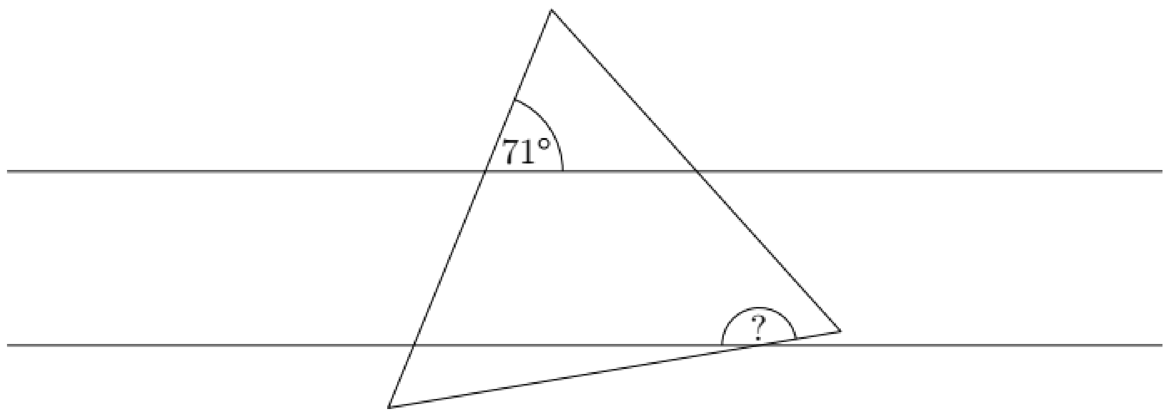
**سوال یکم**. درشکل زیر دو خط موازی اضلاع مثلثی قائم الزاویه را قطع کرده اند. باتوجه به اندازه ی زاویه های داده شده، اندازه ی زاویه ای که باعلامت سوال مشخص شده است چند درجه است؟



**سوال دوم.** آدل[1]، از هر یک از هفت رنگ: قرمز، آبی، سبز، زرد، سیاه، پرتغالی، و ارغوانی یک تی شرت و یک شلوار دارد. او می خواهد یک تی شرت و یک شلوار با رنگ های متفاوت را برتن کند. همچنین، وقتی که یک تکه لباس قرمز به تن داشت می خواهد که تکه لباسی زرد هم برتن کند. آدل به چند روش می تواند لباس بپوشد؟

[1] *Adele*

**سوال سوم**. مجموع شش عدد طبیعی متفاوت برابر با 22 می باشد. حاصل ضرب آن ها چند است؟

**سوال چهارم.** برای ساختن یک مکعب مربع به چند قطعه آجر $20 \times 15 \times 6$ نیاز هست اگر تمامی آجر ها را هم جهت روی هم قرار بدهیم؟

**سوال پنجم.** سوفی[2] پاره خطی به طول واحد را رسم کرده است و می خواهد مثلثی قائم الزاویه به مساحت 0.2 بسازد به طوری که این پاره خط، یکی از ضلع های آن مثلث باشد. وی متوجه می شود که به روش های متفاوتی می تواند این کار را انجام بدهد. به چند روش می توان چنین کاری را انجام داد؟

[2] *Sophie*

**سوال ششم.** در حاصل جمع زیر، هر حرف نشان گر یک رقم ناصفر است. عددسه رقمی $\overline{BAC}$ را حساب کنید.

$$\overline{AAB} + \overline{ABA} + \overline{CC} = \overline{BAC}.$$

**سوال هفتم**. یک عدد طبیعی را "خوش مزه[3]" نامیم هرگاه حاصل ضرب رقم هایش برابر با $36$ باشد. اگر $a, b$ عددهایی باشند که به صورت زیر تعریف شوند:

**یکم**. $a$ برابر با مجموع رقم های کوچک ترین عدد خوش مزه می باشد،

**دوم.** $b$ برابر با کوچک ترین جمع ارقام یک عدد خوش مزه می باشد.

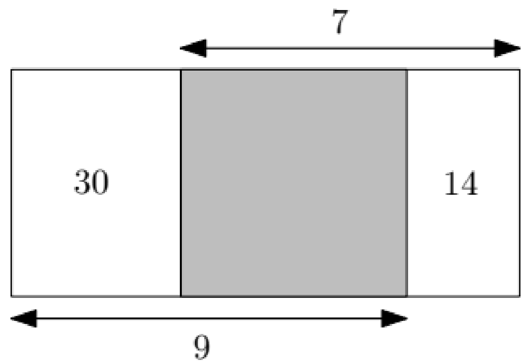
حاصل $a - b$ را حساب کنید.

[3] tasty

**سوال هشتم.** روزی روزگاری، آدم آهنی ها[4] نخستین پایگاه را در مریخ برای $100$نفر احداث کردند و از آن روزماهانه به تعداد $10$نفرظرفیت آن را گسترش داده اند. درهمان روز، نخستین فضاپیمای مریخ از زمین به راه افتاد تا $20$ پناه جو را پس ازطی سفری $7$ماهه به پایگاه برساند. این سفر، نخستین ماموریت از میان $n$ ماموریت یک سانی بود که طبق برنامه، $0,1,\dots,n-1$ ماه پس از روز احداث بایستی انجام بشوند. حداکثر مقدار ممکن برای $n$ را طوری پیداکنید که ایستگاه هرگز پرنشود.

[4] robots

**سوال نهم**. درشکل زیر، یک مستطیل به سه مستطیل کوچک تر تقسیم شده است. مساحت دو مستطیل و طول دو پاره خط روی شکل مشخص شده اند؛ مساحت مستطیل میانی را پیدا کنید.



**سوال دهم**. مارک[5] و لوکاش[6] تصمیم گرفتند که با هم رقابت کنند: اگردر مسابقه ی نابوی، یکی از آن ها پاسخ نادرستی را به پرسش شماره ی $n$ بدهد، این فرد بایستی $10n$ مرتبه دراز و نشست کند. مسابقه ی نابوی دارای $42$ پرسش می باشد. مارک تنها به پرسش هایی با شماره های مضرب $5$ نگاه می کند و لوکاش تنها به پرسش هایی نگاه می کند که شماره ی آن ها باقی مانده ی $1$ را در تقسیم بر $5$ می آورند. می دانیم هریک از آن ها دست کم یک پاسخ نادرست را ثبت کرده اند، و هیچ پرسشی را برای دو مرتبه نادرست پاسخ نداده اند، و تعداد دراز و نشست های مارک و لوکاش برابر هستند، مارک حداقل چند مرتبه دراز و نشست رفته است؟

[5] Marek
[6] Lukas

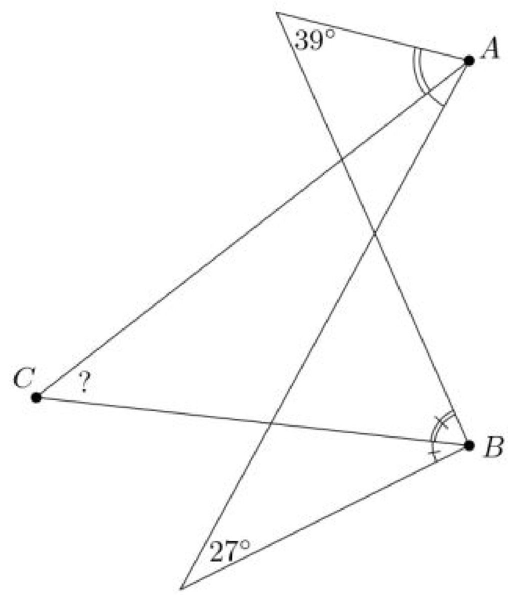
**سوال یازدهم.** درگروهی از 9 دوست، برخی از افراد به دیگران پول قرض داده اند. یک روز، آن ها تصمیم گرفتند تا قرض ها را بپردازند. مطابق شکل زیر؛ جدولی وجود دارد که تراز قرض های هر دوتا از دوستان را نشان می دهد، به طور مثال، فرد $A$، 5 واحد به فرد $B$ مقروض است. اگر منظور از یک تراکنش این باشد که یک فرد مبلغی را به فرد دیگری بپردازد، حداقل چند تراکنش لازم است تا همه ی قرض ها پرداخت شوند؟

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | −5 | −1 | 0 | 3 | 3 | 5 | 2 | 4 |
| B | 5 | 0 | 3 | −5 | 1 | 0 | 2 | 7 | −4 |
| C | 1 | −3 | 0 | −5 | 2 | 3 | 6 | −3 | 0 |
| D | 0 | 5 | 5 | 0 | −8 | −4 | 7 | 2 | 1 |
| E | −3 | −1 | −2 | 8 | 0 | 4 | −11 | 4 | −7 |
| F | −3 | 0 | −3 | 4 | −4 | 0 | 6 | −4 | 0 |
| G | −5 | −2 | −6 | −7 | 11 | −6 | 0 | −1 | 5 |
| H | −2 | −7 | 3 | −2 | −4 | 4 | 1 | 0 | 4 |
| I | −4 | 4 | 0 | −1 | 7 | 0 | −5 | −4 | 0 |

**سوال دوازدهم.** الکس[7] و ماکسی[8] به هنگام پیاده روی، 35 عدد نارگیل پیدا کردند. آن ها این نارگیل ها را به چندین (بیش از یک) کپه تقسیم کرده اند، به طوری که هر کپه دارای دست کم 2 عدد نارگیل است، سپس از هر کپه یک عدد نارگیل برداشته و روی کپه ی اول گذاشته اند. اکنون همه ی کپه ها دارای تعداد یکسانی نارگیل هستند. درابتدا چه تعداد نارگیل روی کپه ی دوم بوده است؟

[7] Alex
[8] Maxi

**سوال سیزدهم.** درشکل زیر، اندازه ی دو زاویه مشخص شده اند. هم چنین، نسبت اندازه ی زوایای مجاور روی راس $A$ به صوت $2:1$ بوده و چنین چیزی درباره ی راس $B$ نیز صادق است؛ درشکل زیر هم واره زاویه ی بزرگ تربا دو خط مشخص شده است. اندازه ی زاویه ی $ACB$ چند درجه است؟

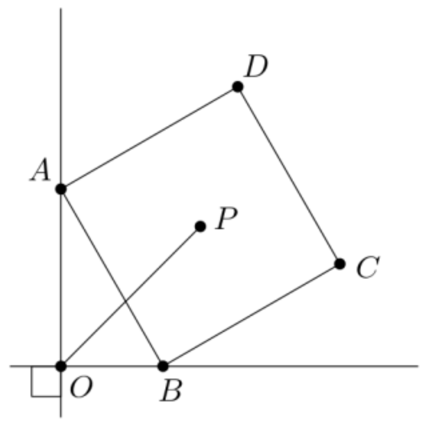


**سوال چهاردهم.** برای چند عدد صحیح $a$ تابع $f(x) = 9x^2 + ax - 2022$ که برروی همه ی عددهای حقیقی تعریف شده است دارای دقیقا 2022 مقدار صحیح و منفی متمایز خواهد بود؟

**سوال پانزدهم**. درشکل زیر نقطه ی $P$ مرکز مربع $ABCD$ است که در گوشه ی $AOB$ ترسیم شده است. اگر بدانیم

$$AO = 6, OP = 4\sqrt{2}$$

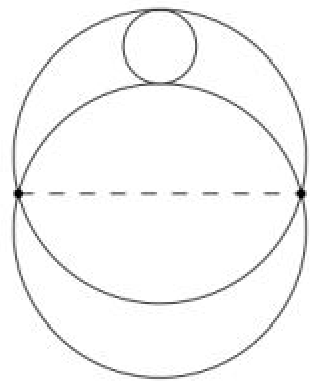
حاصل ضرب فاصله های نقطه ی $D$ از پاره خط های $OA, OB$ چند است؟



**سوال شانزدهم.** متروی شهر نابویپولیس[9] از یک مسیر دایره ای با 2022 ایستگاه که با شماره های $1,2, \ldots, 2022$ نام گذاری شده اند و فاصله ی میان هردوایستگاه هم سایه یکسان است، تشکیل شده است. پیتر[10] به هنگاه گشت و گذار درشهر، یک بلیط هفتگی می خرد و تصمیم می گیرد که کل زمان گشت وگذارش را در مترو بگذراند، و چند باربگردد. وی سفر خودرا از ایستگاه 1 آغاز کرده و قطارش در مسیر صعودی حرکت می کند (یعنی؛ شماره ی ایستگاه بعدی برابر 2 خواهد بود). وی روی دیواره ی یکی از ایستگاه ها یک مسئله ی جالب می بیند. مدت زمان حل کردن این مسئله چهار برابرمدت زمان سفر پیتر تاپیش از مشاهده ی مسئله بوده است. دقیقا در لحظه ای که پیتر مسئله را حل کرد، به ایستگاه 2022 رسید. او در ایستگاه شماره ی چند مسئله را مشاهده کرده است؟

9 Nabojpolis
10 Petr

**سوال هفدهم.** درشکل زیر، سه دایره را مشاهده می کنید: دایره ی کوچک به شعاع $1$ بر دو دایره ی دیگر که هم اندازه هستند، مماس است. هم چنین، مرکزیکی از این دو دایره درواقع وسط پاره خطی است که مرکز دو دایره ی دیگر را به هم وصل می کند. طول پاره خط هاشورخورده را حساب کنید.

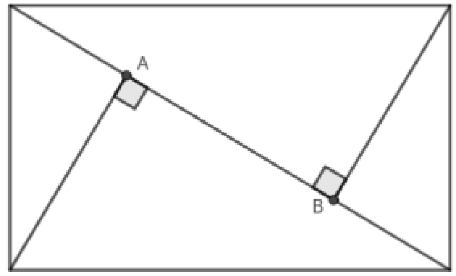


**سوال هجدهم.** 2022 اژدهای شیرنوش[11] در یک ردیف قرار گرفته اند. اولین اژدها 1شیشه شیر دارد، دومین اژدها 2 شیشه شیر دارد، و به همین ترتیب، 2022 امین اژدها 2022 شیشه شیر دارد. نخستین اژدها نیمی از شیر موجود درشیشه شیر خود رادرقالب نصف شیشه شیری که دارد به اژدهای دوم می دهد، دومین اژدها نیمی از شیری را که دارد درقالب نیمی از شیشه شیرهایش به اژدهای سوم می دهد، و به همین ترتیب، اژدهای 2021 ام، نیمی از شیری را که دارد درقالب نیمی از شیشه شیرهایش به اژدهای 2022 ام می دهد. اژدهای 2022 ام چه مقدار شیر(باواحد شیشه شیر) خواهد داشت؟

[11] milk-drinking dragons

**سوال نوزدهم.** داخل مربع $ABCD$ به ضلع 2، نقطه ی $X$ به طور تصادفی انتخاب شده است. احتمال این که پاره خط های $AX, BX, CX, DX$ دارای طولی بیش از واحد باشند چند است؟

**سوال بیستم.** نسبت اضلاع مستطیل زیر $2:1$ می باشد و فاصله ی $A, B$ برابر $1$ است. مساحت مستطیل چند است؟



**سوال بیست و یکم.** هریک از پنج کوتوله کلاه هایی را با رنگ های مختلف پوشیده اند. دو کوتوله کلاه هایشان را باهم تعویض کرده اند و سپس دو کوتوله کلاه هایشان را تعویض کرده اند و این عمل یک بار دیگر نیز صورت گرفته است. در انتها هیچ کوتوله ای کلاه اصلی خودرا بر سر ندارد. این امر به چند طریق امکان پذیر است؟

**سوال بیست ودوم.** مارکوس[12] همه ی عددهای رومی را از $I, II, III, IV, \ldots$ تا $z$ رو تخته سیاه نوشته است، به طوری که هر عدد را روی یک خط جدید نگاشته است. آریل مشاهده می کند که بین عددهای نوشته شده تعداد این رشته ها باهم برابر هستند: $IV, IX, XL, XC, CD, CM$. کم ترین مقدار $z \geq IV$ که این امر ممکن باشد چند است؟ ( پاسخ را به صورت یک عدد دهدهی و نه به صورت یک عدد رومی ثبت کنید.)

[12] Marcus

**سوال بیست و سوم.** در میان پنجاه دانش آموز، برخی هاکی روی یخ و برخی هاکی روی چمن بازی می کنند (ممکن است برخی اصلا بازی نکنند، برخی یک بازی را انجام بدهند، و برخی هر دو بازی را انجام بدهند). تعداد دانش آموزانی که اصلا بازی نمی کنند دوبرابر بازی کنان هاکی روی چمن است. هم چنین تعداد دانش آموزانی که تنها هاکی روی یخ بازی می کنند پانزده عدد بیش از کسانی است که هر دو بازی را انجام می دهند. همه ی مقادیر ممکن را برای تعداد دانش آموزانی که هاکی روی یخ بازی نمی کنند یافته ایم، حاصل ضرب این مقادیر چند است؟

**سوال بیست و چهارم**. نقطه های $A, B, C, D$ روی دایره ای به شعاع $1$ و به مرکز $M$ قرار گرفته اند. پاره خط های $AB, CD$ برهم عمود هستند. دایره ای به قطر $AB$ بر دایره به قطر $CD$ در نقطه ی $P$ مماس است و این دو دایره هم اندازه نیز هستند. طول پاره خط $MP$ چند است؟

**سوال بیست و پنجم**. دنباله ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عددهای حقیقی به صورتی تعریف شده است که برای هر عدد طبیعی $n$:

$$a_{\mathrm{n}+1}^2 + a_{\mathrm{n}}^2 = a_{n+1} + a_n + 24.$$

حداکثر مقدار $a_1 + a_{2022}$ چند است؟

**سوال بیست و ششم.** بیش از $39\%$ اما کم تر از $40\%$ اعضای یک باش گاه شطرنج را پسرها تشکیل می دهند. اگر یکی از دختران باش گاه تصمیم بگیرد که باش گاه را ترک کند، درصد پسرها هم چنان زیر $40\%$ خواهد ماند، اما اگر به جای این که یک عضو از باش گاه کاسته شود، یک عضو جدید پسر به باش گاه افزوده شود، درصد پسر ها دست کم $40\%$ خواهد بود. حداقل مقدار ممکن برای تعداد اعضای باش گاه را در حال حاضر پیدا کنید.

**سوال بیست و هفتم**. سه تابع درجه دوم یافته ایم: $f_1$ یک ریشه ی مشترک با $f_2$ و $f_3$ دارد و تابع $f_2$ یک ریشه ی مشترک با $f_3$ دارد اما این سه تابع ریشه ی مشترکی ندارند.هم چنین معلوم شده است که این سه تابع ضابطه هایی به صورت زیر دارند:

$$f_1(x) = x^2 - bx + 1980,$$
$$f_2(x) = x^2 - (b+1)x + 2024,$$
$$f_3(x) = x^2 - (b+2)x + a.$$

می دانیم $a, b$ عددهایی حقیقی و ثابت هستند. مقدار $a$ را حساب کنید.

**سوال بیست و هشتم.** یک تورنمت والیبال دارای شش شرکت کننده است: آلیس[13]، باب[14]، چارلی[15]، دیو[16]، اوا[17]، و فرانک[18]. درهربازی، دو بازیکن در مقابل دو بازیکن دیگر بازی کرده اند. هر دوتایی ممکن از بازیکنان دربرابر هر دوتایی دیگر دقیقا یک بار بازی کرده است. آلیس 30 بازی را برده است، دیو 12 بازی را و فرانک 18 بازی را. باب چند بازی را برده است؟

[13] Alice
[14] Bob
[15] Charlie
[16] Dave

[17] Eva
[18] Frank

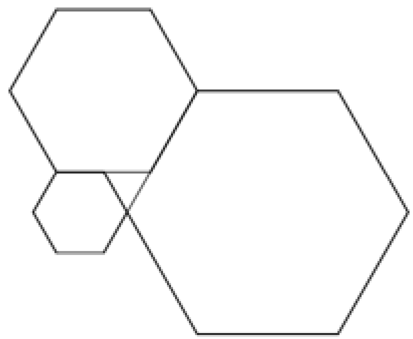
**سوال بیست ونهم.** مثلث قائم الزاویه ای را به اضلاع 3,4,5 درنظر بگیرید. این مثلث را می توان حول ارتفاعش به دو مثلث متشابه تقسیم نمود و می توان این فرآیند را ادامه داد، تعداد مثلث ها درهرگام دوبرابر خواهند شد. میانگین محیط مثلث هایی را که پس از پنج گام بدست خواهند آمد پیدا کنید.

**سوال سی ام.** مارسین[19] تصمیم می گیرد که تنها با یک دست و یک پا از دیوار سنگ نوردی ای بالا برود که با سنگ هایی با شماره های $1,2,\ldots,10$ شماره گذاری شده است و شماره ها به ترتیب صعودی قرار گرفته اند. به این صورت که؛ درحالی که دستش روی سنگ شماره ی $3$ و پایش روی سنگ شماره $1$ است کار را آغاز می کند. در هرگام می تواند دست یا پای خودرا روی سنگ های بالاتر قرار دهد، اما درهرگام اختلاف شماره های سنگ هایی که دست و پایش روی آن ها قرار گرفته اند حداکثر برابر $3$ و حداقل برابر $1$ باشد. وقتی که بتواند به سنگ شماره ی $10$ چنگ بزند، آن دیوار را پیموده شده می نامیم. مارسین به چند طریق می تواند دیوار را بپیماید؟

---

[19] Marcin

**سوال سی و یکم.** سه شش ضلعی منتظم درشکل زیر قرار دارند و طول ضلع کوچک ترین شش ضلعی برابر $1$ می باشد. مساحت کوچک ترین دایره ای که دربرگیرنده ی هرسه شش ضلعی باشد چند است؟



**سوال سی و دوم**. لوکاش[20] و تری[21] روی یک جدول $42 \times 42$ یک بازی را انجام می دهند. در ابتدا، لوکاش $x \geq 8$ اسب را روی جدول قرار می دهد (روی هر خانه حداکثر یک اسب می تواند قرار بگیرد). سپس، تری هشت اسب را انتخاب می کند. درنهایت، لوکاش تمامی اسب هایی را که تری انتخاب نکرده است از روی صفحه برمی دارد. تری برنده خواهد بود اگر درین لحظه دوتا از اسب ها وجود داشته باشند که هم دیگر را تهدید کنند. حداقل مقدار $x$ چه باشد که تری مطمئن باشد که بازی را صرف نظر از محل هایی که لوکاش $x$ اسب را می تواند بگذارد، خواهد برد؟

[20] Lukas
[21] Teri

**سوال سی و سوم**. طول یک رود یک مایل است. پل[22] 27 دقیقه لازم دارد تا با قایق خود در جهت جریان آب یک مایل را طی کند و 36 دقیقه لازم دارد تا یک مایل روی رودخانه حرکت کرده تا به نقطه ی مقابل خود روی ساحل برسد. پل چقدر زمان نیاز دارد تا یک مایل در جهت خلاف جریان آب حرکت کند؟ پاسخ خودرا برحسب دقیقه ثبت کنید.

[22] Paul

**سوال سی و چهارم**. دو برادر دوقلو، اسلون[23] و کوئیگلی[24]، در یک پیست بیضی شکل تمرین دو میدانی می کنند. آن ها از نقطه ی یکسانی شروع می کنند، که نقطه ی آغاز محسوب خواهد شد و هریک با سرعتی ثابت و دریک جهت حول پیست بیضی شکل می دوند. تمرین زمانی تمام خواهد شد که اسلون تازه وارد دور استادیم را بزند و به نقطه ی آغاز باز گردد. کوئیگلی بسیار با استعداد است و شش برابر سریع تر از اسلون می دود.

این دوقلوها کاملا همسان هستند، با این وجود، اگر به تصویری که از تمرین گرفته شده نگاه کنیم، عکسی که درواقع تصویری از استادیم است، معمولا می توانیم این دوبرادر را ازهم تشخیص بدهیم ( تنها برمبنای اطلاعات بالا و خود تصویر). حین تمرین چندبار می توانیم تصویری بگیریم که این دوبرادر را نتوان از هم تشخیص داد؟ ( ما آغاز و پایان تمرین را به حساب نمی آوریم.)

[23] Sloan
[24] Quigley

**سوال سی و پنجم.** یک پرونده که شامل یک متن به هم پیوسته است طوری صفحه آرایی شده که در هرصفحه ی آن 60 خط تایپ شده وجود دارد. اگر طوری صفحه آرایی کنیم که در هرصفحه ی آن 57 خط تایپ شده وجود داشته باشد، دو صفحه به تعداد کل صفحات افزوده خواهد شد. حداقل و حداکثر تعداد صفحاتی که این پرونده در ابتدا داشته را پیدا کرده و حاصل جمع آن ها را ثبت کنید.

**سوال سی و ششم**. در یک آیین موسیقایی بانام "زنگ تغییر[25]" از زنگ هایی که به طور دنباله ای از میزان ها[26] قرار گرفته اند برای صداسازی استفاده می شود. در یک میزان، زنگ ها به ترتیبی به صدا در می آیند، به طوری که هر زنگ دقیقا یک بار نواخته می شود. اکنون سه زنگ با شماره های $1,2,3$ را درنظر بگیرید. به دلایل فنی، مکان هر زنگ در دو میزان متوالی حداکثر یک واحد اختلاف خواهد داشت. یک آهنگ را "کسالت آور" گوییم اگر دو میزان متوالی آن یک سان باشند. چه تعداد آهنگ غیرکسالت آور شامل $21$ میزان وجود دارند که اولین و آخرین میزان آن ها $(1,2,3)$ باشند؟

[25] change ringing
[26] *measures*

**سوال سی و هفتم.** کارول[27] از یک قطعه کاغذ، پنج عدد چند ضلعی $P_0, P_1, \dots, P_4$ را هریک به طول 1می برد. وی $P_0$ را که یک مربع بوده برمی دارد و روی صفحه می گذارد. سپس، چهار چند ضلعی دیگر را روی همین صفحه ی به این ترتیب روی میز می گذارد:

**یکم**. هریک از $P_1, \dots, P_4$ دقیقا یک ضلع مشترک با $P_0$ دارند،

**دوم**. برای هر $i \in \{1,2,3\}$، $P_i$ دقیقا یک ضلع مشترک با $P_{i+1}$ داشته و چنین چیزی برای $P_4, P_1$ نیز صادق است.

درنهایت، کارول محیط ناحیه ای را که این پنج چند ضلعی شکل داده اند حساب می کند. میانگین حسابی همه ی مقادیر ممکنی را که وی می تواند به عنوان محیط پیدا کند، بیابید.

[27] Carol

**سوال سی و هشتم.** اگر $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی یک به یک باشد که برای هر $x>0$ بدانیم $f(x)>-\frac{4}{x}$ و

$$f\left(f(x)+\frac{4}{x}\right)=3,$$

حاصل $f(16)$ را حساب کنید. (تابع $f$ را یک به یک گوییم اگر تساوی $f(x)=f(y)$ به تساوی $x=y$ منجر شود.)

**سوال سی و نهم**. تری[28] در حال جنگل نوردی یک چشمه پیدا می کند. وی دو بطری با خود به هم راه دارد، یکی با حجم $2022\text{ml}$ و دیگری با حجم $51\text{ ml}$. وی می تواند آب را از یک بطری به بطری دیگر سرریز کند، هرکدام را به طور کامل از آب چشمه پرکند، یا محتوای آن ها را در آب چشمه خالی کند. با این عملیات، وی می خواند به وضعیتی برسد که:

یکم. او بداند که حجم $V$ از آب در یکی از بطری هاست،

دوم. $V$ کم ترین مقدار ممکن براساس شرط پیشین است.

حداقل چند بار بایستی آب را بین دو بطری سرریز کرد تا به این هدف برسد؟

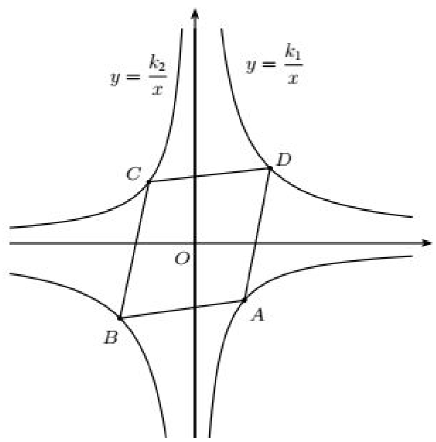
[28] Terry

**سوال چهلم.** اگر $a, b$ عددهایی طبیعی باشند به طوری که $a+b$ شمارنده ی $51.\mathrm{lcm}\,(a,b)$ باشد. عبارت

$$\frac{51.\mathrm{lcm}\,(a,b)}{a+b}$$

چند مقدار مختلف می تواند به خود بگیرد؟ منظور از $\mathrm{lcm}\,(a,b)$ کوچک ترین مضرب مشترک عددهای طبیعی $a, b$ می باشد.

**سوال چهل و یکم**. در شکل زیر، راس های لوزی $ABCD$ رو منحنی های $y=\frac{k_1}{x}$ و $y=\frac{k_2}{x}$ قرار گرفته اند. هرگاه $|\angle BCD| = 120^o$. حاصل $\left|\frac{k_1}{k_2}\right|$ را حساب کنید.



**سوال چهل و دوم.** $2022$ مهره از شش رنگ مختلف در یک جعبه هستند. اگر هر $2000$ تا از آن ها را برگزینیم، قطعا مهره هایی از پنج رنگ مختلف وجود خواهند داشت. حداقل مقدار $N$ چه باشد که براساس اطلاعاتی که داده شده، بتوانیم مطمئن باشیم میان هر $N$ مهره ای که انتخاب کنیم، مهره هایی از دست کم چهار رنگ مختلف وجود دارند؟

**سوال چهل و سوم**. اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که:

$$f(x) = f(137 - x) = f(2202 - x) = f(3028 - x),$$

حداکثر چند عدد متفاوت میان عددهای $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(2022)$ وجود خواهد داشت؟

**سوال چهل و چهارم**. $ABC$ مثلثی  قائم الزاویه متساوی الساقین می باشد که $|AB| = |AC| = 4$. نقطه ی $P$ داخل مثلث $ABC$ طوری قرار گرفته است که $|PA| = 2$. حداقل مقدار $|CP| + \frac{|BP|}{2}$ را پیدا کنید.

**سوال چهل و پنجم.** دریک جدول $4 \times 4$، تعداد $8$ آینه ی یک طرفه در راستای قطرهای برخی خانه های این جدول( و در هر خانه حداکثر یکی) قرار گرفته اند. آینه ها تنها پرتو نور ی را بازتاب می دهند که به طرف آینه ای آن ها برخورد کند و و درغیر این صورت آن پرتو را حذف می کنند. روی دو ضلع عمودی جدول و در وسط هریک از هشت پاره خط (که اضلاع خانه های جدول هستند)، لیزری کارگذاشته شده است، که (عمود) برجدول می تابد. به چند طریق می توان آینه ها را درجدول قرار داد تا هریک از هشت پرتو نوری که از سمت لیزر ها ساطع می شوند به زیر یا بالای جدول برخورد کنند (یعنی، هیچ پرتوی حذف نشود یا به پرتو لیزر دیگر برخورد نکند)؟

**سوال چهل و ششم**. کوچک ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که اگر رقم انتهایی اش را به ابتدایش ببریم هفت برابر شود (با این عملیات عدد $135$ به عدد $513$ تبدیل می شود).

**سوال چهل و هفتم**. دو جادوگر، آریتمتیکس[29] و کامبیناتوریکا[30]، مجددا باهم مواجه شده اند (شاید به یاد داشته باشید که این ها برای نخستین باردر نابوی $2018$ هم دیگر را ملاقات کرده بودند). هریک از آن ها $100$ واحد جان دارند. آریتمتیکس دوجادو را یاد گرفته است: یکی از آن ها $50$ ضربه وارد می کند ( از جان حریف $50$ واحد می کاهد) درحالی که جادوی دوم دقت حریف را در ادامه ی مسابقه $25\%$ کاهش می دهد (به طور مثال از $65\%$ به $40\%$). دقت حریف، احتمالی است که جادو واقعا عمل کند ( دقت منفی هم به معنای احتمال صفر است) و می دانیم هردو جادوی آریتمتیکس دارای دقت $100\%$ هستند. کامبیناتوریکا هم واره از جادویی استفاده می کند که $50$ ضربه وارد خواهد کرد و دقت ابتدایی آن $100\%$ می باشد. آن ها درهرگام تنها یک جادو را به کار می برند و این کار را به نوبت انجام می دهند. آریتمتیکس کار را شروع می کند و درهریک از نوبت هایش، با انداختن یک سکه ی سالم تصمیم می گیرد تا از کدام یک از جادوهایش استفاده کند. بازی زمانی به اتمام می رسد که جان یکی از جادوگرها به $0$ یا کم تر برسد. احتمال این که یکی ازین دو جادوگر بدون این که آسیبی ببینند برنده باشند چند است؟

[29] Arithmetix
[30] Combinatorica

**سوال چهل و هشتم**. اگر $a, b$ عددهایی طبیعی باشند و $A_n$ دنباله ای باشد که

$$A_1 = b, A_2 = a, A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, n = 3, 4, \ldots$$

و $B_n$ دنباله ای باشد که

$$B_1 = a + 2b, B_2 = 3a + b, B_n = B_{n-1} + B_{n-2}, n = 3, 4, \ldots.$$

هم چنین اگر بدانیم عددهای طبیعی $k, l \geq 1$ وجود دارند که $A_k = 2022, B_l = 2793$. حداقل مقدار ممکن برای $a \cdot b$ چند است؟

**سوال چهل و نهم.** روی هر یک از راس های یک درخت دودویی کامل به عمق $10$ (یعنی $1 + 2 + \cdots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ راس دارد) یک سیب رشد کرده است. هر سیب خانه ی $2^{11} - 2$ کرم است. به ناگاه، همه ی کرم ها تصمیم می گیرند که زمان رفتن به سیب تازه ای فرارسیده است. آن ها این کار را طوری انجام می دهند که هیچ دو کرمی که در یک سیب بوده اند باهم به سیب جدیدی نروند و هیچ کرمی هم در جای گاه اصلی خود نماند. اگر طول هر یال این درخت برابر $1$ باشد، مسافتی که همه ی این کرم ها ی مستقر در سیب ها بایستی روی یال های این درخت بخزند چند است؟

**توجه**. یک درخت دودویی کامل درختی است که همه ی راس های داخلی آن دارای دقیقا دو فرزند هستند و همه ی راس های درجه یک آن هم عمق هستند.

**سوال پنجاهم.** برای عدد اول $p$، منظور از $N_p$ تعداد سه تایی های $(a, b, c)$ است که $a, b, c \in \{0,1, \dots, p-1\}$ و

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3abc \ (mod\ p).$$

حاصل جمع همه ی عددهای اول $p \leq 1000$ را طوری پیدا کنید که $N_p > p^2 + p$.

**سوال پنجاه و یکم**. به چند روش می توان تعدادی (دست کم یک) پادشاه را روی یک جدول شطرنجی $11 \times 3$ قرارداد به طوری که هیچ دو پادشاهی هم دیگر را تهدید نکنند؟

**توجه**. منظور ازین که دوپادشاه هم دیگر را تهدید نکنند این است که دوپادشاه نمی توانند روی خانه های هم سایه، چه عمودی، چه افقی، و چه قطری قرار گیرند.

**سوال پنجاه و دوم**. مثل حاده الزاویه $ABC$ را دراختیار داریم. نقطه های $A', B', C'$ طوری قرار گرفته اند که $A'$ محل تلاقی ارتفاع وارد از $A$ بر $BC$ با نیم دایره ای به قطر $BC$، در خارج از مثلث است. به همین ترتیب نقطه های $B', C'$ نیز تعریف می شوند. اگر منظور از $[XYZ]$ مساحت مثلث $XYZ$ باشد. می دانیم $[BCA'] = 5, [B'CA] = 6, [BC'A] = 7$. حاصل $[ABC]$ را پیدا کنید.

**سوال پنجاه و سوم**. دربازی زنده ی سکونت کنندگان[31]، والنتین[32] می خواهد یک جزیره بسازد که حائز ویژگی های زیر باشد:

یکم. جزیره به شکل یک صفحه ی دایروی باشد که نقطه های $A, B, C$ روی ساحل اش هستند.

دوم. چهار ساختمان مهم $D, E, G, H$ درجزیره وجود دارند که راس های مستطیل $DEGH$ هستند.

سوم. درنقطه ی $D$ که مرکز جزیره است یک قصر قرار دارد.

چهارم. کلیسای $E$ دقیقا در میانه ی راه بندرهای $B, A$ قرار گرفته است.

پنجم. استراحت گاه شکارچیان $G$ به بندر $B$ نزدیک تر است تا بندر $A$.

ششم. فروش گاه $H$ دقیقا مرکز ارتفاعی مثلث $ABC$ است.

والنتین می داند که فاصله ی $D$ تا $E$ برابر با $8$ km و فاصله ی $E$ تا $G$ برابر با $13$ km می بشد. والنتین بایستی چند کیلومتر طی کند تا سنگ های خود را از فروش گاه تا نزدیک ترین بندر ببرد؟

---

[31] *The Settlers*
[32] Valentin