Úloha 1. Jestliže je aritmetický průměr čtyř různých kladných celých čísel roven 10, jaké největší číslo mezi nimi může být?

Výsledek. 34

Řešení. Aby jedno z čísel bylo co největší, musí zbylá tři být co nejmenší. Protože musí být navzájem různá, nejmenší možný součet dává trojice 1, 2 a 3. Aby se průměr rovnal 10, musí být jejich součet roven $4 \cdot 10 = 40$ a zbývající číslo je pak $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Úloha 2. Jestliže je 4 kořenem kvadratické rovnice $x^2 + mx + 2020 = 0$, kde m je celé číslo, jaký je její druhý kořen?

Výsledek. 505

Řešení. Jestliže je čtyřka kořenem, po dosazení dostáváme $4^2 + 4m + 2020 = 0$ čili $m = -509$. Rovnice má pak tvar $x^2 - 509x + 2020 = 0$ a jejím řešením jsou 4 a 505.

Jiné řešení. Pokud druhý kořen označíme s, pak rozkladem na součin dostáváme

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s$$

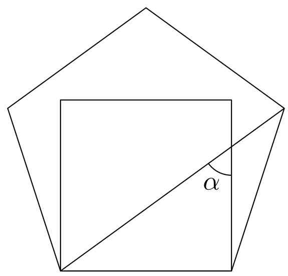
a porovnáním koeficientů polynomů na levé a pravé straně dostáváme $4s = 2020$, neboli $s = 505$.

Úloha 3. Kuba má kladné celé číslo N a všiml si, že 95 dává po dělení číslem N zbytek 4. Jaké nejmenší N může Kuba mít?

Výsledek. 7

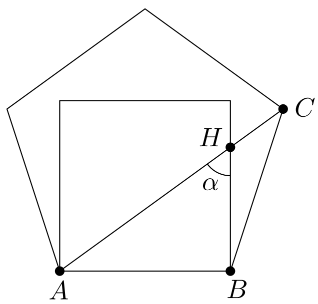
Řešení. Protože $N > 1$ a zároveň N dělí $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$, je 7 nejmenším možným Kubovým číslem.

Úloha 4. Čtverec a pravidelný pětiúhelník sdílejí jednu stranu jako na obrázku. Jaká je velikost znázorněného úhlu α ve stupních?



Výsledek. 54°

Řešení. Označme body podle obrázku.



Velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je 108°. Trojúhelník ABC je rovnoramenný s úhlem $|\sphericalangle ABC| = 108°$, takže

$$|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle BAC| = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Protože ABH je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu B, snadno dopočítáme

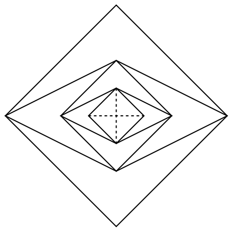
$$\alpha = |\sphericalangle AHB| = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Úloha 5. V Klatovech na nádraží staví tři autobusy A, B a D, které jezdí v pravidelných intervalech po řadě 12, 10 a 8 minut. Když Honza procházel kolem zastávky, zrovna odjížděly všechny tři autobusy naráz. Kolik nejméně minut musí Honza na nádraží počkat, než autobusy znovu všechny vyrazí ve stejný čas?

Výsledek. 120

Řešení. Hledaná doba je násobkem všech tří period, a protože se ptáme na nejmenší takovou dobu, odpovědí v minutách je nejmenší společný násobek čísel 12, 10 a 8, což je 120.

Úloha 6. Bára na svých cestách po exotických zemích objevila květinu s kosočtvercovým květem znázorněným na obrázku. Květ roste velmi specifickým způsobem. V jeho středu se nachází čtvercový okvětní lístek s dvěma úhlopříčkami délky 1. Při růstu květu se v prvním kroku zdvojnásobí velikost vodorovné úhlopříčky, což vytvoří nový čtyřúhelník. V druhém kroku se zdvojnásobí délka svislé úhlopříčky, což vytvoří další čtyřúhelníkový lístek. Tak se růst opakuje až do doby, kdy má kytička ve svém okvětí pět čtyřúhelníkových lístků. Jaký je obvod vnějšího, tedy pátého, okvětního lístku?



Výsledek. $8\sqrt{2}$

Řešení. Pátý okvětní lístek je čtverec s úhlopříčkou délky 4, tudíž se stranami délky $2\sqrt{2}$. Jeho obvod je tedy $8\sqrt{2}$.

Úloha 7. Zahradník zasadil dvě kouzelné fazole, F_1 a F_2, a změřil jejich výšku. Po týdnu, během něhož obě vyrostly ve stejném poměru, zahradník rostlinky znovu změřil a zjistil, že F_1 je nyní tak vysoká, jako byla F_2 před týdnem, a že F_2 je o 44 % vyšší, než byla F_1 před týdnem. O kolik procent obě rostlinky za týden vyrostly?

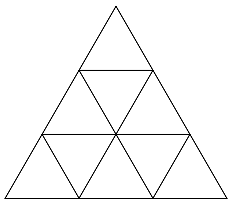
Výsledek. 20 %

Řešení. Označme F_1 a F_2 původní výšky fazolí. Protože obě za týden vyrostly ve stejném poměru, jsou jejich nové výšky rovny kF_1 a kF_2 pro nějaké celé číslo $k > 1$, pro něž je $(k-1) \cdot 100$ % hledané procento růstu. Potom ze zahradníkových měření vyplývá

$$kF_1 = F_2,$$
$$\frac{kF_2}{F_1} = 1{,}44.$$

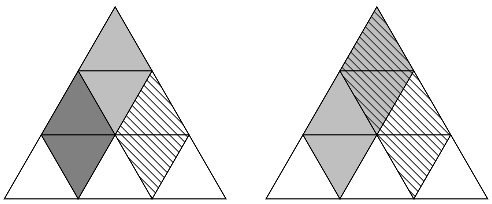
Dosazením za F_2 ve druhé rovnici a zkrácením F_1 ze zlomku spočítáme, že $k^2 = 1{,}44$, neboli $k = 1{,}2$. To znamená, že rostlinky za týden vyrostly o 20 %.

Úloha 8. Kolik rovnoběžníků je na obrázku?



Výsledek. 15

Řešení. Pro každý ze tří vrcholů velkého trojúhelníku máme tři kosočtverce směřující ve směru daného vrcholu a dva 1×2 rovnoběžníky sdílející tento vrchol s velkým trojúhelníkem. Na obrázku je znázorněno těchto pět rovnoběžníků příslušných hornímu vrcholu trojúhelníku. Žádný jiný typ se na obrázku nevyskytuje, dohromady tedy máme $3 \cdot 5 = 15$ rovnoběžníků.



Úloha 9. Autobusová společnost nabízí dopravu v autobusech pro 27 nebo 36 osob. Její služby by chtěla využít skupina 505 turistů. Společnost pro ně vybrala autobusy takovým způsobem, aby byl počet prázdných míst N co nejmenší. Určete toto N.

Výsledek. 8

Řešení. Hledáme co nejmenší číslo $s \geq 505$ ve tvaru $s = 27x + 36y$, kde x a y značí počet autobusů jednoho, respektive druhého typu. Protože největší společný dělitel čísel 27 a 36 je 9, číslo s musí být násobkem 9. Nejmenší násobek 9, který je větší nebo roven 505, je 513, a protože $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$, je nejmenší možný počet prázdných míst N roven $513 - 505 = 8$.

Úloha 10. Hedvika si koupila dva identické obrázky sovice sněžné a čtyři identické obrázky výra velkého. Chce si je nyní pověsit jeden vedle druhého na šest hřebíčků na zeď svého pokojíčku. Navíc by chtěla každý den změnit pořadí obrázků na zdi tak, že výsledné uspořádání bude vypadat jinak než všechny předešlé dny. Nadto trvá na tom, aby nikdy nebyly dvě sovice vedle sebe. Kolik nejvýše dnů zvládne Hedvika tato pravidla dodržet?

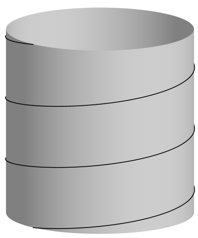
Výsledek. 10

Řešení. Jinými slovy se ptáme na počet různých uspořádání obrázků takových, kde obrázky sovice nejsou vedle sebe. První sovice může být pověšena na hřebíčky 1, 2, 3 a 4 ze všech šesti možných, druhá sovice pak může být v závislosti na pozici té první pověšena na následující hřebíčky:

$$\begin{aligned} 1:&\quad 3,4,5,6\\ 2:&\quad 4,5,6\\ 3:&\quad 5,6\\ 4:&\quad 6, \end{aligned}$$

což dohromady dává 10 takových uspořádání, a tedy 10 dnů pro Hedviku.

Úloha 11. Tradiční český trdelník (možná pocházející z Maďarska) je vyráběn vinutím těsta na kovový válec a následným pomalým pečením na ohni. Honza si koupil velký trdelník, což je válec o výšce 18 cm a obvodu podstavy 8 cm jako na obrázku. Tím, jak se těsto vine na válec, vytváří po obvodu rýhu, která začíná na spodku trdelníku a končí na jeho vršku přesně nad svým startovním bodem, přičemž se kolem válce obtočí přesně třikrát. Jaká je délka této rýhy v cm?



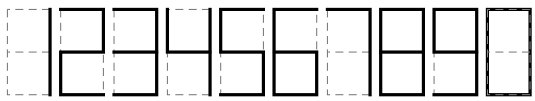
Výsledek. 30

Řešení. Rozvineme-li trdelník tak, jako při jeho pojídání či výrobě, spatříme, že na každou otočku kolem válce nám rýha vystoupá o 6 cm a prodlouží se ve vodorovném směru o obvod válce, tj. 8 cm. Z Pythagorovy věty je délka rýhy odpovídající jedné otočce v centimetrech rovna

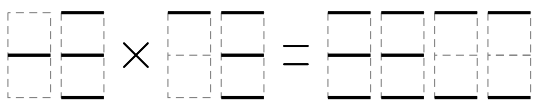
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Protože máme otáčky tři, celková délka této rýhy je 30 cm.

Úloha 12. Zcela funkční kalkulačka zobrazuje číslice na displeji následovně:



Jednou, když s kalkulačkou Fanda a Lenka hráli frisbee, vylétla jim z okna na dlažbu a od té doby její displej ukazuje pouze vodorovné segmenty. Aby Fanda ověřil, že jeho kalkulačka stále počítá správně, provedl na ní následující výpočet:



Jaký je součet všech číslic vyskytujících se v tomto výpočtu?

Výsledek. 33

Řešení. Poslední dvě číslice musí být nuly. Dále první číslice prvního čísla je 4 a první číslice druhého činitele je 7. Protože je součin dělitelný 100, a tedy i 25, musí buď být jeden z činitelů dělitelný 25, nebo oba 5. Žádný dvouciferný násobek pětadvaceti však nezačíná čtyřkou a druhá číslice druhého činitele není nula, nutně tedy musí být druhý činitel násobek 25, a tedy roven 75. Protože výsledek je dělitelný 4, musí nyní nutně být i první činitel dělitelný 4, a tudíž být roven 48. Fanda tedy zadal do kalkulačky $48 \times 75 = 3600$ a součet všech číslic na jeho kalkulačce je proto roven 33.

Úloha 13. Pavel jednou sčítal dvě čísla, a protože spěchal, omylem přidal na konec jednoho z nich číslici navíc. Dostal tak součet 44444 místo očekávaného 12345. Určete menší z obou čísel, která se Pavel původně snažil sečíst.

Výsledek. 3566

Řešení. Nechť x a y jsou ona dvě sčítaná čísla a c číslice, kterou Pavel napsal BÚNO k číslu x. Pak dostáváme

$$x + y = 12345 \quad \text{a} \quad (10x + c) + y = 44444,$$

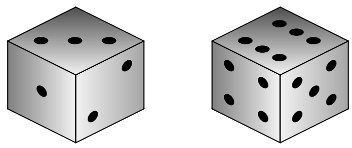
z čehož odečtením rovnic dostaneme

$$9x + c = 32099.$$

Z toho plyne, že c musí být 5, neboť $32099 - c$ musí být dělitelné 9. Tudíž $x = 3566$ a $y = 8779$; hledaným číslem je 3566.

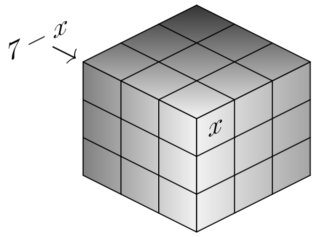
Úloha 14. Honza dostal o chanuce 27 obyčejných hracích kostek a rozhodl se, že je slepí do větší kostky $3 \times 3 \times 3$ tak, aby každé dvě stěny slepené k sobě měly stejný počet ok. Kolik nejvíce ok mohlo poté zůstat viditelných zvnějšku kostky $3 \times 3 \times 3$?

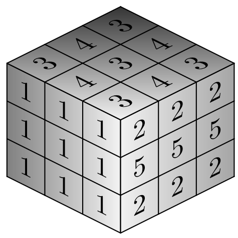
Poznámka: Takto vypadá obyčejná hrací kostka, součet ok na protilehlých stěnách je roven 7.



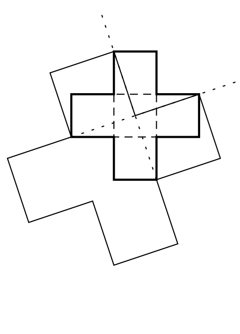
Výsledek. 189

Řešení. Hlavním pozorováním je, že se čísla na stěnách malých kostek na protilehlých stěnách velké kostky vždy sečtou na 7, jak je ukázáno na obrázku vlevo. Velká kostka má 27 párů protilehlých stěn, takže nehledě na to, jak Honza kostky uspořádal, musel celkový počet viditelných ok být $27 \cdot 7 = 189$. Jedno z možných slepení je pak na obrázku vpravo.



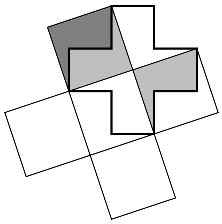


Úloha 15. Martin nakreslil malé X-pentomino složené z pěti shodných čtverců. Potom tečkovanou čarou dokreslil dvě kolmé diagonály a zkonstruoval větší X-pentomino tak, aby některé strany ležely na diagonálách menšího pentomina přesně jako na obrázku. Určete poměr obsahů velkého a malého pentomina.



Výsledek. 5 : 2

Řešení. Úhlopříčky rozdělují malé X-pentomino na čtyři shodné dílky. Když slepíme dva takové dílky, dostaneme jeden čtverec velkého pentomina (viz obrázek). Větší pentomino se tak dá rozdělit na 10 takových dílků a hledaný poměr je proto $10 : 4 = 5 : 2$.



Úloha 16. Kolik palindromů mezi 10^3 a 10^7 má sudý ciferný součet?

Poznámka: *Palindrom* je číslo, které se čte stejně odpředu jako odzadu, například 12321.

Výsledek. 5940

Řešení. Všechna čísla mezi 10^3 a 10^4 mají sudý počet číslic, takže i součet číslic všech palindromů v tomto intervalu bude sudý. Navíc jsou palindromy v tomto rozmezí právě čísla ve tvaru $\overline{abba}$, kde b je libovolná číslice a a je libovolná nenulová číslice. To znamená, že v tomto intervalu máme právě 90 a obdobně máme přesně 900 palindromů v intervalu 10^5 a 10^6, které mají sudý ciferný součet.

Pro libovolné číslice b a c a pro nenulové a budou všechny palindromy mezi 10^4 a 10^5 právě čísla ve tvaru $\overline{abcba}$. Součet jejich číslic bude sudý právě tehdy, když c je sudé. To dává 9 možností pro a, 10 pro b a 5 pro c, což dohromady dává $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ hledaných palindromů v dané oblasti. Analogicky postupujeme pro palindromy v oblasti od 10^6 do 10^7, což je 4500 palindromů splňujících podmínky zadání.

Celkem tedy existuje $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$ palindromů v intervalu 10^3 a 10^7, pro které je ciferný součet sudé číslo.

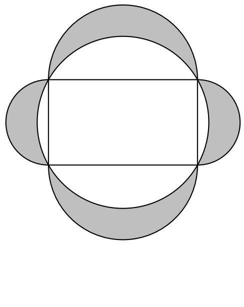
Úloha 17. Ženský sbor se skládá z šedesáti zpěvaček: dvaceti sopránů, dvaceti mezzosopránů a dvaceti altů. V každém hlasu je šest velmi zkušených sboristek, jež umí zazpívat part libovolného hlasu, je-li to nutné. Ostatní zpěvačky umí jen part svého hlasu. Jaké je největší číslo S takové, že kdykoliv S zpěvaček onemocní a nemůže zpívat, dokáže se zbytek přeskupit do hlasů tak, aby vytvořily sbor s alespoň deseti zpěvačkami v každém hlase?

Výsledek. 22

Řešení. Kdyby například všechny altistky spolu se třemi dalšími zkušenými zpěvačkami najednou onemocněly, pak mezi zdravými sboristkami zbude pouze devět zkušených zpěvaček, a tudíž není dost žen, které by uměly altový part. Proto $S < 23$.

Na druhou stranu, situace se může pouze zhoršit, když místo „obyčejných“ zpěvaček onemocní zkušené. Jestliže tedy onemocní 22 žen, můžeme předpokládat, že mezi nemocnými je všech 18 zkušených zpěvaček, a tedy pouze čtyři obyčejné. V každém hlase nyní zůstalo alespoň deset zpěvaček, proto platí $S \geq 22$ a nutně $S = 22$.

Úloha 18. Martin si do sešitu nakreslil obdélník se stranami délek 3 a 4 vepsaný do kružnice. Potom nad každou jeho stanou nakreslil zvnějšku půlkružnici. Jaký je obsah vyznačené plochy složené ze čtyř útvarů ohraničených půlkružnicemi a kružnicí?



Výsledek. 12

Řešení. Pomocí Pythagorovy věty spočítáme délku úhlopříčky obdélníku jako

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Jelikož je tato úhlopříčka zároveň průměrem kružnice obdélníku opsané, je obsah příslušného kruhu roven $\pi(5/2)^2$. Vnější půlkruhy mají poloměry $4/2$ a $3/2$, takže celkový obsah vnějších půlkruhů je

$$2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Obsah vyznačené plochy nyní spočteme jako rozdíl obsahu celého obrazce, což je

$$3 \cdot 4 + \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

a obsahu vnitřního kruhu, čímž dostaneme výsledek 12.

Jiné řešení. Pythagorova věta dává vztah mezi obsahy čtverců nad stranami obdélníku a čtvercem nad jeho úhlopříčkou, přičemž ten samý vztah platí i pro příslušné půlkruhy. Na základě tohoto pozorování snadno spočteme, že dvě sousední šedé oblasti mají stejný obsah jako polovina obdélníku a obsah celé šedé plochy je pak roven celému obsahu obdélníku, což je 12.

Úloha 19. Jaké je největší trojciferné prvočíslo p_1 takové, že ciferný součet čísla p_1 je dvojciferné prvočíslo p_2 a ciferný součet čísla p_2 je jednociferné prvočíslo p_3?

Výsledek. 977

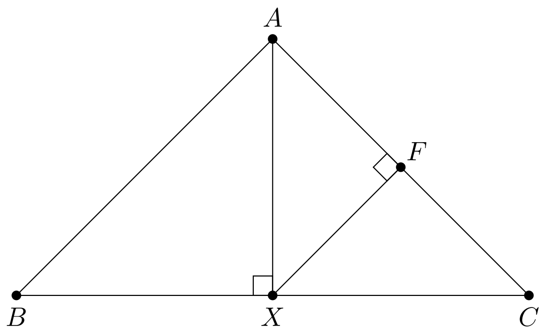
Řešení. Ciferný součet trojciferného čísla je nejvýše $9 + 9 + 9 = 27$. Mezi 10 a 27 je pět prvočísel – 11, 13, 17, 19 a 23. Ciferné součty těchto prvočísel jsou postupně 2, 4, 8, 10, 5, takže p_2 musí být 11 nebo 23. Největší trojciferné prvočíslo s ciferným součtem 23 je 977. Protože $977 > 911$, což je největší trojciferné prvočíslo s ciferným součtem 11, je hledané p_1 rovno 977.

Úloha 20. V trojúhelníku ABC splňujícím $|AB| = |AC|$ existuje osa strany, která protíná jednu z výšek v jediném bodu ležícím na obvodu trojúhelníku ABC. Určete všechny možné velikosti úhlu ACB ve stupních.

Výsledek. 45°, 67,5°

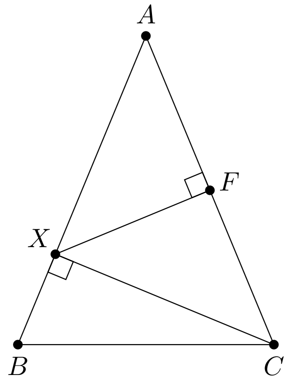
Řešení. Označme průsečík dané osy strany a výšky jako X a střed strany AC jako F. Všimněme si, že výška procházející bodem X musí být kolmá na stejnou stranu, na které X leží. Nyní prozkoumáme všechna možná umístění X.

Pokud X leží na základně BC, musí být průsečíkem výšky z bodu A a osy jedné z bočních stran. Ze symetrie trojúhelníku ABC totiž plyne, že tato výška splývá s osou strany BC, takže musí mít svůj jednobodový průsečík s jednou ze zbývajících os stran. Opět ze symetrie potom plyne, že se tato výška ve skutečnosti protíná v jednom bodě s osami obou stran AB i AC.



Protože je FX osou strany AC, je trojúhelník AXC rovnoramenný. Protože navíc platí $|\sphericalangle AXC| = 90°$, snadno spočítáme, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACX| = 45°$.

Pokud X leží na straně AB, musí být průsečíkem výšky z bodu C a osy strany AC.



Podobně jako v předchozím případě je trojúhelník AXC rovnoramenný a pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu X, z čehož plyne, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle XAC| = 45°$. V tomto případě tedy dopočítáme výsledek jako

$$|\sphericalangle ACB| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle BAC|) = 67{,}5°.$$

Pokud X leží na straně AC, situace je zcela symetrická poslední zmíněné.

Úloha 21. Jaký je součet všech kladných dělitelů čísla 3599?

Poznámka: Mezi dělitele patří i 1 a 3599.

Výsledek. 3720

Řešení. Platí

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60 + 1)(60 - 1) = 59 \cdot 61.$$

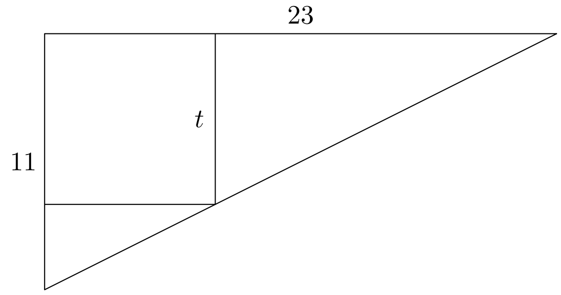
Oba činitelé, čísla 59 a 61, jsou prvočísla, proto odpověď je $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

Úloha 22. Danil, Martin a Fíla si udělali táborák a opékali klobásky. Danil koupil 17 klobásek, Martin jich koupil 11 a zapomnětlivý Fíla nekoupil žádné. Když všechny klobásky snědli, dohodli se, že se o náklady podělí rovným dílem. Kolik korun by měl dostat Danil, jestliže Fíla, aby se zbavil svého dluhu, dal svým kamarádům dohromady 28 korun?

Výsledek. 23

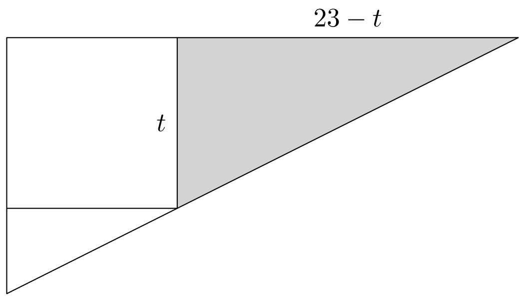
Řešení. Fíla platil přesně jednu třetinu celkové ceny, dohromady tedy klobásky stály $28 \cdot 3 = 84$ korun. Danil platil 17 klobásek z 28, tedy $84 \cdot \frac{17}{28} = 51$ korun, ale měl platit pouze 28 korun. Dostane tedy $51 - 28 = 23$ korun.

Úloha 23. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny o délkách 11 a 23. Čtverec o straně délky t má dvě své strany na těchto odvěsnách a jeden vrchol na přeponě trojúhelníku, jak naznačuje obrázek. Určete t.



Výsledek. $\frac{253}{34}$

Řešení. Vybarvený trojúhelník na obrázku je pravoúhlý a jeden úhel sdílí s původním velkým trojúhelníkem. Tyto dva jsou tedy podobné.



Poměr délek odvěsen musí být pro oba tyto trojúhelníky stejný, díky čemuž dostaneme rovnici

$$\frac{23 - t}{t} = \frac{23}{11}.$$

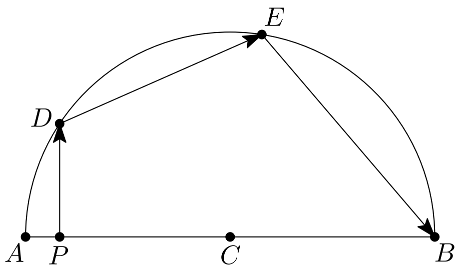
Jejím řešením je $t = \frac{253}{34}$.

Úloha 24. Najděte nejmenší kladné celé číslo n, pro které je $11 \cdot 19 \cdot n$ rovno součinu tří po sobě jdoucích celých čísel.

Výsledek. 840

Řešení. Protože 11 a 19 jsou prvočísla, musí být jedno z těchto tří po sobě jdoucích čísel dělitelné 11 a jedno (ne nutně jiné) 19. Protože je součin kladný, musí i tato tři čísla být kladná. Hledáme tedy co nejmenší kladné násobky 11 a 19, které se liší nanejvýš o 2. Nejmenší takové jsou $3 \cdot 19 = 57$ a $5 \cdot 11 = 55$. Pak už mezi ně stačí jen doplnit 56 a tato tři po sobě jdoucí čísla vynásobit: $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$. Hledaným číslem n je tedy 840.

Úloha 25. Uvažme půlkružnici se středem C nad průměrem AB. Z bodu P ležícího na úsečce AB vyšleme světelný paprsek ve směru kolmém na AB. Tento paprsek se poté v bodech D a E odrazí od půlkružnice a nakonec dorazí do bodu B. Chová se při tom podle zákona odrazu, neboli $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle EDC|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BEC|$. Určete velikost úhlu DCP ve stupních.



Výsledek. 36°

Řešení. Protože body D a E leží oba na kružnici se středem C, je $\triangle DCE$ rovnoramenný se základnou DE. Z první uvedené rovnosti, $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle EDC|$, plyne, že $\triangle CDP$ je shodný s polovinou $\triangle CDE$ (konkrétně s $\triangle CDM$, kde M je středem DE). Využitím druhé rovnosti zjistíme, že $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD| = 2 \cdot |\sphericalangle DCP|$. Jelikož tyto tři úhly dohromady tvoří přímý úhel, dostaneme $|\sphericalangle DCP| + 2 \cdot |\sphericalangle DCP| + 2 \cdot |\sphericalangle DCP| = 180°$, neboli $|\sphericalangle DCP| = 36°$.

Úloha 26. V zemi s 2020 městy, která mají místo jmen číselná označení $1, 2, 3, \ldots, 2020$, se prezident rozhodl vybudovat železniční síť. Chtěl ale ušetřit, a tak nechal postavit koleje jenom mezi dvojicemi měst, která při označení a, b, $a < b$, splňují následující podmínku: Číslo b je násobkem čísla a, přičemž neexistuje číslo c, pro něž by platilo $a < c < b$, c je násobkem a a b je násobkem c. S kolika dalšími městy je spojeno to označené číslem 42?

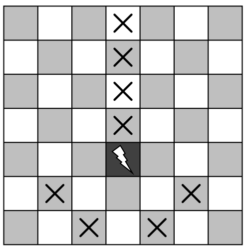
Výsledek. 18

Řešení. Uvažme dvojici spojených měst. Ukážeme, že jedno z nich musí mít ve svém prvočíselném rozkladu o prvočíslo víc než to druhé. Jistě nemohou mít v rozkladu stejná prvočísla, protože pak by tato města byla označena stejně. Naopak jedno nemůže mít v rozkladu o dvě či více prvočísel víc než druhé. Vskutku, vezměme si dvě ne nutně různá prvočísla p, q a předpokládejme, že město a je spojeno s městem $b = a \cdot p \cdot q$. Potom ale $a \cdot p$ dělí b, což porušuje druhou podmínku.

Město 42 má prvočíselný rozklad $2 \cdot 3 \cdot 7$. Je tedy spojeno se třemi městy s nižšími pořadovými čísly, která mají prvočíselné rozklady $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ a $3 \cdot 7$.

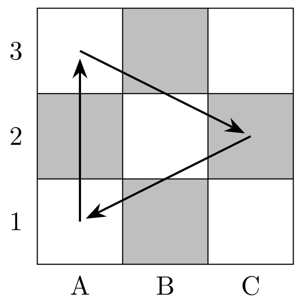
Dále je spojeno s městy s vyššími pořadovými čísly. Ta můžeme napsat ve tvaru $42 \cdot p$ pro nějaké prvočíslo p. Největší takové prvočíslo splňující $42 \cdot p < 2020$ je rovno 47, a tedy $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$, což dává patnáct dalších měst propojených s městem 42. Dohromady se tedy z města 42 dá po kolejích dostat do osmnácti dalších měst.

Úloha 27. Lenka vymyslela novou šachovou figuru a nazvala ji *blesk*. Blesk se může pohybovat dopředu jako věž a dozadu jako jezdec, jak je vyznačeno na obrázku. Lenka jej postavila doprostřed šachovnice 3×3 a podle pravidel s ním 2020krát táhla. Kolikrát nejvýše mohl blesk navštívit nějaké konkrétní pole? Startovní pozice se jako návštěva nepočítá.



Výsledek. 673

Řešení. Z pravidel je jasné, že kdykoliv se blesk pohne z jednoho pole na jiné, nemůže se v následujícím tahu vrátit zpět. Jak je vidět na obrázku, může se však na něj vrátit během dvou tahů, a to i na šachovnici 3×3.



Pokud se tedy blesk dostane na jedno z polí A1, A3, C2, může začít „běhat dokolečka“ a navštívit každé z těchto polí každý třetí tah. Je snadné si rozmyslet, že každý cyklus délky tři musí sestávat z jednoho tahu (věže) vpřed a dvou tahů (jezdce) vzad, a tedy možné cykly délky tři jsou právě dva – ten na obrázku výše a cyklus C1 → C3 → A2 → C1. Jediný možný tah bleska ze startovního pole B2 je táhnout jako věž na B3 a následné možnosti jsou skok jezdce na A1 nebo C1. Pole B2 ani B3 žádný z cyklů délky tři nenavštěvuje a pole A1 (resp. C1) je dosažitelné z B2 za pomoci dvou tahů (a zřejmě ne méně). Tím pádem cyklus délky tři lze začít nejdříve třetím tahem. Pak máme pouze 2018 tahů na posouvání bleska dokola a protože $2018 = 672 \cdot 3 + 2$, může blesk udělat 672 cyklů. Pole A1 (resp. C1) tudíž může navštívit 673krát. Z výše zmíněných úvah a toho, že číslo 2020 je evidentně dostatečně velké na to, aby se nevyplatilo používat cykly délky větší než tři, plyne, že tento počet je opravdu nejvyšší možný.

Úloha 28. David závodil se šnekem na kruhové dráze se startem a cílem v tomtéž bodě. Začali ve stejný čas, běželi stejným směrem a potkali se v cíli. Šnek byl ale mnohem rychlejší a uplazil mnohem více kol než David. Ten dokončil pouze tři kola a dohromady se se šnekem potkali na dráze 2020krát včetně startu a cíle. Druhý den spolu běželi ten samý závod, jen tentokrát běžel David v opačném směru. Oba dva se pohybovali stejnou rychlostí jako první den. Kolikrát se setkali během druhého závodu?

Výsledek. 2026

Řešení. Předpokládejme, že šnek v průběhu závodu uplazil přesně n kol a vezměme jedno kolo za jednotku vzdálenosti a délku jednoho závodu za jednotku času. Pak rychlosti Davida a šneka byly postupně 3 a n. Vzájemná rychlost Davida a šneka v prvním závodu byla $n - 3$ a protože se potkali vždy, když byl šnekův náskok nezáporné celé číslo (nulový náskok odpovídá startu), potkali se $(n - 2)$-krát, tedy $n = 2022$. Když se pak druhý den pohybovali proti sobě, jejich vzájemná rychlost byla $n + 3 = 2025$ a opět musíme započítat start, takže se potkali celkem 2026krát.

Úloha 29. Olin hraje hru, v níž sbírá tři druhy předmětů: posilující, obranné a útočné. Každý z nich může být na úrovni od 1 do 10. Olin může spojit dva předměty různých druhů na stejné úrovni a získat místo nich předmět toho zbývajícího druhu o jedna vyšší úrovně. Například spojením obranného předmětu úrovně 3 s posilujícím předmětem úrovně 3 Olin získá útočný předmět na úrovni 4. Kolik nejméně útočných předmětů na úrovni 1 musí Olin nasbírat, aby mohl získat útočný předmět na úrovni 10, jestliže má neomezený přístup k obranným a posilujícím předmětům na úrovni 1?

Výsledek. 170

Řešení. Označme p_i, o_i, u_i počet posilujících, obranných a útočných předmětů na úrovni i, které jsou potřeba pro získání jednoho útočného předmětu na úrovni 10. Zjevně platí $p_{10} = o_{10} = 0$, $u_{10} = 1$. Obecně můžeme vztahy mezi počty potřebných předmětů zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} p_{i-1} &= o_i + u_i, \\ o_{i-1} &= u_i + p_i, \\ u_{i-1} &= p_i + o_i \end{aligned}$$

pro všechna $i \in \{2, \dots, 10\}$. S využitím těchto pravidel vyplníme tabulku 10×3 tak, aby všude kromě prvního řádku $(0, 0, 1)$ platilo, že každá hodnota je součtem čísel ve dvou zbylých sloupcích v o jedna vyšším řádku:

0	0	1
1	1	0
1	1	2
3	3	2
5	5	6
11	11	10
21	21	22
43	43	42
85	85	86
171	171	170

Olin tedy potřebuje získat 170 útočných předmětů na první úrovni.

K úloze můžeme přistoupit i jinak. Všimneme si, že role posilujících a obranných předmětů jsou zaměnitelné, tedy na každé úrovni platí $p_i = o_i$. Dále platí $|u_i - p_i| = 1$, což dokážeme indukcí: platí to pro $i = 10$ a dále

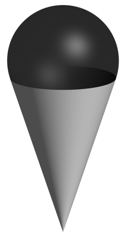
$$|u_{i-1} - p_{i-1}| = |(p_i + o_i) - (u_i + o_i)| = |p_i - u_i| = 1.$$

Navíc také platí

$$p_{i-1} + o_{i-1} + u_{i-1} = (o_i + a_i) + (u_i + p_i) + (p_i + o_i) = 2(p_i + o_i + u_i),$$

a tedy $p_1 + o_1 + u_1 = 2^9 = 512$. Z toho už snadno spočítáme, že $p_1 = o_1 = 171$, a tedy $u_1 = 170$.

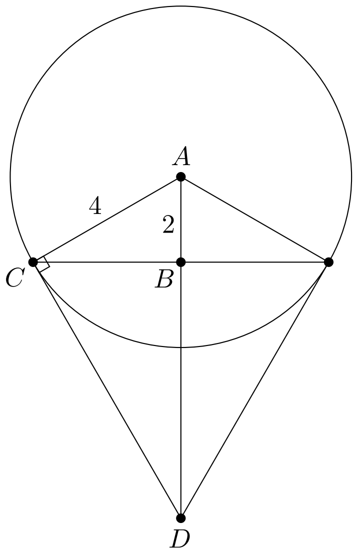
Úloha 30. Verča si koupila kopečkovou zmrzlinu. Kopeček měl tvar koule o poloměru 4 cm a byl umístěn v kornoutu tvaru kuželového pláště. Verča si povšimla, že kopeček zapadal do kornoutu následujícím způsobem: Kornout se kopečku tečně dotýkal v místě, kde by měl kužel podstavu, a střed kopečku byl přesně o 2 cm výše (viz obrázek). Jaký byl objem kornoutu?



Výsledek. 24π

Řešení. Nechť je $|AC| = 4$ poloměr kopečku, $|BC|$ poloměr kornoutové podstavy a $|BD|$ výška kornoutu stejně jako na obrázku níže, který ukazuje průřez zmrzlinou skrz střed kopečku A. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC dostáváme $|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 16 - 4 = 12$. Ze zadání plyne, že úsečka CD je částí tečny k příslušné kružnici dotýkající se jí v bodě C, proto je úhel ACD pravý. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a CBD pak plyne $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Objem kornoutu je potom

$$V = \frac{1}{3}\pi|BC|^2|BD| = \frac{1}{3}\pi|BC|^2\frac{|BC|^2}{|AB|} = \pi\frac{12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi.$$



Úloha 31. Marian má číslice 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 a 9, každou z nich právě jednou. Vytvořil z nich dvě čtyřciferná čísla, která následně sečetl. Jaký největší ciferný součet mohl tento výsledek mít?

Výsledek. 31

Řešení. Připomeňme si nejdříve základní vlastnosti sčítání. Čísla sčítáme číslici po číslici s výjimkou přenosu při přechodu přes desítku. To znamená, že sečteme ony čtyři páry číslic a připočteme přenosy. Protože sčítáme pouze dvě čísla, největší možný přenos bude roven 1.

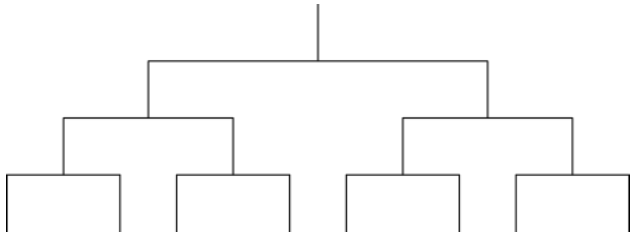
Označme si ta dvě Marianova čísla jako a a b a dále označme ciferný součet libovolného čísla n jako $S(n)$. Pak platí $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9 \cdot c$, kde c je počet nenulových přenosů. V našem případě je

$$S(a) + S(b) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40,$$

takže možné hodnoty ciferného součtu $S(a + b)$ jsou 40, 31, 22, 13 a 4.

Součtu 40 však není možné dosáhnout, neboť pokud k libovolné nenulové číslici přičteme 9, dostaneme číslo větší než 10. Naopak ciferného součtu 31 lze dosáhnout například následovně: $9678 + 4321 = 13999$; $1 + 3 + 9 + 9 + 9 = 31$. Správná odpověď je proto 31.

Úloha 32. Osm hráčů tenisového turnaje, který se hraje vyřazovacím systémem podle pavouka na obrázku, bylo náhodně rozlosováno do zápasů prvního kola. Celkem se budou hrát tři kola, přičemž do dalšího kola postoupí vždy vítěz zápasu. Dva z hráčů jsou profesionálové a zbylých šest amatéři, z nichž jeden se jmenuje Alex. Profesionál vždy porazí amatéra, ale pokud se v zápase sejdou dva profesionálové nebo dva amatéři, oba mají stejnou šanci na výhru. Jaká je pravděpodobnost, že Alex bude hrát ve finále?



Výsledek. $\frac{1}{14}$

Řešení. Podívejme se na tu polovinu pavouka, ve které hraje Alex. Alex se dostane do finále pouze v případě, že oba profesionálové jsou v druhé polovině pavouka a Alex navíc porazí všechny tři zbylé amatéry ve své polovině.

Zvolme pevně jednu z pozic v pavoukovi pro Alexe. Pravděpodobnost, že oba profesionálové skončí při náhodném rozlosování v druhé polovině pavouka je $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. Protože amatéři jsou v zápasech vyrovnaní, je pravděpodobnost, že Alex vyhraje dva zápasy v řadě rovna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy celkem $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

Úloha 33. Na tabuli jsou napsána čísla

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$

V každém kroku si Michal zvolí dvě čísla, říkejme jim a a b, smaže je a místo nich napíše číslo

$$\frac{ab}{a + 2ab + b}.$$

Tento proces opakuje, dokud na tabuli nezbude jen jediné číslo. Určete všechny možné hodnoty tohoto čísla.

Výsledek. $\frac{1}{5248}$

Řešení. Všimněme si, že pokud nahradíme čísla a a b číslem n, pak platí

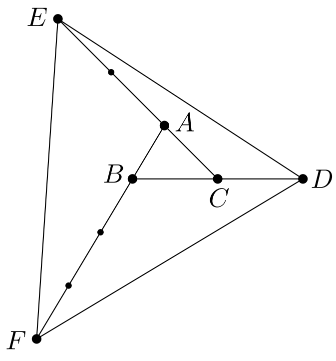
$$\frac{1}{n} = \frac{a + 2ab + b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$

Z toho plyne, že součet převrácených hodnot všech čísel na tabuli se v každém kroku zvýší o dva. Označme ℓ číslo, které na tabuli zůstane jako poslední. Protože kroků je celkem 99, musí ℓ splňovat

$$\frac{1}{\ell} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \cdots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$

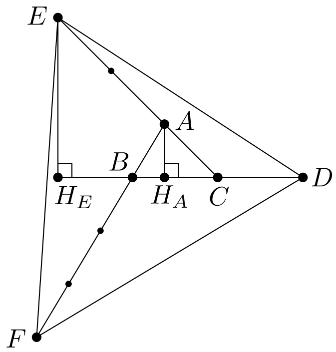
Poslední číslo na tabuli je tedy rovno $\frac{1}{5248}$.

Úloha 34. Mějme trojúhelník ABC s obsahem 1. Na polopřímkách BC, CA a AB volme postupně body D, E a F jako na obrázku tak, aby platilo $|BD| = 2 \cdot |BC|$, $|CE| = 3 \cdot |CA|$ a $|AF| = 4 \cdot |AB|$. Určete obsah trojúhelníku DEF.



Výsledek. 18

Řešení. Označme H_A a H_E kolmé projekce bodů A a E na přímku BC.



Pravoúhlé trojúhelníky CAH_A a CEH_E jsou podobné, takže z rovnosti $|CE| = 3|CA|$ plyne $|EH_E| = 3|AH_A|$. Z toho pomocí $|CD| = |BC|$ dostaneme, že obsah trojúhelníku CDE je roven

$$\tfrac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |EH_E| = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH_A| = 3.$$

Obdobně ukážeme, že obsahy trojúhelníků AEF a BFD jsou postupně $2 \cdot 4 = 8$ a $3 \cdot 2 = 6$. Dohromady dostaneme, že obsah trojúhelníku DEF je $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

Úloha 35. Výběrčí daní přivezli králi tři pytle plné mincí. Každá mince v prvním pytli váží 10 gramů, každá mince ve druhém 11 gramů a každá mince ve třetím 12 gramů. Výběrčí ale zapomněli, který pytel je který, což by král rád věděl. Naštěstí má váhu, která váží až do maximální hodnoty N gramů, kde N je nějaké kladné celé číslo. Pokud je hmotnost vyšší, ukáže váha prostě N. Král chce vzít nějaké mince z jednotlivých pytlů a na jedno vážení určit, který pytel je který. Pro jaké nejmenší N má jistotu, že se mu to při volbě správné strategie podaří?

Výsledek. 47

Řešení. Označme a, b a c počty mincí z jednotlivých pytlů, které král položí na váhu. Tato čísla musí být po dvou různá, neboť kdyby dvě z nich byla stejná, nebylo by možné rozlišit jim odpovídající pytle.

Pro rozlišení pytlů dále potřebujeme, aby pro každou permutaci $(k,\ l,\ m)$ čísel 10, 11 a 12 byla čísla vzniklá jako $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ po dvou různá. Hledáme nejmenší trojici čísel splňující obě tyto podmínky.

Nejmenší trojice splňující první podmínku je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 2$. Ta ovšem nesplňuje druhou podmínku, neboť $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$. Druhá nejmenší trojice splňující první podmínku je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 3$, která už splňuje i druhou podmínku:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 10 + 11 = 41, \qquad &&3 \cdot 10 + 12 = 42, \qquad &&3 \cdot 11 + 10 = 43,\\ &3 \cdot 11 + 12 = 45, &&3 \cdot 12 + 10 = 46, &&3 \cdot 12 + 11 = 47. \end{aligned}$$

Potřebujeme proto, aby váha vážila správně až do 47 gramů.

Úloha 36. Marta se rozhodla vyzkoušet ananasovou dietu. Každý den v poledne se podívá, kolik ananasů jí zbývá. Pokud má alespoň jeden, jeden z nich sní. Pokud nemá žádný, vyrazí místo toho do obchodu a koupí jich o jeden víc, než měla kterýkoliv předchozí den. První den v poledne si koupila svůj první ananas. Kolik ananasů měla večer 2020. dne?

Výsledek. 59

Řešení. Počet ananasů, které Marta vlastní i-tý den večer, označme $s(i)$. Druhý a pátý večer jsou první dva večery, kdy nemá žádný ananas. Protože pokaždé koupí o jeden ananas více, tvoří vzdálenosti mezi nulami v posloupnosti $s(i)$ posloupnost $3, 4, 5, \ldots$ Nuly jsou pak na pozicích

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

pro $n = 2, 3, \ldots$ (konkrétně k-tá nula je na pozici dané uvedeným vzorcem pro $n = k + 1$). Zajímá nás, na jaké pozici je nejbližší nula před 2020. dnem. K tomu stačí vyřešit kvadratickou rovnici $\frac{1}{2}x(x+1) - 1 = 2020$. Ta má jeden záporný kořen (který nás nezajímá) a jeden kladný kořen $\frac{\sqrt{16169}}{2} - \frac{1}{2}$, což je číslo mezi 63 a 64. Hledaná nula je tedy ta 62. a je na pozici $\frac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 2015$. Posloupnost $s(i)$ pak pokračuje takto: $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$. Večer 2020. dne má tedy Marta 59 ananasů.

Úloha 37. Farmář Franta si pro svá selátka pořídil nový chlívek s plochou $252\,\mathrm{m}^2$. Uvnitř chlívku jsou nastavitelné přepážky, které jej rozdělují na 16 obdélníkových kotců. Přepážky mohou být umístěny pouze rovnoběžně se stěnami chlívku. Franta přepážky přesunul tak, jak je ukázáno na obrázku níže, vyznačené jsou plochy některých kotců v m^2. Protože je Franta vášnivý matematik, dává si záležet na tom, aby rozměry kotců v metrech byly celočíselné. Určete všechny možné plochy kotce s otazníkem v pravém horním rohu (v m^2)?

24			?
18		12	
			12
30	10		

Výsledek. 8, 24

Řešení. Díky tomu, že druhý a čtvrtý řádek obsahují po dvou číslech, dokážeme určit poměr šířek prvního a druhého sloupce (30 : 10) a taky prvního a třetího sloupce (18 : 12). Podobně zjistíme poměr výšek prvního, druhého a čtvrtého řádku (24 : 18 : 30). Úpravou do základního tvaru získáme poměr 3 : 1 : 2 pro sloupce a 4 : 3 : 5 pro řádky. Z toho dokážeme dopočítat plochy zbylých kotců, jak je uvedeno na obrázku, přičemž výšku třetího řádku a šířku čtvrtého sloupce doplníme celočíselnými parametry x a y reprezentujícími daný poměr.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

Poměr výšek druhého a třetího řádku se dá spočítat s využitím obsahů ve vybarveném obdélníku. Porovnejme obsahy ve třetím ($12 : 2x$) a ve čtvrtém sloupci ($3y : 12$). Tyto hodnoty musí být stejné, tedy $12 : 2x = 3y : 12$ a $y = 24/x$.

Nakonec porovnáme plochu celého chlívku se součtem ploch kotců a dostaneme rovnici

$$96 = 6x + 12y = 6x + 12 \cdot \frac{24}{x},$$

která se dá upravit na

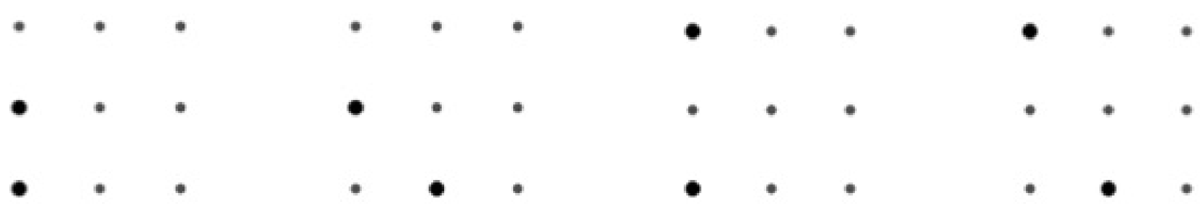
$$0 = x^2 - 16x + 48 = (x-4)(x-12).$$

Kořeny rovnice jsou $x = 4$ a $x = 12$, což vede po řadě k řešením $y = \frac{24}{4} = 6$ s hledanou plochou $4y = 24$ a $y = \frac{24}{12} = 2$ s hledanou plochou $4y = 8$.

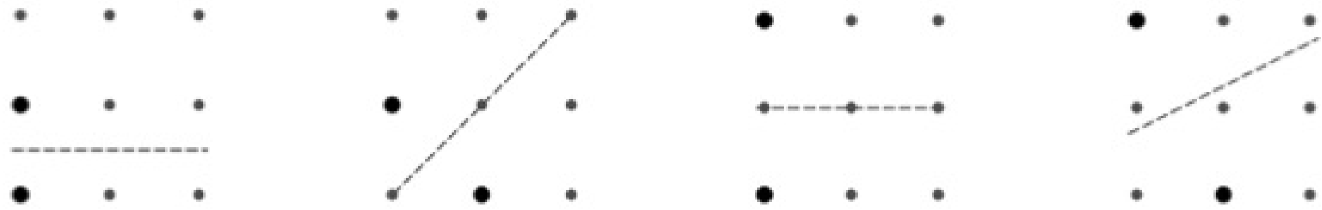
Úloha 38. David a Fíla nakreslili každý svou kružnici na čtverečkovaný papír se čtverečky o straně délky 1. Obě kružnice prochází právě třemi mřížovými body. Davidova kružnice má poloměr jen $\frac{5}{4}$ a ta Fílova je ještě menší. Jaký je poloměr Fílovy kružnice?

Výsledek. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

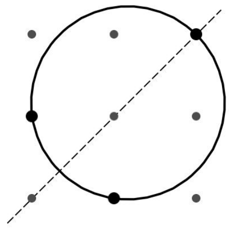
Řešení. Označme A, B, C mřížové body, kterými prochází Fílova kružnice. Protože víme, že její poloměr je menší než $\frac{5}{4}$, musí být vzdálenost bodů A a B maximálně $\frac{5}{2}$. Až na otočení tedy musí body A a B ležet v jedné ze čtyř následujících konfigurací:



Pro každou z konfigurací najdeme osu symetrie. Bod C musí ležet buď na této ose, nebo tak, aby jeho obraz v osové souměrnosti nebyl mřížovým bodem. To vyřazuje první konfiguraci. Druhá konfigurace je možná, pouze pokud umístíme bod C na osu.



Bod C musí být navíc umístěn tak, aby i vzájemná poloha dvojic bodů A, C a B, C odpovídala jedné ze konfigurací 2 až 4 (až na otočení). To nám dává jedinou možnost, jak mohl Fíla nakreslit svou kružnici:



Zbývá ještě spočítat poloměr této kružnice, což uděláme analyticky. Zavedeme systém souřadnic, ve kterém budou mít body A, B a C souřadnice postupně $(1,0)$, $(0,1)$, a $(2,2)$. Postupným dosazením těchto hodnot (x,y) do obecné rovnice kružnice $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ najdeme řešení pro h, k a r. Zjistíme tak, že Fílova kružnice je dána rovnicí $(x-\frac{7}{6})^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{25}{18}$ a její poloměr je $\sqrt{\frac{25}{18}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Úloha 39. Sedm trpaslíků má klobouky sedmi různých barev. Zlý kouzelník Barvokaz se chystá na trpaslíky seslat kouzlo, kterým jim změní barvy klobouků. Přitom chce, aby

- nová barva každého klobouku závisela pouze na jeho předchozí barvě, nikoli na tom, kdo ho má na hlavě, nebo na vzhledu ostatních klobouků,
- po provedení kouzla bylo na kloboucích zastoupeno stále všech sedm původních barev,
- když Barvokaz sešle stejné kouzlo dvakrát nebo třikrát za sebou, žádný z trpaslíků neměl na hlavě klobouk stejné barvy jako na začátku.

Kolik takových kouzel může Barvokaz vymyslet?

Výsledek. 720

Řešení. Díky prvním dvěma podmínkám musí být kouzlo nějakou permutací původních sedmi barev. Každá permutace se dá rozložit na cykly, přičemž aplikování permutace pouze nahradí každý prvek tím následujícím v jeho cyklu. Ze třetí podmínky plyne, že permutace nemůže mít cykly délky 2 ani 3. Pevné body (cykly délky 1) se v hledané permutaci také vyskytovat nemohou, neboť i to by porušilo třetí podmínku.

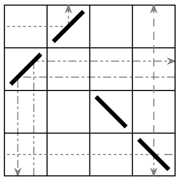
Z toho už nutně plyne, že permutace má jen jeden cyklus délky 7, protože 7 barev nejde rozdělit do dvou cyklů délky alespoň 4. Takových permutací existuje $6! = 720$: Pro první barvu máme 6 možností, jak ji změnit. Pro druhou jich máme pouze 5, protože ji nesmíme změnit na žádnou z dosud použitých barev. Takto pokračujeme dál, až se dostaneme k poslední barvě, kterou změníme na první.

Úloha 40. Týna si pořídila neobvyklý visací zámek s kódem, který má na každé pozici kroužek s jiným počtem možností. První kroužek obsahuje postupně čísla 0 až 4, druhý 0 až 6, třetí 0 až 10 a čtvrtý 0 až 9. Týna ví, že pokud zámek nastaví na $0,0,0,0$ a začne otáčet všemi kroužky současně (takže následující kombinace je $1,1,1,1$), dostane se po čase ke kombinaci končící čísly $5,1$. Také si pamatuje, že když se ke kombinaci končící $5,1$ dostane podruhé, zámek se odemkne. Pomozte Týně najít kód k jejímu zámku.

Výsledek. 1, 6, 5, 1

Řešení. Označme x počet otočení, po kterém Týna poprvé dostane poslední dvě cifry 5, 1. Pak x dává po dělení 11 zbytek 5 a po dělení 10 zbytek 1. Díky nesoudělnosti 10 a 11 víme z Čínské zbytkové věty, že $0 \le x < 110 = 11 \cdot 10$. Všechna další řešení (neboli počty otočení, po kterých opět dostaneme poslední dvě cifry 5, 1) pak dostaneme přičtením násobku 110 k x. Jedním z možných způsobů, jak x najít, je vypsat si všechna čísla tvaru $11k+5$ (k je nezáporné celé) a vybrat z nich to, které končí 1 (tedy dává zbytek 1 při dělení 10), což je 71. Podruhé zmíněná situace nastane po dalších 110 otočeních, tedy po 181. otočení od začátku. Pro zjištění kódu už stačí spočítat, jaké zbytky dává 181 při dělení 5 a 7. Hledaný kód je $1,6,5,1$.

Úloha 41. V tabulce 4×4 jsme do některých čtyř čtverců diagonálně umístili po jednom oboustranném zrcadle. Z každého z šestnácti segmentů obvodu tabulky jsme vyslali světelný paprsek ve směru kolmém k danému segmentu. Paprsek se šíří rovně, dokud nenarazí na zrcadlo, které jej otočí o 90°. Ukázalo se, že právě čtyři tyto paprsky mají jeden konec na spodní a jeden na pravé straně tabulky, další čtyři mají své konce na pravé a horní straně, další čtyři na horní a levé straně a poslední čtyři paprsky mají jeden konec na levé straně a jeden na spodní straně tabulky. Kolika způsoby jsme mohli rozmístit zrcadla, abychom docílili tohoto chování paprsků? (Obrázek ukazuje jedno takové umístění zrcadel a některé paprsky.)



Výsledek. 144

Řešení. Protože máme k dispozici pouze čtyři zrcadla a protože každý paprsek musí někdy zatočit, musí každý řádek a každý sloupec obsahovat právě jedno zrcadlo. Toho můžeme dosáhnout $4! = 24$ různými způsoby – v prvním řádku vybereme sloupec 4 způsoby, ve druhém řádku máme na výběr 3 možné sloupce a tak dále. Kvůli omezením na počty konců paprsků na různých stranách tabulky je jasné, že musíme umístit dvě zrcadla v obou diagonálních směrech. Pro každou vybranou skupinu čtverců, do nichž chceme zrcadla umístit, můžeme tedy zvolit směry jednotlivých zrcadel $\binom{4}{2} = 6$ možnými způsoby. Není těžké ověřit, že každý z těchto způsobů vede k požadovanému chování paprsků. Dohromady tedy můžeme zrcadla rozmístit $24 \cdot 6 = 144$ způsoby.

Úloha 42. Nechť $x_1 = 2020$ a x_n spočítáme z předchozího členu x_{n-1} tak, že x_{n-1} vynásobíme nejmenším prvočíslem p, které není dělitelem x_{n-1}, a vydělíme všemi prvočísly menšími než p. Určete počet různých prvočíselných dělitelů čísla x_{2020}.

Výsledek. 9

Řešení. Rozepíšeme si $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ a $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. Snadno si rozmyslíme, že pokud nějaký člen posloupnosti není dělitelný druhou mocninou nějakého prvočísla, mají tuto vlastnost i všechny následující členy. Počínaje členem x_2 můžeme tedy jednoznačně zakódovat všechny následující členy x_n této posloupnosti pomocí čísla b_n ve dvojkové soustavě, jehož k-tá číslice zprava je 1 právě tehdy, když je člen x_n dělitelný k-tým prvočíslem. Dále si všimneme, že podle definice posloupnosti platí $b_{n+1} = b_n + 1$ pro všechna $n \geq 2$. Máme tedy

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2 \qquad \text{a} \qquad b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 10000000000000011111101001_2.$$

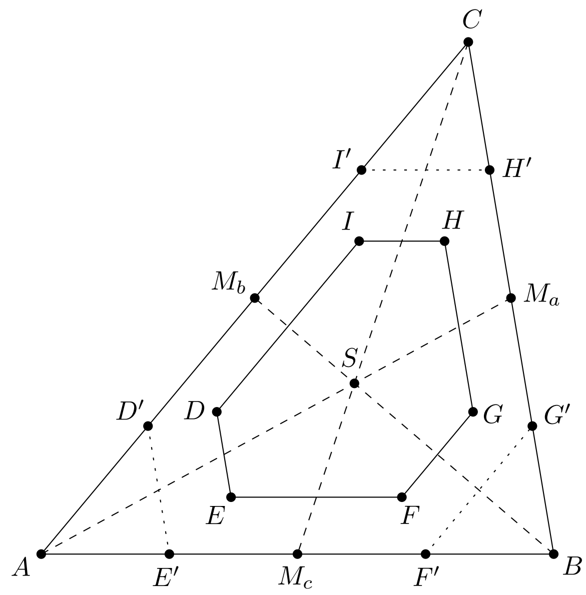
Z definice b_n plyne, že počet různých prvočíselných dělitelů x_{2020} je roven počtu jedniček v čísle b_{2020}, což je 9.

Úloha 43. Trojúhelník ABC je svými těžnicemi rozdělen na šest menších trojúhelníků, jejichž těžiště tvoří vrcholy šestiúhelníku $DEFGHI$. Určete poměr obsahu šestiúhelníku $DEFGHI$ ku obsahu trojúhelníku ABC.

Výsledek. $\frac{13}{36}$

Řešení. Následující obrázek obsahuje všechny podstatné body: těžiště S trojúhelníku ABC, středy M_a, M_b, M_c stran trojúhelníku ABC, těžiště D, E, F, G, H, I menších trojúhelníků a navíc středy $D', E', \ldots, I'$ úseček

$M_bA, AM_c, \ldots, CM_b$ v tomto pořadí.



V následujícím budeme obsahy trojúhelníků značit pomocí hranatých závorek a využijeme známého faktu, že je-li mnohoúhelník zobrazen ve stejnolehlosti s koeficientem k, vynásobí se jeho obsah číslem k^2. Protože $|AE'| = \frac{1}{4}|AB|$ a $|AD'| = \frac{1}{4}|AC|$, je trojúhelník $AE'D'$ obrazem stejnolehlosti trojúhelníku ABC se středem A a koeficientem $\frac{1}{4}$. Obsah plochy $[AE'D']$ je tedy $\frac{1}{16}[ABC]$. Podobně platí i $[BG'F'] = [CI'H'] = \frac{1}{16}[ABC]$. Z toho plyne, že obsah šestiúhelníku $D'E'F'G'H'I'$ je $\frac{13}{16}[ABC]$. Další stejnolehlost, tentokrát se středem S a koeficientem $\frac{3}{2}$, zobrazuje šestiúhelník $DEFGHI$ na šestiúhelník $D'E'F'G'H'I'$. Obsah šestiúhelníku $DEFGHI$ tak můžeme spočítat jako

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16}[ABC] = \frac{13}{36}[ABC].$$

Hledaný poměr obsahů je tedy $\frac{13}{36}$.

Úloha 44. Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je posloupnost reálných čísel splňující $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ pro všechna kladná celá čísla m, přičemž $a_1 = a_{2020}$. Spočtěte $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$.

Výsledek. $\frac{1010}{3}$

Řešení. Sečtením rovností pro $m = 1, \ldots, 2019$ dostaneme

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020}) = (1 - 2 + 3 - \cdots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}).$$

Díky vztahu $a_1 = a_{2020}$ můžeme předchozí rovnost přeuspořádat:

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}) = 1 - 2 + 3 - \cdots + 2019 = (1-2) + (3-4) + \cdots + (2017-2018) + 2019 = (-1) \cdot 1009 + 2019 = 1010.$$

Platí tedy

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = \frac{1010}{3}.$$

Povšimněte si, že taková posloupnost reálných čísel skutečně existuje: Pro dané a_1 je zbytek posloupnosti určen vztahem v zadání. Můžeme tedy vyjádřit a_{2020} jen za pomoci a_1. Z podmínky $a_1 = a_{2020}$ pak dostaneme lineární rovnici pro a_1 a není těžké si rozmyslet, že tato rovnice má řešení.

Úloha 45. Anička držela v rukou pět stejných provázků, od každého provázku jeden konec v pravé a druhý v levé ruce. Následně vyzvala Terku, aby náhodně svázala některé dvojice konců provázků v každé ruce. Terka k sobě spojila vždy nanejvýš dva konce a Aničce v každé ruce zůstal jeden volný konec. Jaká je pravděpodobnost, že jsou nyní provázky svázané do jednoho dlouhého provazu?

Výsledek. $\frac{8}{15}$

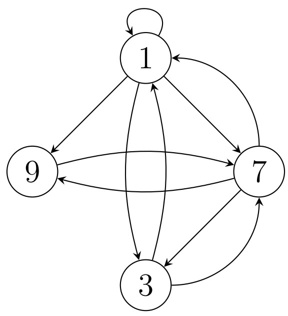
Řešení. Označme provázky A, B, C, D, a E tak, aby v Aniččině pravici měl provázek A volný konec, B byl svázán s C a D byl svázán s E. Za takových okolností vznikne jediný dlouhý provázek právě tehdy, když v Aniččině levici Terka sváže A s jedním z B, C, D, E (4 možnosti) a následně sváže zbývající volný konec příslušného páru provázků ke druhému páru provázků (2 možnosti) – například pokud je A přivázán k B, pak Terka sváže C s D nebo s E. Dohromady má tedy $4 \cdot 2 = 8$ možností, jak vytvořit uzly, aby vznikl jeden dlouhý provaz.

Celkový počet možností, jak může Terka v Aniččině levici svázat provázky, je 15: Nejprve vybere volný konec (5 možností) a dále sváže jeden další konec s některým ze tří zbývajících konců (3 možnosti). Nakonec sváže ještě dva zbývající konce, které jsou už určeny jejími předchozími volbami. Dohromady je tedy pravděpodobnost, že Terka vytvoří jeden dlouhý provaz, rovna $\frac{8}{15}$.

Úloha 46. Číslo nazveme *2-prvočíslem*, pokud je každá dvojice jeho sousedních číslic jiným dvojciferným prvočíslem. Například 237 je 2-prvočíslo, zatímco 136 ani 1313 nejsou. Najděte největší 2-prvočíslo.

Výsledek. 619737131179

Řešení. Uvažme orientovaný graf o čtyřech vrcholech označených 1, 3, 7 a 9, v němž jsou dvě číslice spojeny šipkou právě tehdy, když příslušné dvojciferné číslo vytvořené ve směru této šipky je prvočíslo. Všimněte si, že u vrcholu 1 je smyčka.



Na chvíli předpokládejme, že v tomto grafu existuje cesta, která šipkami prochází ve správném směru a každou z nich využívá právě jednou. Potom můžeme největší 2-prvočíslo vytvořit přidáním číslice 6 nebo 8 před posloupnost číslic vytvořenou takovou cestou. Z definice 2-prvočísla totiž plyne, že všechny jeho cifry kromě první zleva musí být prvky množiny $\{1, 3, 7, 9\}$ a že žádná šipka nemůže být použita vícekrát. Žádné 2-prvočíslo tedy nemůže mít více cifer než počet šipek v grafu plus dva (jedna za přidanou první číslici a jedna, protože počítáme cifry, nikoli dvojice), tedy 12. Přidaná první cifra navíc nemůže být 9 ani 7, jelikož by došlo k zopakování některé šipky použité v cestě, a protože jsou 61, 83, 87 a 89 prvočísla, můžeme si být jisti, že nebudeme potřebovat nižší první číslici než 6 nebo 8.

Nyní najdeme cestu s výše uvedenými vlastnostmi. Všimněme si, že do vrcholu 9 vchází o šipku více, než kolik jich z něj vychází, a naopak z vrcholu 1 vychází o šipku více, než do něj vstupuje. Zbylé dva vrcholy jsou v tomto smyslu vyrovnané. Naše cesta proto musí začínat v 1 a končit v 9. Z vrcholu 1 zamíříme do 9, protože je to sousední vrchol s nejvyšší dostupnou hodnotou. Pak se ze stejného důvodu posuneme do 7, odkud nemůžeme jít do 9 (protože by to ukončilo posloupnost), a tak raději zamíříme do 3, pak zpět do 7 a tak dále. Tímto (svým způsobem hladovým) algoritmem dostaneme posloupnost vrcholů 19737131179. Protože 81 není prvočíslo a už víme, že naše cesta musela začít ve vrcholu 1, je 619737131179 největší 2-prvočíslo.

Úloha 47. Nechť O je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dále nechť body D a E leží v tomto pořadí na úsečkách AB a AC tak, že bod O je středem úsečky DE. Pokud je $|AD| = 8$, $|BD| = 3$ a $|AO| = 7$, určete $|CE|$.

Výsledek. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Řešení. Celou konfiguraci zobrazíme ve středové souměrnosti podle O a obrazy bodů označíme přidáním čárky k jejich původnímu názvu. Body A' a B' pak leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC a platí $D' = E$ (a podobně také $E' = D$). Z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $AA'B'$ (neboť AA' je průměrem opsané kružnice) plyne

$$|AB'|^2 = |AA'|^2 - |A'B'|^2 = 14^2 - |AB|^2 = 14^2 - 11^2 = 75.$$

Protože $|\sphericalangle AB'E| = |\sphericalangle A'BD| = 90°$, z Pythagorovy věty v trojúhelníku $AB'E$ plyne

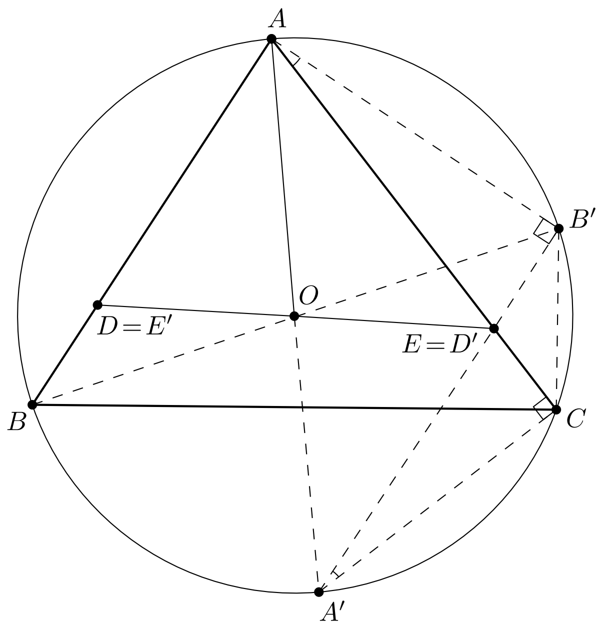
$$|AE| = \sqrt{|AB'|^2 + |BD|^2} = \sqrt{75 + 9} = 2\sqrt{21}.$$

Protože E (obraz bodu D) leží na úsečce $A'B'$ (obrazu úsečky AB) a protože je čtyřúhelník $AB'CA'$ tětivový, platí $\triangle AB'E \sim \triangle A'CE$. Proto

$$\frac{|CE|}{|A'E|} = \frac{|B'E|}{|AE|},$$

z čehož plyne

$$|CE| = |AD| \cdot \frac{|BD|}{|AE|} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$



Jiné řešení. Mocnost bodu D ke kružnici opsané $\triangle ABC$ s poloměrem $r = |AO|$ dává

$$-3 \cdot 8 = -|DB| \cdot |DA| = |OD|^2 - r^2 \implies |OE| = |OD| = \sqrt{49 - 24} = 5$$

(znaménko minus se zde objevuje proto, že bod D leží uvnitř této kružnice). Z kosinové věty v $\triangle ADO$ plyne

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(|\sphericalangle AOD|).$$

Protože $\cos(|\sphericalangle AOE|) = \cos(180^\circ - |\sphericalangle AOD|) = -\cos(|\sphericalangle AOD|) = -\frac{1}{7}$, z kosinové věty pro $\triangle AOE$ pak plyne

$$|AE|^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(|\sphericalangle AOE|) = 84 \implies |AE| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

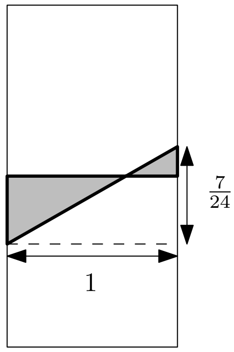
Podobně jako výše z mocnosti bodu E dostaneme

$$-2\sqrt{21} \cdot |EC| = 5^2 - 7^2 \quad \text{neboli} \quad |EC| = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Úloha 48. Obdélník o rozměrech 7×24 je rozdělen na čtverce 1×1. Jedna z jeho úhlopříček odřízne z některých čtverců trojúhelníky. Určete součet obvodů všech těchto trojúhelníků.

Výsledek. $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Řešení. Nechť 24 je šířka a 7 výška tohoto obdélníku. Úhlopříčka jdoucí z jeho levého dolního vrcholu do pravého horního vrcholu má sklon $\frac{7}{24}$. Když prochází čtvercem, uřízne z něj trojúhelník právě tehdy, když projde jednou z jeho vodorovných stran. Jelikož jsou 7 a 24 nesoudělná čísla, úhlopříčka neprochází žádným z vrcholů čtverců vyjma protějších vrcholů obdélníku. Protože je sklon úhlopříčky konstantní, můžeme strany dvou trojúhelníků odříznutých ze dvou čtverců sdílejících vodorovnou stranu protnutou diagonálou přeuspořádat a vytvořit tak větší pravoúhlý trojúhelník šířky 1. Délka jeho svislé odvěsny je $\frac{7}{24}$, a jeho přepona je tedy dlouhá $\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$.



Součet obvodů těchto dvou trojúhelníků je tedy $\frac{56}{24}$. Úhlopříčka protíná některou z vodorovných stran čtverců uvnitř obdélníku právě šestkrát (vždy ve vnitřním bodě), k čemuž ještě musíme přičíst dva velké pravoúhlé trojúhelníky zmíněných rozměrů, které jsou odříznuty z prvního a posledního čtverce, jimiž úhlopříčka prochází. Celkový součet obvodů trojúhelníků je tedy $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

Úloha 49. Kladné celé číslo n nazveme *vejtahou*, je-li možné dostat se z každého podlaží 8787patrové budovy do libovolného jiného, pokud je povoleno pouze sjet výtahem o 2020 podlaží dolů nebo vyjet o n podlaží nahoru. Najděte největší číslo, které je vejtaha.

Poznámka: k-patrová budova má k nadzemních podlaží a jedno přízemní podlaží.

Výsledek. 6763

Řešení. Zaprvé, aby vůbec bylo možné odjet z patra číslo 2019, musí platit $2019+n \leq 8787$, neboli $n \leq 6768$. Zadruhé, nutně musí platit, že $d = \mathrm{NSD}(2020, n) = 1$, neboť pokud se lze dostat z patra a do patra b, pak určitě $d \mid a-b$. Uvážíme-li $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, můžeme vyloučit některé kandidáty na největší možné n: číslo 6768 je násobkem 2, 6767 je násobkem 101, 6766 je násobkem 2, 6765 je násobkem 5 a 6764 je násobkem 2. Prvním vhodným kandidátem je tedy 6763, protože $\mathrm{NSD}(6763, 2020) = 1$.

Zbývá dokázat, že 6763 je vejtaha. Užitím Eukleidova algoritmu (nebo Bézoutovy identity) můžeme najít celá čísla x, y taková, že $6763x - 2020y = 1$. Můžeme dokonce předpokládat, že x, y jsou nezáporná, neboť přičtením 2020 k x a 6763 k y se rovnost zachová. Ukažme, že začneme-li v podlaží p, kde $0 \leq p \leq 8786$, pak lze provést posloupnost x jízd nahoru a y jízd dolů v takovém pořadí, že zůstaneme uvnitř budovy a skončíme v podlaží $p+1$. Díky tomu, že $2020 + 6763 \leq 8787$, je vždy možná jízda alespoň jedním ze směrů. Navíc pokud jsme již spotřebovali všechny jízdy dolů (resp. nahoru), pak musíme být na podlaží nižším (resp. vyšším) než $p+1$, a tak už nás zbývající jízdy nahoru (resp. dolů) zanesou na podlaží $p+1$. Podobně lze ukázat, že je možné dostat se o jedno podlaží níže z každého patra p splňujícího $1 \leq p \leq 8787$. Tím je ukázáno, že 6763 je vejtaha.

Úloha 50. V kryptogramu

$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

různá písmena reprezentují různé číslice. Žádné z uvedených čtyř čísel nezačíná nulou. Navíc víme, že $BLUE$ je druhou mocninou nějakého celého čísla. Určete pěticiferné číslo $BROWN$.

Výsledek. 85230

Řešení. Očíslujme sloupce zleva doprava čísly 1 až 5 a číslo, které při sčítání pod sebou „přenášíme“ z i-tého sloupce o řád výš označme c_i. Zřejmě $c_1 = 0$ a $0 \leq c_i \leq 2$ pro $i = 2, \dots, 5$. Vskutku, protože sečtením tří jednociferných čísel a přenesené hodnoty nejvýše 2 dostaneme maximálně $3 \cdot 9 + 2 = 29$, je snadné poslední uvedenou nerovnost dokázat indukcí. Dále si všimněme, že $c_2 \leq 1$, protože ve druhém sloupci sčítáme dvě různé číslice a už víme, že $c_3 \leq 2$. Navíc $c_2 \neq 0$ kvůli prvnímu sloupci, takže $c_2 = 1$ a $G + 1 = B$. Z pátého sloupce plyne $D + E = 10$, protože číslice D a E nemohou být obě nuly, a proto $c_5 = 1$.

Jelikož $B + R + c_3 = c_2 \cdot 10 + R$, buď $B = 9$, nebo $B = 8$. Proto $BLUE = n^2$ pro n splňující $90 \leq n \leq 99$. Když vyloučíme druhé mocniny, v nichž se opakují některé cifry, zbudou nám 8649, 9025, 9216, 9604, 9801 jakožto možné hodnoty čísla $BLUE$. Díky platnosti $D + E = 10$ můžeme vyloučit i 9025, protože jinak by muselo být $D = E = 5$. Podobně není možné ani číslo 9801, protože pak by $B = D = 9$, ani číslo 9604, protože by muselo platit $L = D = 6$. S pomocí čtvrtého sloupce vyloučíme také 9216, které by implikovalo $D = 4$ a $E + U + E + 1 = 6 + 1 + 6 + 1 = 14$, tedy $W = 4$, což by byl ale spor s platností $D = 4$. Jediná možná hodnota čísla $BLUE$ je tedy 8649.

Ze znalosti hodnot $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$, $E = 9$ snadno dopočteme $D = 1$, $W = 3$ a $G = 7$ a také přenosy $c_3 = c_4 = 2$. Sčítání ve třetím sloupci, $R + L + E + c_4 = c_3 \cdot 10 + O$, lze zjednodušit na $R + 17 = 20 + O$, což může platit jen pokud $R = 5$ a $O = 2$. V důsledku toho konečně zjistíme, že musí být $N = 0$. Kryptogram má tedy jediné řešení

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 9 & 1 \\ + & & 8 & 6 & 4 & 9 \\ + & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline = & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Úloha 51. Určete nejmenší kladné celé číslo $k > 1$, pro nějž neexistuje k-ciferné kladné celé číslo n složené z lichých cifer splňující $S(S(n)) = 2$, kde $S(x)$ značí ciferný součet čísla x.

Výsledek. 103

Řešení. Nejprve si všimneme, že pro liché celé číslo m platí $S(m) = 2$ právě tehdy, když platí $m = 10^l + 1$ pro nějaké kladné celé číslo l. Pokud je $k = 103$, pak $S(n)$ je nutně liché pro jakékoli k-ciferné číslo n se všemi ciframi lichými. Aby platilo $S(S(n)) = 2$, musí být tedy $S(n)$ ve výše uvedeném tvaru. Nicméně pro každé n se 103 ciframi platí

$$101 < 103 \cdot 1 \leq S(n) \leq 103 \cdot 9 = 927 < 1001.$$

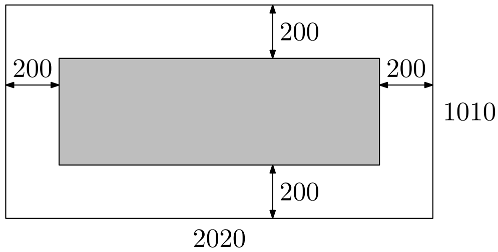
Číslo $k = 103$ tedy splňuje podmínku ze zadání.

Nyní dokážeme, že pro jakékoli liché $k < 103$ existuje číslo n popsané v zadání. Zjevně platí, že $S(n)$ může nabývat jakékoli liché hodnoty větší nebo rovné k a menší nebo rovné $9k$. Pokud $1 < k \leq 11$, pak $9k \geq 18 > 11$, a tedy $S(n)$ se může rovnat 11, neboli existuje takové číslo n, pro nějž by platilo $S(S(n)) = 2$. Pokud $101 \geq k > 11$, pak $9k \geq 9 \cdot 13 = 117 > 101$, a tedy $S(n)$ se může rovnat 101, neboli znovu může platit $S(S(n)) = 2$.

Pokud $k < 103$ je sudé, budeme postupovat v podstatě stejně. Jediným rozdílem je to, že $S(n)$ je sudé. Pro $k = 2$ můžeme použít $n = 11$. Pokud $2 < k \leq 20$, pak $9k > 20$, a můžeme tedy najít číslo n s $S(n)$ rovným 20. Pokud $103 > k > 20$, pak $9k > 180 > 110$, a $S(n)$ se může rovnat 110.

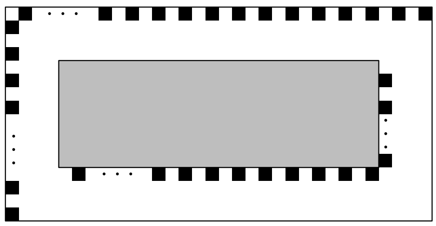
Z toho plyne, že 103 je hledané nejmenší číslo k s požadovanými vlastnostmi.

Úloha 52. Helča si koupila hrací desku složenou z 1010×2020 čtverečků, z níž odstranila menší obdélník jako na obrázku. Na každý čtvereček zbytku desky potom umístila ploštici. Bohužel měly některé ploštice silně nakažlivý kašel: každá ploštice sousedící s alespoň dvěma nakaženými plošticemi dostala kašel taky. (Řekneme, že spolu dvě ploštice *sousedí*, pokud mají jejich čtverce společnou stranu.) Určete nejmenší počet nemocných ploštic, který při vhodném počátečním rozmístění po čase nakazí všechny ostatní. Ploštice se po desce nepohybují.



Výsledek. 2630

Řešení. Všimneme si, že když se popsaným způsobem nakazí nová ploštice, celkový obvod čtverců s nakaženými plošticemi se nezvýší. Na začátku tedy musí být nakaženo alespoň $\frac{P}{4}$ ploštic, kde P je obvod části hrací plochy ve tvaru „O“. Ten spočteme jako $P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$. Obrázek znázorňuje rozmístění $\frac{P}{4} = 2630$ nemocných ploštic, které časem nakazí i všechny ostatní.



Úloha 53. Kladné celé číslo má 25! různých kladných dělitelů. Kolik nejvíce z nich může být pátou mocninou prvočísla?

Poznámka: Symbol $n!$ značí součin všech kladných celých čísel, která jsou menší nebo rovna n.

Výsledek. 27

Řešení. Číslo $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, kde p_i jsou různá prvočísla, má právě $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ kladných dělitelů. Z toho vidíme, že nejvyšší počet pátých mocnin prvočísel, které mohou dělit zadané číslo, je roven nejvyššímu možnému počtu činitelů větších nebo rovných šesti v nějakém rozkladu čísla 25!. Rozložíme proto číslo 25! na prvočinitele

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

a poskládáme z těchto prvočísel co nejvíce činitelů větších nebo rovných šesti. Prvočísla větší než 5 necháme samotná, všechny pětky a trojky spojíme s dvojkami a konečně přepíšeme 2^6 na 8^2. Dohromady tak dostaneme číslo 27.

Úloha 54. Kladná reálná čísla x, y, z splňují

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 1, \\ y^2 + yz + z^2 &= 2, \\ z^2 + zx + x^2 &= 3. \end{aligned}$$

Určete hodnotu $xy + yz + zx$.

Výsledek. $2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Řešení. Sečtením první a třetí rovnice a následným odečtením dvojnásobku té druhé dostaneme

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0,$$

a protože x, y, z jsou kladná, platí $2x = y + z$. Položíme $y = x - \delta$, $z = x + \delta$ a dosazením do původních rovnic získáme

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x\delta + \delta^2 &= 1, \\ 3x^2 + \delta^2 &= 2, \\ 3x^2 + 3x\delta + \delta^2 &= 3. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od třetí dostáváme $x\delta = 1/3$, a tedy $x = \frac{1}{3\delta}$. Dosazením do druhé rovnice pak získáme kvadratickou rovnici s řešeními

$$\delta^2 = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Zajímá nás hodnota $xy + yz + zx = 3x^2 - \delta^2$, což s využitím druhé rovnice z posledního systému můžeme napsat jako $2 - 2\delta^2$. Protože výsledek musí být kladný, jediná možnost je $xy + yz + zx = 2 - 2(1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Jiné řešení. Zvolme v rovině bod P a sestrojme úsečky PA, PB a PC s délkami postupně x, y a z tak, aby $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120°$. Protože $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, z daných rovnic a z kosinové věty dostaneme $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$ a $|AC| = \sqrt{3}$. Proto je ABC pravoúhlý trojúhelník s obsahem $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tento obsah lze také spočítat jako součet obsahů tří trojúhelníků s vrcholem P. Dostaneme $S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$. Platí $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a proto $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Úloha 55. Bod I je středem kružnice vepsané a bod O středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, pro který platí $|AB| = 495$, $|AC| = 977$ a $|\sphericalangle AIO| = 90°$. Určete $|BC|$.

Výsledek. 736

Řešení. Uvažme stejnolehlost se středem A a koeficientem 2 a označme obrazy bodů přidáním čárky k jejich původnímu jménu. Úsečka AO' je potom zjevně průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC, a protože platí $|\sphericalangle AIO| = 90°$, bod I' také leží na této opsané kružnici. Bod I' navíc leží i na ose úhlu BAC, a je tedy středem oblouku BC neobsahujícího bod A. O tomto bodu (který od teď budeme značit $\check{S}$) je dobře známo, že splňuje $|\check{S}I| = |\check{S}C|$. Z vlastností obvodových úhlů pak plynou rovnosti $|\sphericalangle BC\check{S}| = |\sphericalangle BA\check{S}| = |\sphericalangle CA\check{S}|$. Označme průsečík $A\check{S}$ a BC jako D. Potom platí $\triangle D\check{S}C \sim \triangle C\check{S}A$, a tedy

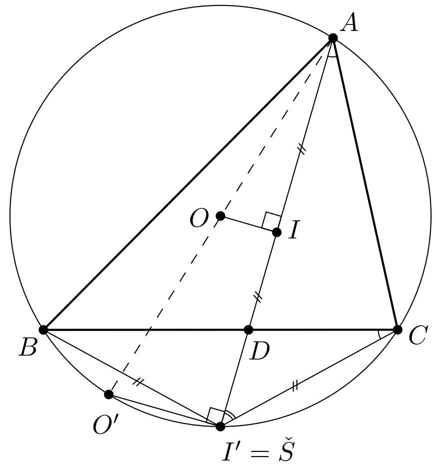
$$\frac{|\check{S}D|}{|\check{S}I|} = \frac{|D\check{S}|}{|\check{S}C|} = \frac{|C\check{S}|}{|\check{S}A|} = \frac{|\check{S}I|}{|\check{S}A|} = \frac{1}{2}.$$

Nyní z platnosti $|AI| = 2 \cdot |ID|$ plyne $[BCI] = \frac{1}{3}[ABC]$, kde $[XYZ]$ značí obsah trojúhelníku XYZ. Označíme-li r poloměr vepsané kružnice trojúhelníku ABC, můžeme tento vztah přepsat jako

$$\frac{1}{2}r \cdot |BC| = \frac{1}{6}r(|AB| + |BC| + |CA|),$$

z čehož už snadno spočítáme

$$|BC| = \frac{|AB| + |AC|}{2} = \frac{495 + 977}{2} = 736.$$



Úloha 56. Najděte všechny trojice (a, b, c) kladných celých čísel, která splňují rovnici $3abc = 2a + 5b + 7c$.

Výsledek. $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$

Řešení. Rovnici vydělíme (kladným) číslem abc, čímž dostaneme

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Pokud by všechna tři neznámá čísla byla větší než jedna a aspoň jedno z nich větší než dva, pravá strana této rovnice by byla nanejvýš

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3,$$

a tedy za těchto předpokladů neexistuje žádné řešení. Snadno ověříme, že možnost $a = b = c = 2$ také nedává žádné řešení. Jistě je tedy aspoň jedno číslo z a, b, c rovno 1.

Pokud $a = 1$, pak po dosazení do první rovnice dostaneme

$$3bc = 2 + 5b + 7c,$$

což po vynásobení 3 a přeuspořádání můžeme upravit do tvaru

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41.$$

Protože obě závorky musí být kladnými děliteli prvočísla 41, které po vydělení 3 dává zbytek 2, existuje právě jedno řešení, a to $b = 16$ a $c = 2$.

Pokud $b = 1$, dostaneme

$$3ac = 2a + 5 + 7c$$

a provedením podobného postupu pak

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

což s využitím stejného argumentu dělitelnosti jako výše vede k řešení $a = 12$ a $c = 1$.

Nakonec možnost $c = 1$ dá rovnici ve tvaru

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31,$$

která má řešení $a = 12$, $b = 1$ a $a = 2$, $b = 11$, přičemž první z nich už jsme našli v předchozím případě.

Dohromady máme tedy právě tři řešení: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ a $(12, 1, 1)$.

Úloha 57. Na večírku má každý mezi ostatními hosty právě čtrnáct přátel (přičemž sám sebe mezi své přátele nepočítá). Každá dvojice přátel má na večírku právě šest dalších společných přátel, zatímco každá dvojice, kterou nepojí přátelství, má právě dva společné přátele. Kolik hostů se účastní večírku?

Výsledek. 64

Řešení. Zvolme hosta x spolu se všemi jeho přáteli a označme tuto skupinu 15 osob jako H. Dále ze skupiny H vyberme člena y jiného než x. Tvrdíme, že y má přesně 7 přátel mimo skupinu H: Ze 14 přátel hosta y je jedním x a dalšími šesti jsou společní přátelé hostů x a y, kteří jsou všichni zahrnutí ve skupině H, a mimo ni tedy zbývá 7 přátel y. Dohromady je tak $c = 14 \cdot 7 = 98$ dvojic (y, z), kde y je některým členem skupiny H jiným než x a z je přítel y mimo skupinu H. Toto číslo c lze spočítat i jinak: Každý host z mimo skupinu H má v H právě dva přátele, protože x podle definice H není přítelem z a oba jejich společní přátelé jsou ve skupině H. Jinými slovy c je dvojnásobkem počtu hostů mimo skupinu H, kterých je tedy $\frac{98}{2} = 49$. Protože jsme do H zařadili 15 členů, dohromady je na večírku $15 + 49 = 64$ hostů.

Poznamenejme ještě, že opravdu může existovat skupina 64 hostů s popsanými přátelskými vztahy: Představme si hosty uspořádané v tabulce 8×8, přičemž dva hosté se přátelí právě tehdy, když stojí ve stejném řádku nebo sloupci. Je snadné ověřit, že pak opravdu platí vztahy popsané v zadání.

Úloha 58. Bod P leží uvnitř trojúhelníku ABC. Pokud platí

$$|AP| = \sqrt{3}, \quad |BP| = 5, \quad |CP| = 2, \quad |AB| : |AC| = 2 : 1 \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BAC| = 60^\circ,$$

jaký je obsah trojúhelníku ABC?

Výsledek. $\frac{6+7\sqrt{3}}{2}$

Řešení. Nejprve si všimneme, že z daného poměru délek stran AB a AC a dané velikosti úhlu mezi nimi plyne, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C. V té polorovině dané přímkou AB, ve které neleží bod C sestrojme bod Q tak, aby platilo $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$. Koeficient podobnosti je roven $\frac{|AB|}{|AC|} = 2$, z čehož plynou vztahy $|AQ| = 2|AP| = 2\sqrt{3}$ a $|BQ| = 2|CP| = 4$. Díky těmto rovnostem a tomu, že $|\sphericalangle QAB| = |\sphericalangle PAC|$, musí platit $\triangle APQ \sim \triangle ACB$, a tedy $|\sphericalangle APQ| = 90°$. Z Pythagorovy věty spočítáme

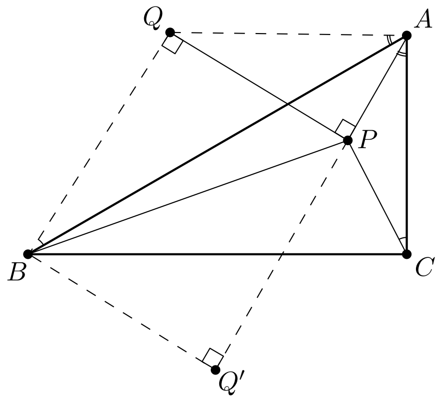
$$|PQ| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3.$$

Protože platí $|BP|^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = |BQ|^2 + |PQ|^2$, z opačné implikace Pythagorovy věty vyvodíme, že $|\sphericalangle BQP| = 90°$. Dále uvažme obraz Q' bodu Q ve středové souměrnosti podle středu úsečky BP. To nám umožní znovu využít Pyhagorovu větu, tentokrát v pravoúhlém trojúhelníku $AQ'B$, a spočítat

$$|AB|^2 = |PQ|^2 + (|AP| + |BQ|)^2 = 28 + 8\sqrt{3}.$$

Obsah trojúhelníku $\triangle ABC$ se tedy rovná

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8}|AB|^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



Úloha 59. Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom s nezápornými celými koeficienty, který splňuje

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Určete nejnižší možnou hodnotu $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Výsledek. 22

Řešení. Označme $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ a všimněme si, že platí $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1)$. Řešení úlohy rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: Prostým dosazením ověříme, že u je kořenem polynomu $G(x) = x^2 + x - 5$. Poté vydělíme $P(x)$ polynomem $G(x)$, neboli napíšeme

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

pro nějaká celá čísla A, B a polynom Q s celými koeficienty (takový výsledek dostaneme běžným postupem pro dělení polynomů, protože vedoucí koeficient polynomu $G(x)$ je 1).

Krok 2: Protože $P(u) - 2020 = 0$, A, B jsou celá čísla a u je iracionální, nutně platí, že $A = 0$ a $B - 2020 = 0$. Předchozí zápis se tedy zjednoduší na

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \qquad (\star)$$

Krok 3: Pokud některý koeficient $P(x)$, třeba a_k, splňuje $a_k \geq 5$, pak vytvoříme nový polynom

$$\tilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k,$$

jenž splňuje všechny podmínky ze zadání a navíc pro něj platí $\tilde{P}(1) = P(1) - 3$. Tento postup budeme opakovat, dokud to bude možné, čímž nakonec získáme polynom $P(x)$, jehož všechny koeficienty splňují $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a platí pro něj $P(u) = 2020$.

Krok 4: Dokážeme, že polynom P s těmito vlastnostmi je právě jeden. Z předchozích kroků víme, že každý takový polynom splňuje rovnici ($\star$) s nějakým vhodným polynomem $Q(x)$. Z této rovnice je dále vidět, že pro splnění vztahu $0 \leq a_0 \leq 4$, kde a_0 je konstantní koeficient polynomu $P(x)$, musí pro konstantní koeficient polynomu $Q(x)$ platit

$q_0 = 404$. Protože známe všechny koeficienty polynomu $G(x)$ a protože absolutní hodnota jeho konstantního koeficientu je 5, můžeme podobně pokračovat a z rovnice ($\star$) určit lineární koeficient q_1 a poté i další koeficienty. Z jednoznačnosti polynomu $Q(x)$ jasně plyne požadovaná jednoznačnost $P(x)$.

Krok 5: Nyní již zbývá jen opakovat proces popsaný v Kroku 3 a provést příslušné výpočty. Začneme s konstantním polynomem $P_0(x) = 2020$ a následující polynom dostaneme vždy maximálním zopakováním postupu pro pevné k:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x,\\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x,\\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x,\\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

Hledané minimum je tedy $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22$.