| 4  | 1 | 2 | 3 |    |    |     |     |     |     |
| 5  |   | 3 | 6 | 9  |    |     |     |     |     |
| 6  |   |   | 9 | 18 | 27 |     |     |     |     |
| 7  |   |   |   | 27 | 54 | 81  |     |     |     |
| 8  |   |   |   |    | 81 | 162 | 243 |     |     |
| 9  |   |   |   |    |    | 243 | 486 | 729 |     |
| 10 |   |   |   |    |    |     |     | 729 | 729 |

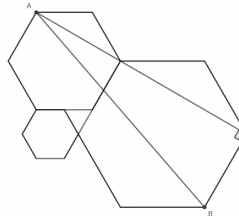
Reanumber tähistab käe asukohta, veerunumber jala asukohta. Martin alustab ruudust (1,3), milleks on täpselt 1 võimalus. Igas järgmises ruudus oleva arvu saame, kui liidame kokku kõik arvud temast otse üleval või otse vasakul. Näiteks ruutu (3,4) saame jõuda kas ruudust (2,4) või otse ruudust (1,4) (ilma ruutu (1,4) kasutamata). Selle reegli abil saame tabeli täita, ainsaks erinevuseks on see, et Martin lõpetab ronimise kohe, kui tema käsi jõuab viimasele nukile, järelikult kümnenda rea väärtuste saamiseks liidame kokku vaid otse üleval asuvate ruutude arvud. Ülesande vastus on viimase rea arvude summa ehk  $729 + 729 = 1458$ .

**Ülesanne 31.** Järgnev joonis koosneb kolmest korrapärasest kuusnurgast, millest väikseima küljepikkus on 1. Leia vähima ringi pindala, mis katab ära joonise.



*Vastus.*  $21\pi \doteq 65,973$

*Lahendus.* Joonise keskel asuva võrdkülgse kolmnurga küljepikkus on 1. Järelikult on ülejäänud kahe kuusnurga küljepikkused vastavalt 2 ja 3. Otsitava ringi diameetrik on pikim lõik, mille mõlemad otspunktid asuvad mingite kuusnurkade tippudes. Visuaalselt leiame, et see on lõik  $AB$ . See lõik koos pikema kuusnurga ühe küljega moodustab täisnurkse kolmnurga. Et kaatetite pikkused on vastavalt 3 ja  $\sqrt{3} \cdot (2 + 3) = 5\sqrt{3}$ , on Pythagorase teoreemi põhjal  $|AB|^2 = 84$  ning seega ringi pindala on  $\frac{|AB|^2}{4}\pi = \frac{84}{4}\pi = 21\pi$ .



**Ülesanne 32.** Laur ja Tuuli mängivad  $42 \times 42$  ruudustikul järgnevat mängu. Esmalt asetab Laur mängulaua erinevatele ruutudele  $x \geq 8$  maleratsut. Seejärel valib Tuuli nendest ratsudest välja kaheksa. Laur eemaldab mängulaualt kõik ratsud, mida Tuuli ei valinud. Tuuli võidab, kui lauale jäänud kaheksast ratsust ükski kaks ei ründa teineteist. Leia vähim  $x$  väärtus, mille korral Tuulil on võimalik võita sõltumata sellest, kuidas Laur oma  $x$  ratsut paigutab.

*Vastus.* 15

*Lahendus.* Esmalt kasutame ära asjaolu, et malelaua ruudud on värvitud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Iga ratsu ründab ainult vastasvärvi ruute. Seega, kui  $x = 15$ , peavad leiduma (Dirichlet' printsiibi põhjal) 8 ratsut, mis asuvad sama värvi ruutudel ja seega ei ründa teineteist. Valides need ratsud, saab Tuuli kindlasti võita.

Näitame, et kui  $x \leq 14$ , ei saa Tuuli võitu garanteerida. Tähistagu  $(r, c)$   $r$ . reas ja  $c$ . veerus asuvat ruutu. Vaatleme järgmist seitset ruutude paari:

- $P_1: (1, 1), (3, 2),$
- $P_2: (1, 2), (3, 3),$
- $P_3: (1, 3), (3, 4),$
- $P_4: (1, 4), (3, 5),$
- $P_5: (1, 5), (3, 6),$
- $P_6: (1, 6), (3, 7),$
- $P_7: (1, 7), (3, 8),$

Laur asetab  $x \leq 14$  ratsut suvaliselt nendele 14 ruudule. Ükskõik millised 8 nendest Tuuli välja valib, Dirichlet' printsiibi põhjal kuuluvad mingid kaks neist samasse paari ja seega ründavad teineteist.

Seega vähim  $x$  väärtus, mille korral Tuuli kindlasti võidab, on 15.

**Ülesanne 33.** Jõe laius on üks kilomeeter. Paulil kulub 27 minutit, et sõuda üks kilomeeter allavoolu ning 36 minutit, et sõuda üks kilomeeter jõe vastaskaldale. Mitu minutit kuluks tal, et sõuda üks kilomeeter ülesvoolu?

*Vastus.* 48

*Lahendus.* Olgu Pauli kiirus seisvas vees  $x$  (kilomeetrit minutis) ja jõe voolukiirus  $y$ . Seega ühe kilomeetri allavoolu sõudmiseks kulub tal  $\frac{1}{x+y} = 27$  minutit.

Et jõuda võimalikult kiiresti jõe vastaskaldale, peab Paul sihtima  $z$  kilomeetrit ülesvoolu (sest jõgi veab teda vooluga kaasa). Pythagorase teoreemi põhjal on selle (jõe vooluga mittearvestava) teekonna pikkus  $\sqrt{1+z^2}$ . Et Paul peab läbima selle teekonna täpselt sama kiiresti kui jõgi teda  $z$  kilomeetrit allavoolu veab, peab kehtima suhe  $\frac{\sqrt{1+z^2}}{x} = \frac{z}{y}$ . Siit saame avaldada  $z^2 = \frac{y^2}{x^2-y^2}$ . Seega on vooluga mittearvestava teekonna pikkus  $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\frac{(x^2-y^2)+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ , mille läbimiseks Paulil kulub  $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = 36$  minutit.

Seega oleme leidnud, et  $\frac{1}{x+y} = 27$  ja  $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = 36$ . Ülesvoolu sõudes on Pauli kiirus aga  $x-y$  kilomeetrit minutis, seega otsitav vastus on  $\frac{1}{x-y} = \frac{x+y}{x^2-y^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2 : \frac{1}{x+y} = 36^2 : 27 = 48$ .

**Ülesanne 34.** Kaksikvennad Sloan ja Quigley treenivad jooksuringil. Mõlemad alustavad ringi alguspunktist, mis on selgelt tähistatud, ning jooksevad mööda ringi samas suunas tihtlase kiirusega. Treening lõpeb siis, kui algaja jooksja Sloan läbib ühe ringi ja jõuab tagasi alguspunkti. Quigley on andekas jooksja ja jookseb Sloanist kuus korda kiiremini.

Kaksikvennad näevad välja identsed. Siiski, kui me vaatame treeningu ajal jooksuringist tehtud pilti, on enamasti võimalik kindlaks teha, kumb vend on kumb, kasutades ainult eelpooltoodud infot ja seda pilti. Kui mitu korda treeningu jooksul on võimalik teha selline pilt, kust ei ole vendi võimalik eristada? (Me ei võta arvesse treeningu alg-ega lõpphetke.)

*Vastus.* 34

*Lahendus.* Olgu  $s \in (0,1)$  Sloani asukoht jooksuringil. Quigley läbitud vahemaa selleks ajaks on  $6s$ , seega asukoht ringil on  $6s \pmod{1}$ . Et vennad oleks eristamatud, peaks siis, kui Sloani asukoht ringil on  $6s \pmod{1}$ , olema Quigley asukoht  $s$ . Et aga teisalt on see  $6 \cdot 6s \pmod{1}$ , peab järelikult kehtima  $36s \pmod{1} = s \pmod{1}$  ehk  $35s$  olema täisarv. Seega  $s = \frac{a}{35}$ , kus  $a \in \{1, 2, \dots, 34\}$ . Järelikult on hetki, kus vendi ei saa eristada, 34.

**Ülesanne 35.** Katkematust tekstist koosnev dokument trükiti esmalt nii, et igal leheküljel oli 60 rida. Kui ridade arv igal leheküljel vähendati 57 peale, kasvas lehekülgede arv kahe võrra. Leia vähim ja suurim võimalik esialgse dokumendi lehekülgede arv ja esita vastusena nende summa.

*Vastus.* 77

*Lahendus.* Olgu dokumendi algne lehekülgede arv  $k+1$ . Nendest lehekülgedest  $k$  olid kindlasti teksti täis. Seega on tekstiridade arv  $60k+a$ , kus  $1 \leq a \leq 60$ . Pärast muudatust olid  $k+2$  lehekülge kindlasti teksti täis, seega tekstiridade arv on  $57(k+2)+b$ , kus  $1 \leq b \leq 57$ . Kirjutades ümber võrrandi

$$60k+a=57(k+2)+b,$$

saame

$$3k=b-a+2 \cdot 57.$$

Kasutades teadaolevaid piiranguid arvudele  $a$  ja  $b$ , saame

$$55 \leq 3k \leq 170,$$

ning kuna  $k$  on täisarv, näeme, et

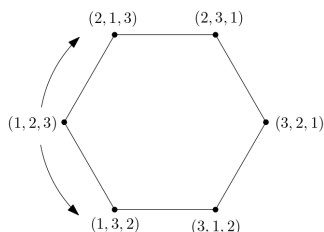
$$19 \leq k \leq 56.$$

Tuleb vaid meenutada, et lehekülgede arv on arvust  $k$  ühe võrra suurem, seega otsitav vastus on  $20+57=77$ .

**Ülesanne 36.** Kellamängus kasutatakse kellasid, et luua *teoseid*, mis on muusikaliste *taktide* jadad. Igas taktis helisevad kellad mingis järjekorras, igaüks ühe korra. Olgu meil kolm kella numbritega 1, 2 ja 3. Kahes järjestikuses taktis saavad sama kella asukohad helisemisjärjekorras erineda maksimaalselt ühe võrra. Me nimetame teost *igavaks*, kui sellest leiduvad kaks järjestikust identset takti. Kui palju leidub mitteigavaid 21 taktist koosnevaid teoseid, kus nii esimene kui viimane takt on (1,2,3)?

*Vastus.* 349526

*Lahendus.* Meil on võimalik visualiseerida teoseid teekondadena kuusnurgas, kus tipud on tähistatud kõikvõimalike taktidega niimoodi, et järjestikused taktid tohivad olla ainult kuusnurga järjestikused tipud.



Seega on mitteigavate teoste arv erinevate teekondade arv (pikkusega  $21 - 1 = 20$ ) selles kuusnurgas, mis algavad ja lõpevad tipus  $(1,2,3)$ . Selleks peab päripäeva ja vastupäeva tehtud sammude vahe olema arvu 6 kordne. Järelikult peab päripäeva tehtud sammude arv kuuluma hulka  $\{1,4,7,10,13,16,19\}$ . Seega on sobivate teekondade (ehk ühtlasi ka teoste) arv

$$\binom{20}{1} + \binom{20}{4} + \binom{20}{7} + \binom{20}{10} + \binom{20}{13} + \binom{20}{16} + \binom{20}{19} = 20 + 4845 + 77520 + 184756 + 77520 + 4845 + 20 = 349526.$$

**Ülesanne 37.** Kaarlil on viis korrapärast hulknurka  $P_0, P_1, \dots, P_4$ , millest igaühe küljepikkus on 1. Esmalt võttis ta hulknurga  $P_0$ , mis oli tegelikult ruut, ja asetask selle tasandile. Seejärel asetask ta ülejäänud neli hulknurka tasandile niimoodi, et:

- $P_1, \dots, P_4$  omavad kõik täpselt ühte ühist külge ruuduga  $P_0$ ,
- iga  $i \in \{1,2,3\}$  korral omab hulknurk  $P_i$  täpselt ühte ühist külge hulknurgaga  $P_{i+1}$ . Samuti omab  $P_4$  täpselt ühte ühist külge hulknurgaga  $P_1$ .

Viimaks mõõtis Kaarel viiest hulknurgast moodustuva kujundi ümbermõõdu. Leia kõigi võimalike ümbermõõtude aritmeetiline keskmine.

*Vastus.* 25

*Lahendus.* Paneme tähele, et hulknurkade ühine külge jagab alati ühist tippu keskmise ruuduga.

Me teame, et korrapärase  $n$ -nurga sisenurga suurus on  $180(1 - \frac{2}{n})$  kraadi. Seega selleks, et iga ruudu tipu jaoks oleks nurkade summa 360 kraadi, peab kehtima tingimus

$$360 = 90 + 180(1 - \frac{2}{n}) + 180(1 - \frac{2}{m}),$$

kus  $m$  ja  $n$  on vastavate hulknurkade tippude arvud. Kuna tingimuse parema poole avaldis on nii  $n$  kui  $m$  suhtes rangelt kasvav, määrab üks muutuja alati unikaalselt ka teise muutuja väärtuse. Seega kui ühes ruudu tipus kohtuvad  $n$ - ja  $m$ -nurk ja järgmises  $m$ - ja  $x$ -nurk, siis järelikult  $x = n$ . See tähendab, et hulknurkade tippude arvud on vaheldumisi  $n$  ja  $m$ .

Viime nüüd varemleitud tingimuse kujule

$$1 = \frac{4}{n} + \frac{4}{m}$$

ja leiame kõik lahendid. Juhul  $n = m$  me saame lahendi  $n = m = 8$ . Juhul  $n \neq m$ , peab üks muutujatest (üldisust kitsendamata  $n$ ) olema väiksem kui 8. Arvutades välja  $m$  väärtused iga  $n \in [3,7]$  jaoks, saame

$$\begin{aligned} n = 3 &\rightarrow m = -12, \\ n = 4 &\rightarrow \text{lahendeid ei leidu}, \\ n = 5 &\rightarrow m = 20, \\ n = 6 &\rightarrow m = 12, \\ n = 7 &\rightarrow m \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Siin  $m = -12$  tähendab, et 12-nurga ja ruudu keskpunktid jäävad ühisest küljest samale poole.

Iga kujundi ümbermõõdu avaldub kujul

$$p = 2 \cdot (n - 3) + 2 \cdot (m - 3),$$

kust saame võimalikud ümbermõõdud  $\{18,38,24,20\}$ , mille keskmine on

$$\frac{18 + 38 + 24 + 20}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

**Ülesanne 38.** Olgu  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  injekttiivne funktsioon, nii et iga  $x > 0$  korral kehtivad tingimused  $f(x) > -\frac{4}{x}$  ja  $f(f(x) + \frac{4}{x}) = 3$ . Leia  $f(16)$ .

(Me nimetame funktsiooni  $f$  *injekttiivseks*, kui võrdusest  $f(x) = f(y)$  järeljub alati võrdus  $x = y$ .)

*Vastus.*  $\frac{15}{4} = 3.75$

*Lahendus.* Leidub mingi positiivne reaalarv  $a$ , nii et  $f(a) = 3$ . Asendades  $x = a$ , saame  $f(f(a) + \frac{4}{a}) =$  ja  $f(3 + \frac{4}{a}) = 3$ . Kuna  $f$  on injektiivne, saame

$$a = 3 + \frac{4}{a}.$$

Järelikult  $a = 4$ . Seega kehtib iga  $x$  jaoks

$$f(x) + \frac{4}{x} = 4$$

ehk

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x}.$$

Järelikult  $f(16) = \frac{15}{4}$ .

**Ülesanne 39.** Terry on matkal ja leidis allika. Tal on kaks pudelit, millest ühe ruumala on 2022 ml ja teise ruumala on 51 ml. Ta saab allikast pudeleid täita, pudeleid allikasse tühjendada ning valada vett ühest pudelist teise. Selliste sammude abil tahab Terry jõuda olukorran, kus:

- ta teab vee kogust  $V$ , mis on ühes tema pudelistest,
- $V$  on vähim võimalik selline kogus ülalkirjeldatud tingimuste juures.

Mis on vähim võimalik valamiste arv, mida Terry peab tegema, et oma eesmärk saavutada?

*Vastus.* 121

*Lahendus.* Kuna  $S\ddot{U}T(2022, 51) = 3$  jagub mistahes kallamise järel vee kogus mõlemas pudelis kolmega, järelikult on  $V$  vähim võimalik väärtus maksimaalselt 3.

Nüüd leiame, kuidas saavutada  $V = 3$  vähima võimaliku kallamise arvuga. Paneme tähele, et meil ei saa kunagi saavutada olukorda, kus mõlemad pudelid on osaliselt täidetud, sest siis me ei teaks pudelites olevaid veekoguseid. Selle põhjal paneme tähele, et kui me mingi osaliselt täidetud pudeli täidame või tühjendame, oleme me algolukorras tagasi.

Järelikult on kaks strateegiat, mis viivad meid edasi: täita väiksemat pudelit ja kallata sealt suuremasse pudelisse või täita suuremat pudelit ja kallata sealt väiksemasse. Kuna need on sümmeetrilised, piisab vaadelda esimest strateegiat.

Tehes 40 kallamist, saame suure pudeli täidetud ning väiksemasse jääb alles 18 ml. Tühjendame suure pudeli ning kallame ülejäägi suurde pudelisse. Nüüd kordame sama protsessi: täidame väikese pudeli abil suurt, kuni see saab täis ja väiksemasse jääb ülejääk. Tühjendame suure pudeli ja kallame ülejäägi üle suurde pudelisse. Ülejäägid, mis tekivad, on vastavalt 18, 36, 3 ml. Selleks pidime kokku tegema  $41 + 41 + 39 = 121$  kallamist.

**Ülesanne 40.** Positiivsetel täisarvudel  $a, b$  on selline omadus, et  $a + b$  jagab arvu  $51 \cdot V\ddot{U}K(a, b)$ . Leia, kui mitu erinevat väärtust saab olla avaldisel

$$\frac{51 \cdot V\ddot{U}K(a, b)}{a + b}.$$

( $V\ddot{U}K(a, b)$  all mõtleme positiivsete täisarvude  $a$  ja  $b$  vähimat ühiskordset.)

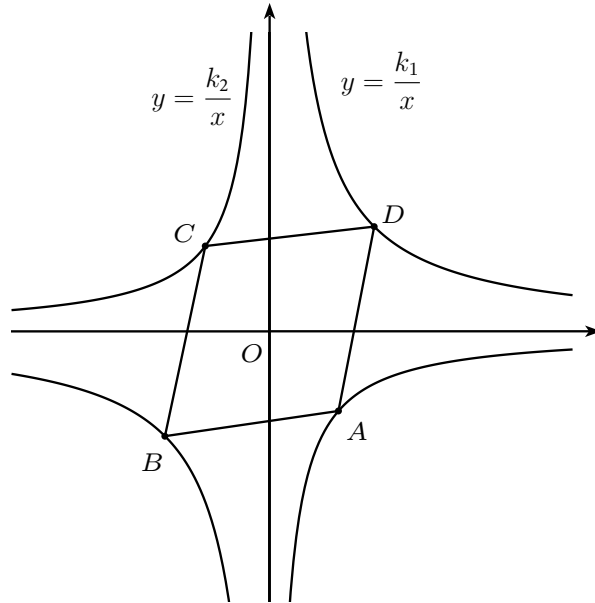
*Vastus.* 25

*Lahendus.* Olgu  $d$  arvude  $a, b$  suurim ühistegur. Siis  $a = dx, b = dy$ , kus  $x, y$  on ühistegurita. Kuna  $V\ddot{U}K(a, b) = dxy$ , siis  $\frac{51 \cdot V\ddot{U}K(a, b)}{a + b} = \frac{51xy}{x + y}$ . See tähendab, et  $d$  väärtus ei loe, olulised on vaid  $x, y$  väärtus.

Ülesande tingimus on samaväärne sellega, et  $x + y$  jagab arvu  $51xy$ . Kuna aga  $S\ddot{U}T(x + y, xy) = 1$ , siis  $x + y$  jagab arvu 51 ehk  $x + y \in \{3, 17, 51\}$ .

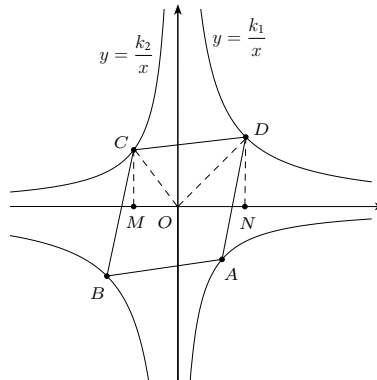
Nüüd iga  $k \in \{3, 17, 51\}$  jaoks peab tingimuste  $x + y = k$  ja  $S\ddot{U}T(x, y) = 1$  rahuldamiseks  $x$  olema arvust  $k$  väiksem ja  $k$ -ga ühistegurita positiivne täisarv. Selleks on  $\phi(k)$  võimalust, kus  $\phi$  is Euleri fiifunktsioon. Kuna aga paarid  $(x, y)$  ja  $(y, x)$  annavad uuritavas avaldises sama väärtuse, siis see avaldis omandab  $\frac{\phi(k)}{2}$  erinevat väärtust. Kokku on erinevaid väärtusi seega  $\frac{\phi(3) + \phi(17) + \phi(51)}{2} = 25$ .

**Ülesanne 41.** Juuresoleval joonisel on romb  $ABCD$  moodustatud funktsioonidel  $y = \frac{k_1}{x}$ ,  $y = \frac{k_2}{x}$  asuvatest punktidest  $A, B, C, D$ . Kui  $\angle BCD = 120^\circ$ , siis leia  $|\frac{k_1}{k_2}|$ .



*Vastus.* 3

*Lahendus.* Rombi omaduste ja sümmeetriakaalutluste põhjal järeldub, et  $OC$  ja  $OD$  on risti. Tõmbame ristsirged punktidest  $C, D$   $x$ -teljeni, mis lõikuvad sellega vastavalt punktides  $M, N$ .



Kolmnurga  $OCM$  pindala on  $\frac{|CM| \cdot |OM|}{2} = |\frac{k_2}{2}|$  ning kolmnurga  $ODN$  pindala on  $|\frac{k_1}{2}|$ . Kuna kolmnurgad  $\triangle COM, \triangle DON$  on sarnased, siis nende kolmnurkade pindalade suhe on  $(\frac{|OC|}{|OD|})^2 = |\frac{k_2}{k_1}|$ . Kuna  $|\angle BCD| = 120^\circ$ , siis  $|\angle OCD| = 60^\circ$ . Järelikult saab vastuse leida avaldisest

$$\tan 60^\circ = \frac{|DO|}{|CO|} = \sqrt{3},$$

mis peale mõlema poole ruutu tõstmist annab

$$\left(\frac{|OC|}{|OD|}\right)^2 = \left|\frac{k_1}{k_2}\right| = 3.$$

**Märkus.** Alternatiivne meetod tõestamaks, et  $OD \perp OC$ : olgu  $y = rx + s$  sirge võrrand läbi punktide  $B, D$  ja  $y = tx + u$  sirge võrrand läbi punktide  $A, C$ . Järelikult  $x_D, x_B$  on võrrandi  $rx^2 + sx - k_1$  juured ning nende summa on  $-\frac{s}{r}$ . Analoogselt saame me  $x_C + x_A = -\frac{u}{t}$ . Kuna tegu on rombiga, siis  $x_C + x_A = x_D + x_B$ , kust  $\frac{u}{v} = \frac{s}{r}$ . Järelikult lõikuvad sirged  $y = tx + u, y = rx + s$  punktis  $(-\frac{s}{r}, 0)$ . Teisest küljest,  $\frac{k_1(x_B + x_D)}{x_B \cdot x_D} = y_D + y_B = y_C + y_A = \frac{k_2(x_C + x_A)}{x_C \cdot x_A} = 0$ . Järelikult  $x_C + x_A = x_D + x_B = 0$ . Seega lõikuvad diagonaalid koordinaatide nullpunktis ja seega  $u = s = 0$ . Analoogselt saame me algebraga jätkata, et leida suhe  $\frac{k_1}{k_2}$ .

**Ülesanne 42.** Kotis on 2022 palli, mis võivad olla kuut eri värvi. Kui me valime suvalised 2000 palli, siis leidub nende hulgas kindlasti vähemalt viit eri värvi palle. Mis on vähim arv  $N$ , mille korral saab teades ainult eelnevas lauses sisalduvat informatsiooni järeldada, et kui me valime suvalised  $N$  palli, siis on nende hulgas vähemalt 4 eri värvi palle?

*Vastus.* 1988

*Lahendus.* Tähistame igat värvi pallide arvu kasvavas järjekorras:  $A \leq B \leq C \leq D \leq E \leq F$ ,  $A+B+C+D+E+F = 2022$ . Antud tingimuste põhjal  $C+D+E+F < 2000$ , ehk  $A+B \geq 23$ . Kuna  $C \geq B \geq \frac{A+B}{2} \geq \frac{23}{2}$ , siis saame me  $C \geq 12$  ja järelikult  $N = 2022 - (23 + 12) + 1 = 1988$  sobib. Teisest küljest, võttes  $(A, B, C, D, E, F) = (663, 662, 662, 12, 12, 11)$ , mis rahuldab antud tingimusi, näeme me, et  $663 + 662 + 662 = 1987$  palli pole piisav.

**Ülesanne 43.** Olgu  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktsioon, mis rahuldab tingimust

$$f(x) = f(137 - x) = f(2202 - x) = f(3028 - x).$$

Mitu erinevat väärtust saab maksimaalselt esineda arvude  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(2022)$  hulgas?

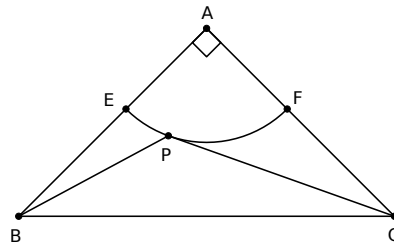
*Vastus.* 207

*Lahendus.* Kuna  $f(2202 - x) = f(x) = f(2202 - 137 + x) = f(2065 + x)$ , siis on funktsioon  $f$  perioodiline perioodiga 2065. Sarnaselt  $f(3028 - x) = f(x) = f(3028 - 2202 + x) = f(826 + x)$ , kust me saame perioodi 826. On üldtuntud, et kui funktsioonil on kaks või enam perioodi  $p_1, p_2, p_3, \dots$  siis on sellel ka periood  $\gcd(p_1, p_2, p_3, \dots)$ , seega funktsiooni  $f$  periood on  $\gcd(826, 2065) = 413$ . Võrrandist  $f(x) = f(137 - x)$  saame, et funktsioon on sümmeetriline sirge  $68.5 + 137 \cdot k$  suhtes, ehk näiteks  $f(68) = f(69)$ ,  $f(0) = f(137)$  või  $f(276) = f(137 - 276) = f(137 - 276 + 413) = f(274)$ . Seega maksimaalne eri väärtuste arv on  $\frac{413+1}{2} = 207$ .

**Ülesanne 44.** Olgu  $ABC$  võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, kus  $|AB| = |AC| = 4$ . Punkt  $P$  valitakse kolmnurga  $ABC$  sees nii, et  $|PA| = 2$ . Leia avaldise  $\frac{|BP|}{2} + |CP|$  vähim võimalik väärtus.

*Vastus.*  $\sqrt{17} \doteq 4,123$

*Lahendus.*



Valime küljel  $AB$  punkti  $T$  nii, et  $|AT| = 1$ . Siis  $|AP| = 2$ ,  $|AB| = 4$ . Seega  $|PA|^2 = |AT| \cdot |AB|$ , ehk  $\frac{|PA|}{|AT|} = \frac{|AB|}{|PA|}$ . Veelgi enam,  $\angle PAT = \angle PAB$ . Järelikult on kolmnurgad  $\triangle PAT, \triangle BAP$  sarnased, kust me leiame  $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{AB} = \frac{1}{2}$ . Seega  $PT = \frac{BP}{2}$ . Seega  $\frac{|BP|}{2} + |CP| = CP + PT$ . Seega  $|CT| = \sqrt{|AT|^2 + |AC|^2} = \sqrt{17}$ . Seega

$$PC + PT \geq TC = \sqrt{17}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui punktid  $C, P, T$  asuvad ühel sirgel.

**Ülesanne 45.**  $4 \times 4$  ruudustikus asetatakse mõndade ühikruutude diagonaalidele ühepoolsed peeglid, kokku 8 tükki (igas ühikruudus maksimaalselt üks). Valguskiir peegeldub peegli peegeldavalt küljelt, ning neeldub täielikult, kui kohtub mõne peegli tagaküljega. Iga kaheksa ruudustikku piirava vertikaalse ühiklõigu keskel on laser, mis on suunatud horisontaalselt ruudustikku sisemuse suunas. Mitmel eri viisil on võimalik peegleid paigutada nii, et iga kaheksast valguskiirest väljub ruudustikust kas ülemise või alumise külje kaudu (ehk ükski valguskiir ei haju ega ei läbi ühtegi laserit)?

*Vastus.* 90

*Lahendus.* Paneme tähele, et piisab valida kaks ruutu igast reast ning veerust ning see annab soovitud tingimustele vastava peeglite paigutuse.

Tõepoolest, igas reas ja veerus peab olema vähemalt 2 peeglit, kuna muidu oleks meil kas vertikaalne või horisontaalne valguskiir, või mõni valguskiir hajuks. Vastupidiselt, kui me oleme valinud 8 ruutu nii, et igas reas ja veerus on valitud 2 ruutu, siis me valime iga peegli suuna niimoodi, et see moodustab paari talle lähimal olevate külgedega. See annab sobiva (ning ainsa sobiva) peeglite paigutuse antud ruutude jaoks.

Seega tahame me leida võimaluste arvu valida 8 ruutu  $4 \times 4$  ruudustikus nii, et igas reas ja veerus on valitud täpselt 2 ruutu. Pöörates peegleid ümber (vahetades nende peegeldava ja hajuva poole), saame me, et iga laser tekitab meie

Et saada 8-tsikkel, valime esmalt 2 peeglit ülemisest reast, mida saab teha kuuel eri viisil. Nüüd valime kaks peeglit vastavatest veergudest nii, et nad ei asu samas reas, selle jaoks on  $3 \cdot 2$  valikut. Viimaks valime viimase peegli ühes ridadest, kus hetkel on ainult üks peegel, mida saab teha kahel eri viisil. See määrab üheselt meie 8-tsükli, mille jaoks meil on  $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$  eri valikut. Kokku on meil seega  $72 + 18 = 90$  valikut.

*Vastus.* 1014492753623188405797

**Ülesanne 47.** Kaks võlurit, Arithmetix and Combinatorica, võitlevad omavahel. Mõlemad alustavad 100 elupunktiga. Arithmetix saab kasutada kahte loitsu: üks teeb 50 punkti võrra kahju (ehk kahandab vastase elupunktide arvu 50 võrra), teine alandab vastase loitsude täpsust võitluse lõpuni 25 % võrra (näiteks 65 % pealt 40 % peale). Loitsu täpsus on tõenäosus, et loits töötab ning tabab vastast (siin arvestame negatiivset tõenäosust kui null-protsendilist tõenäosust), ning mõlemal Arithmetixi loitsul on sajaprotsendiline täpsus. Combinatorica kasutab alati loitsu, mis teeb 50 punkti kahju ning omab võitluse algul täpsust 100 %. Võlurid kasutavad loitse kordamööda ning ükshaaval. Arithmetix alustab ning iga käigu alguses viskab ta kulli või kirja, et otsustada, kumba oma loitsudest kasutada (nii kulli kui kirja tõenäosus on 50 %). Võitlus lõpeb, kui ühel võluritest on 0 või vähem elupunkti. Mis on tõenäosus, et emb-kumb neist võidab nii, et neile pole kordagi kahju tehtud?

$$Vastus. \quad \frac{141}{1024} \doteq 0,138$$

Märkame, et esimene loits ei saa olla ründeloits, kuna sel juhul Combinatorica laseb enda loitsu kindlasti pihta ja seega mõlemad võlurit saavad kahju. Lisaks paneme tähele, et kui  $p = 0\%$  mingil hetkel, siis Arithmetix võidab, kuna tõenäosus, et võitlus kestab igavesti, läheneb nullile. Combinatorical kulub kaks lasku, et Arithmetix hävitada, seega, et Combinatorica võidaks, pidi Arithmetix kasutama täpsusloitsu vähemalt kaks korda. See annab meile, et soovitud olukorrad on  $(100, 0.75, C)$ ,  $(100, 0.50, C)$ ,  $(100, 0.25, C)$ ,  $(100, 0.0, C)$ ,  $(0, 100, 50, A)$  ja  $(0, 100, 25, A)$ .

- Esimene võimalus saab tekkida ainult järgneva võitluse tagajärjel: täpsusloits, lask mööda, lask pihta, lask mööda, lask pihta, mis juhtub tõenäosusega  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$ .
- Teise võimaluse jaoks on meil kaks varianti: täpsusloits, lask mööda, lask pihta, lask mööda, täpsusloits, lask mööda, lask pihta või täpsusloits, lask mööda, täpsusloits, lask mööda, lask pihta, lask mööda, lask pihta. Mõlemal juhul on Arithmetixi loitsude tegur meie korruptises  $\frac{1}{24}$ , aga Combinatorica tegur on vastavalt kas  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4}$  või  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5}$ , seega selle võimaluse tõenäosus on  $\frac{1}{24}(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}) = \frac{3}{2^9}$ .
- Analoogselt saame järeldada, et võimaluse  $(100,0,25,C')$  tõenäosus on  $\frac{1}{2^5}(\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7}) = \frac{9}{2^{11}}$ .
- Arithmetixi viimase võitva variandi tõenäosus on  $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5} \cdot (\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7}) = \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} = \frac{21}{2^{11}}$ .
- Combinatorica esimene võiduvõimalus on täpsusloits, lask pihta, täpsusloits, lask pihta, kust me leiame  $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2^2} \cdot 12 = \frac{3}{2^5}$ .
- Combinatorica teine võiduvõimalus on kas täpsusloits, lask pihta, täpsusloits, lask mööda, täpsusloits, lask pihta või täpsusloits, lask mööda, täpsusloits, lask pihta, täpsusloits, lask pihta. Nende summaarne tõenäosus on  $\frac{1}{2^3} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{2^3}(\frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5}) = \frac{1}{2^6}$ .

Seega tõenäosus, et emb-kumb võlur võidab võitluse ise kahju saamata on ülaltoodud tõenäosuste summa, milleks on  $\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} + \frac{21}{2^{13}} + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{29}{2^{10}} + \frac{7}{2^6} = \frac{141}{1024}$ .

**Ülesanne 48.** Olgu  $a$  ja  $b$  positiivsed täisarvud ning  $(A_n)_{n=1}^\infty$  reaalarvude jada, mis rahuldab tingimust  $A_1 = b, A_2 = a$  ning

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \quad \text{kui } n \geq 3.$$

Olgu  $(B_n)_{n=1}^\infty$  veel üks jada, mis rahuldab tingimust  $B_1 = a + 2b, B_2 = 3a + b$  ning taas

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} \quad \text{kui } n \geq 3.$$

Me teame lisaks, et leiduvad indeksid  $k, l \geq 1$  nii, et  $A_k = 2022$  ja  $B_l = 2793$ . Mis on avaldise  $a \cdot b$  vähim võimalik väärtus?

*Vastus.* 1080

*Lahendus.* Märkame, et  $B_n = A_n + A_{n+2} - n = 1$  korral saame me  $A_1 + A_3 = A_1 + (A_1 + A_2) = a + 2b = B_1$ ,  $n = 2$  korral saame  $A_2 + A_4 = A_2 + (A_2 + A_3) = 2a + (a + b) = 3a + b = B_2$  ning edasi saame induktsiooniga  $B_{n+2} = B_{n+1} + B_n = (A_{n+1} + A_{n+3}) + (A_n + A_{n+2}) = (A_n + A_{n+1}) + (A_{n+2} + A_{n+3}) = A_{n+2} + A_{n+4}$ .

Kuna  $a, b$  on positiivsed, siis  $A_{n+1} > A_n$  kui  $n \geq 2$  ja  $A_3 > A_1$ . Nagu me varsti näeme, siis 1080 on vastusena saavutatav. Oletame, et  $k > 2$ , kuna muidu vastus  $ab = A_1 A_2$  oleks vähemalt 2022.

Eeldus  $k \leq l$  on vastuolus tulemusega

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2A_l > 2A_l \geq 2A_k = 2 \cdot 2022 = 4044.$$

Seega  $k > l$ . Veelgi enam,  $k = l + 1$  annab

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2A_l = 2022 + 2A_l,$$

ja kuna parem pool on paaris, kuid vasak pool on paaritu, ei ole see juht võimalik. Eeldus, et  $k > l + 3$  on vastuolus tulemusega  $2793 = A_l + A_{l+2} < A_{k-1} + A_{k-2} = 2022$ . Sarnaselt annab eeldus  $k = l + 3$  meile

$$A_l - A_{l+1} = (A_l + A_{l+2}) - (A_{l+1} + A_{l+2}) = 2793 - 2022 = 771,$$

mis on võimalik vaid siis, kui  $l = 1$ . Aga siis  $ab = b(b + 771)$  annab arvust 1080 parema tulemuse vaid siis, kui  $b = 1$ ,  $a = 772$ . Kuid need algtingimused meie jadale  $A_n$  annab jada 772, 1, 773, 774, 1547, 2321, milles arv 2022 ei sisaldu, järelikult  $k \neq l + 3$ .

Seega ainus võimalik juht on  $k = l + 2$ . Me saame  $A_{l+2} = 2022$ ,  $A_l + A_{l+2} = 2793$ , kust  $A_l = 771$ ,  $A_{l+1} = 1251$ , mis laseb meil leida jada eelmiseid liikmeid:  $A_{l-1} = 480$ ,  $A_{l-2} = 291$ ,  $A_{l-3} = 189$ ,  $A_{l-4} = 102$ ,  $A_{l-5} = 87$ ,  $A_{l-6} = 15$ ,  $A_{l-7} = 72$ ,  $A_{l-8} = -57$ . Me näeme, et  $b = 72$ ,  $a = 15$  on minimaalne võimalik algsete väärtuste valik, mis annab vastuseks  $15 \cdot 72 = 1080$ .

**Ülesanne 49.** Iga sügavusega 10 *perfektse kahendpuu* tipus (puul on  $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1$  tippu) asub õun. Igas õunas elab  $2^{11} - 2$  ussi. Mingil hetkel otsustavad kõik ussid samaaegselt kolida elama mõnda muusse õuna. Nad teevad seda nii, et ükski kaks ussi samast õunast ei koli elama samasse õuna ning ükski uss ei jää elama oma algsesse õuna. Mis on summaarne pikkus, mille kõik ussid kõikidest õunadest peavad läbima, kui on teada, et puu kõik servad on pikkusega 1?

Märkus: Perfektne kahendpuu on puu, kus igal sisemisel tipul on täpselt kaks järglast, kellel on mõlemal sama sügavus.

*Vastus.* 67166208

*Lahendus.* Vaatame ülesande üldjuhtu, kus  $T_n$  tähistab perfektset kahendpuud sügavusega  $n$  (meie ülesandes  $n = 10$ ). Tähistagu  $V_k$  kõikide selliste tippude hulka, mille kaugus igast lehest on vähemalt  $k$ . (kaugus 0 tähendab, et tegu on lehtede hulgaga, kaugus 1 tähendab, et tegu on lehtede naabritega jne.) Tähistagu  $E_k$  servade hulka  $V_k$  ja  $V_{k+1}$  vahel.

Meie puus  $T_n$  on  $2^{n+1} - 1$  tippu. Vaatleme serva  $e$  hulgas  $E_k$  ja loendame, mitu ussi seda läbib. Olgu  $p, q$  tippude arv vastavalt ühel ning teisel pool seda serva. Kuna tegu on puuga, siis iga uss, mis läheb mõnest tipust, mida me loendame  $p$  hulgas, mõnda tippu, mida me loendame  $q$  hulgas, peab läbima meie serva. Seega seda serva läbivate usside arv on  $p \cdot q$ . Kuna üks hulk on alati  $T_k$ , siis  $p = |T_k| = 2^{k+1} - 1$  ja  $q = |T_n| - |T_k| = 2^{n+1} - 1 - 2^{k+1} + 1 = 2^{n+1} - 2^{k+1}$ . Seega  $2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1})$ . Hulgas  $E_k$  on  $2^{n-k}$  tippu, seega usside arv, kes läbivad hulka  $E_k$ , on  $(2^{n-k+1}) \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1}) = (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2}$ . Summeerides seda avaldist iga  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  jaoks, saame me

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2} = 2^{n+2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) = 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}).$$

Summad vasakul ja paremal poolel on samad summad, lihtsalt esitatud erineval kujul, seega:

$$\begin{aligned} 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}) &= 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot \sum_{k=1}^n 2^k) = \\ &= 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot (2^{n+1} - 2)) = 2^{n+2} \cdot ((n-2) \cdot 2^{n+1} + n + 4). \end{aligned}$$

Kui  $n = 10$ , siis vastus on  $4096 \cdot (8 \cdot 2048 + 14) = 67166208$ .

**Ülesanne 50.** Algarvu  $p$  jaoks olgu  $N_p$  selliste kolmikute  $(a, b, c)$  arv, et  $a, b, c \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  ning

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3abc \pmod{p}.$$

Leia kõikide algarvude  $p \leq 1000$  summa, mille korral  $N_p > p^2 + p$ .

*Vastus.* 36668

*Lahendus.* Paneme tähele, et  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ . Kui  $a-b = x, b-c = y$ , siis  $c-a = -x-y$ . Siis saame me  $\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = x^2 + xy + y^2$ . Nüüd kasutame järgnevaid fakte:

1. Kui  $p \equiv 2 \pmod{3}$  on selline, et  $p$  jagab arvu  $x^2 + xy + y^2$ , siis  $p$  jagab arve  $x, y$ .
2. Kui  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , siis võrrandil  $z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  on kaks lahendit, milleks on  $r, r^{-1}$ . Seega  $x^2 + xy + y^2 \equiv (x - ry)(x - r^{-1}y) \pmod{p}$ . Seega, kui  $p$  jagab arvu  $x^2 + xy + y^2$ , siis  $x \equiv ry \pmod{p}$  või  $x \equiv r^{-1}y \pmod{p}$ .

Kui  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , siis kas  $a + b + c \equiv 0 \pmod{p}$ , mis annab meile  $p^2$  kolmikut, või  $p$  jagab arvu  $x^2 + xy + y^2$ , mis meie esimese fakti põhjal annab  $a - b \equiv b - c \equiv 0 \pmod{p}$ . Seega  $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$ . Piisab eemaldada juht, kus meil on mitu samat elementi ehk juht, kui  $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$  ja  $a + b + c \equiv 0 \pmod{p}$ . Seega eemaldame me lahendi  $(0, 0, 0)$ . Seega on meil  $p^2 + p - 1$  lahendit. Seega  $N_p \leq p^2 + p$  iga  $p \equiv 2 \pmod{3}$  korral.

Kui  $p \equiv 1 \pmod{3}$ , siis meil on  $p^2$  lahendit võrrandile  $a + b + c \equiv 0 \pmod{p}$ . Kui  $p$  jagab arvu  $x^2 + xy + y^2$ , siis teise fakti põhjal kas  $a - b \equiv r(b - c) \pmod{p}$  või  $a - b \equiv r^{-1}(b - c) \pmod{p}$ . Esimesel juhul saame me  $a \equiv (r+1)b - rc \pmod{p}$  ning teisel juhul  $a \equiv (r^{-1}+1)b - r^{-1}c \pmod{p}$ . Kummalgi juhul saame me  $p^2$  kolmikut  $(a, b, c)$ . Viimasel kahel juhul leiduvad ühised lahendid parajasti siis, kui  $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$ . Seega topeltloendame me  $p$  lahendit. Kui esimesel kahel võrrandil on ühine lahen, siis  $(r+2)b - (r-1)c \equiv 0 \pmod{p}$ . Siit leiame me  $p$  lahendit. Viimaks, kui kõigil kolmel võrrandil on ühine lahend, siis  $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}$ . *Juurde- ja mahaarvamise valemist* näeme me, et meil on kokku  $3p^2 - 3p + 1$  lahendit.

Viimaks, kui  $p = 3$ , siis  $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod{3}$ . Kuna  $x^3 \equiv x \pmod{3}$ , siis  $a + b + c \equiv 0 \pmod{3}$ . Seega on sel juhul ainult 9 lahendit.

Kuna  $3p^2 - 3p + 1 > p^2 + p$  kõikide algarvude korral, mis on kujul  $3k+1$ , saame me, et vastus on kõikide algarvude, mis on kujul  $3k+1$ , summa. Nende summa on **36668**.

**Märkus.**

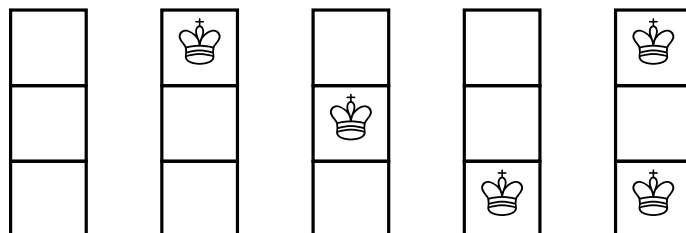
Faktide 1 ja 2 tõestamiseks on mitu eri võimalust. Et tõestada esimest, vaatame võrrandit  $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$ . Tõstes mõlemad pooled astmele  $\frac{p+1}{3}$ , saame me  $x^{p+1} \equiv y^{p+1} \pmod{p}$ . Kui  $p$  ei jaga arve  $x, y$ , siis järelikult  $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$ . Seega,  $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$  ja  $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$ , kust  $x \equiv y \pmod{p}$ . Seega  $0 \equiv x^2 + xy + y^2 \equiv 3y^2 \pmod{p}$ . Järelikult  $p$  jagab arvu 3, aga  $p$  on kujul  $3k+2$ .

Et tõestada teine fakt, märkame, et võrrandil  $z^3 \equiv 1 \pmod{p}$  on kolm lahendit alati, kui  $p \equiv 1 \pmod{3}$ . Seega võrrandil  $z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  on kaks lahendit, milleks on  $r, r^{-1}$ .

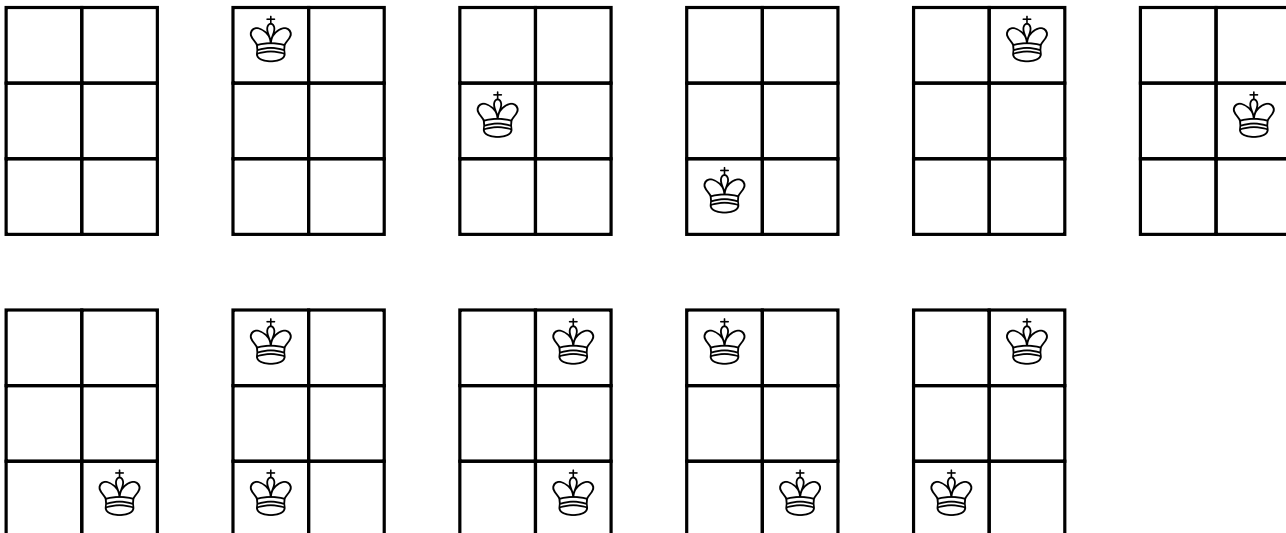
**Ülesanne 51.** Leia võimaluste arv asetada malekuningaid (vähemalt üht)  $3 \times 11$  malelauale nii, et ükski kaks kuningat ei ole tule all. Märkus: "Ükski kaks kuningat ei ole tule all" tähendab, et ükski kaks kuningat ei tohi asuda kahel ruudul, mis omavad ühist külge või tippu.

*Vastus.* 132 290

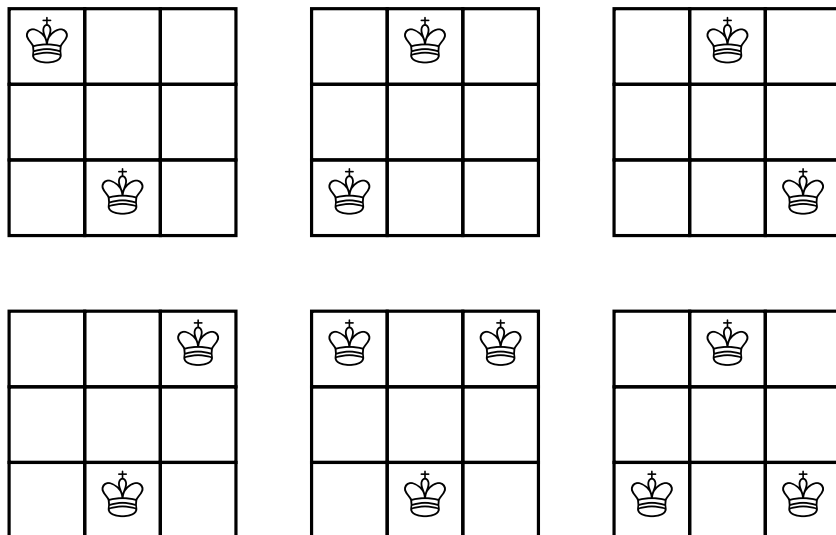
*Lahendus.*  $n \geq 0$  jaoks olgu  $k(n)$  võimaluste arv asetada malekuningaid  $3 \times n$  malelauale nii, et ükski kaks kuningat ei ründa teineteist, arvestades siin ka tühja malelaua võimalusega. Kuna leidub täpselt üks tühi malelaud, siis  $k(0) = 1$ . Veelgi enam, me leiame  $k(1) = 5$



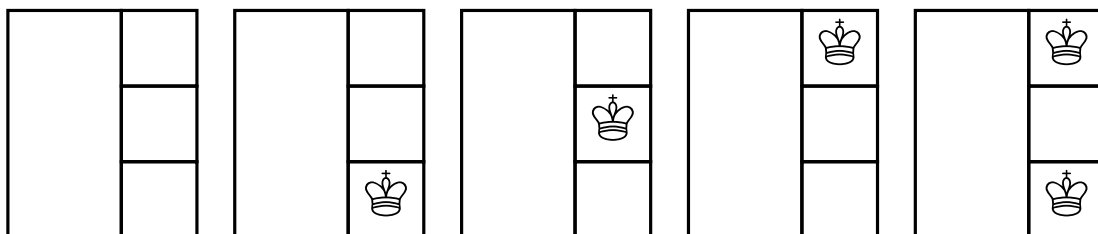
ja  $k(2) = 11$  loendamise teel.



Nüüd saame me leida  $k(3) = 35$ . Kui keskmises veerus ei asu ühtegi kuningat, siis on meil 5 võimalust esimese ja kolmanda veeru jaoks, kuna  $k(1) = 5$ . Siit saame me 25 võimalust (nende hulgas tühi malelaud). Kui ainult keskmises veerus on kuningaid, siis on meil 4 eri võimalust panna sellesse veergu üks või kaks kuningat. Lisaks on 6 võimalikku kuningate paigutust nii, et nii keskmine kui ka vähemalt üks äärmistest veergutest pole tühi.



Nüüd leiame me võimalikud positsioonid  $k(n)$   $3 \times n$  malelaual  $n \geq 2$  jaoks, vaadates, kuidas on parempoolseim veerg täidetud.



$k_e(n)$  (tühi)     $k_d(n)$  (all)     $k_m(n)$  (keskel)     $k_u(n)$  (üleval)     $k_t(n)$  (kaks)

Siit leiame me, et  $k(n) = k_e(n) + k_d(n) + k_m(n) + k_u(n) + k_t(n)$  ja kuna kuningad ei tohi teineteist rünnata, saame me järgnevad võrrandid:

$$\begin{aligned} k_e(n) &= k(n-1) \\ k_d(n) &= k_u(n-1) + k_e(n-1) \\ k_u(n) &= k_d(n-1) + k_e(n-1) \\ k_m(n) &= k_t(n) = k_e(n-1) \end{aligned}$$

Sümmeetriast saame me  $k_d(n) = k_u(n)$  ja  $n \geq 2$  korral leiame me avaldise

$$\begin{aligned} k(n) &= k_e(n) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_m(n) \\ &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_e(n-1) \\ &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k(n-2), \end{aligned}$$

kust me saame võrrandi

$$2 \cdot k_d(n) = k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2).$$

Võrrandist  $k_d(n) = k_u(n-1) + k_e(n-1)$  me saame

$$2 \cdot k_d(n) = 2 \cdot k_d(n-1) + 2 \cdot k(n-2).$$

Sisestades siia võrrandi  $k_d$  jaoks kaks korda, saame me rekursiooni

$$\begin{aligned} k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2) &= k(n-1) - k(n-2) - 2 \cdot k(n-3) + 2 \cdot k(n-2) \\ \iff k(n) &= 2 \cdot k(n-1) + 3 \cdot k(n-2) - 2 \cdot k(n-3) \end{aligned}$$

$k(n)$  jaoks, kus  $n \geq 3$  ja algtingimused  $k(0) = 1$ ,  $k(1) = 5$  ning  $k(2) = 11$ . Leides selle rekursiooni väärtused kuni väärtuseni  $k(11)$ , saame me

$$\begin{aligned} k(3) &= 2 \cdot 11 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 35 \\ k(4) &= 2 \cdot 35 + 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 93 \\ k(5) &= 2 \cdot 93 + 3 \cdot 35 - 2 \cdot 11 = 269 \\ k(6) &= 2 \cdot 269 + 3 \cdot 93 - 2 \cdot 35 = 747 \\ k(7) &= 2 \cdot 747 + 3 \cdot 269 - 2 \cdot 93 = 2115 \\ k(8) &= 2 \cdot 2115 + 3 \cdot 747 - 2 \cdot 269 = 5933 \\ k(9) &= 2 \cdot 5933 + 3 \cdot 2115 - 2 \cdot 747 = 16717 \\ k(10) &= 2 \cdot 16717 + 3 \cdot 5933 - 2 \cdot 2115 = 47003 \\ k(11) &= 2 \cdot 47003 + 3 \cdot 16717 - 2 \cdot 5933 = 132290. \end{aligned}$$

Lahutades maha meie tühja malelaua, saame me oma vastuse 132 290.

**Ülesanne 52.** Teravnurkses kolmnurgas  $ABC$  defineeritakse punktid  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$  järgnevalt:  $A'$  on punkt, kus tipust  $A$  tõmmatud kõrgus küljele  $BC$  lõikub poolringjoonega diameetriga  $BC$ , mis asub kolmnurgast väljaspool. Punktid  $B'$ ,  $C'$  on defineeritud analoogselt. Tähistagu  $[XYZ]$  kolmnurga  $XYZ$  pindala. Kui  $[BCA'] = 5$ ,  $[B'CA] = 6$ ,  $[BC'A] = 7$ , siis leia  $[ABC]$ .

*Vastus.*  $\sqrt{110} \doteq 10,488$

*Lahendus.* Me tõestame  $[BCA']^2 + [CAB']^2 + [ABC']^2 = [ABC]^2$ , millest saame otse vastuse leida.

Tähistagu  $D$  punktist  $A$  küljele  $BC$  tõmmatud kõrguse aluspunkti. Eukleidese teoreemidest saame me näidata, et  $|A'D|^2 = |BD| \cdot |DC|$ , seega

$$\left( \frac{[BA'C]}{[BAC]} \right)^2 = \frac{|BD| \cdot |CD|}{|AD|^2}.$$

Kuna  $\frac{|BD|}{|AD|} = \cot(\beta)$ , siis tahame me tõestada, et

$$\sum \cot(\beta) \cdot \cot(\gamma) = 1.$$

Kuna  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , siis järelikult

$$0 = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma),$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha),$$

$$1 = \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)} + \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma)} = \cotan(\beta) \cdot \cot(\gamma) + \cot(\alpha) \cdot \cot(\gamma) + \cot(\beta) \cdot \cot(\alpha) = 1.$$

Seega pindala  $[ABC]$  on  $\sqrt{[A'BC]^2 + [AB'C]^2 + [ABC']^2} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}$ .

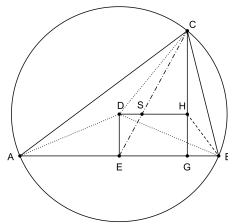
**Ülesanne 53.** Arvutimängus *The Settlers* leiab Valentin uue saare, millel on järgnevad omadused:

- Saar on ringikujuline, ning selle kallastel asuvad kolm sadamat  $A$ ,  $B$ , ja  $C$ .
- Saarel asuvad neli olulist hoonet  $D$ ,  $E$ ,  $G$ , ja  $H$ , mis moodustavad ristküliku  $DEGH$  tipud.
- Saare keskel, punktis  $D$ , asub loss.
- Kirik  $E$  asub täpselt sadamate  $B$  ja  $A$  vahelise tee keskel.
- Jahimehe hütt  $G$  asub sadamale  $B$  lähemal kui sadamale  $A$ .
- Kohalik kauplus  $H$  asub kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunktis.

Valentin teab, et pikkus punktide  $D$  ja  $E$  vahel on 8 km ning et pikkus punktide  $E$  ja  $G$  vahel on 13 km. Mitu kilomeetrit peab ta oma maaki poest lähima sadamani tassima?

*Vastus.* 10

*Lahendus.* Järgnevad arvutused teeme me ühikuid kasutamata. Kuna  $DEGH$  on ristkülik, siis  $|DE| = |HG| = 8$  ning  $|DH| = |EG| = 13$ . Me teame, et  $H$  on punktile  $B$  lähemal kui punktile  $A$  ja et  $D$  ja  $H$  on kolmnurga  $\triangle ABC$  vastavalt ümberringjoone keskpunkt ja kõrguste aluspunkt.



Kuna ümberringjoone keskpunkt  $D$ , mediaanide lõikepunkt  $S$  ja ümberringjoone keskpunkt  $H$  asuvad kõik Euleri sirgel ning rahuldavad tingimust  $|SH| = 2|DS|$ , siis sarnased kolmnurgad  $\triangle SHC$  ja  $\triangle EGC$  annavad

$$\frac{|CH|}{|HS|} = \frac{|CG|}{|GE|} \iff \frac{|CH|}{2} = \frac{|CG|}{3} \iff |CH| = 2 \cdot |HG|.$$

Järelikult  $|CH| = 16$ . Kuna  $\triangle DHC$  on täisnurkne, siis  $|CD|^2 = 16^2 + 13^2$  Pythagorase teoreemist. Paneme tähele, et kolmnurga  $\triangle ABC$  ümberringjoone raadius on  $|AD| = |BD| = |CD|$ . Täisnurkses kolmnurgas  $\triangle AED$  leiame me  $|AE| = \sqrt{16^2 + 13^2 - 8^2} = 19 = |EB|$  ja järelikult  $|GB| = 19 - 13 = 6$ . Kasutades taas Pythagorase teoreemi, leiame me  $|HB|^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ . Seega vahemaa punktist  $H$  lähima sadamani on 10 km.