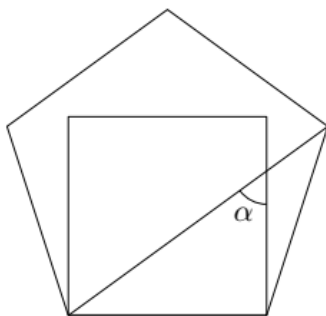


مسئله یکم. اگر میانگین حسابی چهار عدد طبیعی برابر با 10 باشد، بیشترین مقدار ممکن برای این چهار عدد چند است؟

مسئله دوم. اگر 4 ریشه ی معادله ی درجه دوم $x^2 + mx + 2020 = 0$ باشد به طوری که m عددی صحیح است، ریشه ی دیگر معادله چند است؟

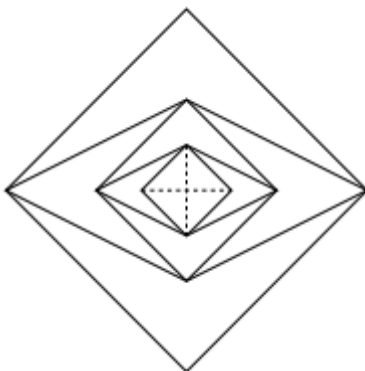
مسئله سوم. وقتی 95 را بر عدد طبیعی N تقسیم کنیم باقی مانده برابر 4 می شود. حداکثر مقدار N چند است؟

مسئله چهارم. در شکل زیر یک مربع و یک پنج ضلعی منتظم را مشاهده می کنید. زاویه ی α چند درجه است؟



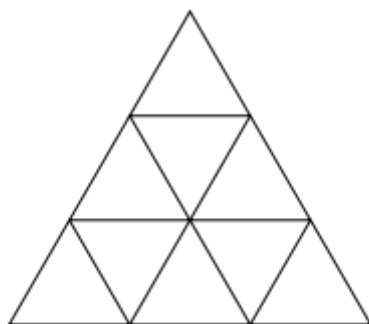
مسئله پنجم. سه خط اتوبوس A, B, C در یک ایستگاه توقف می کنند، بازه های زمانی توقف آن ها به ترتیب $12, 10, 8$ دقیقه یک بار می باشد. هنگامی که برایان به پشت ایستگاه می رسد متوجه می شود که سه اتوبوس از سه خط متمایز به طور هم زمان توقف کرده اند. چند دقیقه از این لحظه بگذرد تا مجدداً و برای نخستین بار چنین چیزی رخ بدهد؟

مسئله ششم. یک گل لوزی شکل براساس الگوی مقابل رشد می کند: یک شکوفه ی مربعی در وسط آن قرار دارد که طول قطران برابر 1 می باشد. در گام نخست قطر افقی دو برابر می شود و چهار ضلعی جدیدی را می سازد، درگام بعدی قطر عمودی دوبرابر می شود و چهارضلعی جدیدی را می سازد. این فرآیند ادامه خواهد یافت تا زمانی که گلی با پنج شکوفه داشته باشیم. محیط خارجی ترین یا همان پنجمین شکوفه چند است؟



مسئله هفتم. یک گیاه شناس دو گیاه P_1, P_2 را از یک گونه ی گیاهی کاشته و ارتفاع آن ها را اندازه می گیرد. پس از یک هفته، گیاهان درصد رشد برابری را داشتند، او پس از اندازه گیری ارتفاع ها متوجه می شود که ارتفاع گیاه P_1 به اندازه ی ارتفاع هفته ی گذشته ی P_2 بوده و گیاه P_2 44 درصد بزرگ تر از ارتفاع هفته ی پیش P_1 می باشد. درصد رشد هفتگی گیاهان چند است؟

مسئله هشتم. در شکل زیر چند متوازی الاضلاع وجود دارد؟



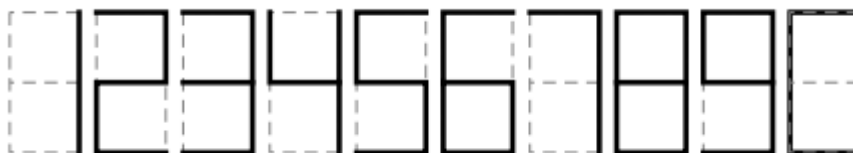
مسئله نهم. یک شرکت اتوبوس رانی، اتوبوس هایی را با 27 یا 36 مسافر ارائه می کند. یک تور مسافرتی شامل 505 توریست می خواهد با اتوبوس های این شرکت سفر کند. کمپانی این اتوبوس ها را طوری انتخاب کرده است که تعداد کل صندلی های خالی در اتوبوس ها یعنی N کم ترین مقدار ممکن باشد. N را پیدا کنید.

مسئله دهم. یک طرف دار حیوانات دو تصویر یک سان از یک گرگ و چهار تصویر یکسان از یک روباه را خریداری کرده است. او می خواهد این تصاویر را کنار هم و روی شش عدد میخ دیواری اتاق پذیرایی اش آویزان کند. هم چنین، می خواهد هرروز ترتیب این تصاویر را تغییر بدهد به طوری که دنباله ی حاصل از تصاویر متمایز از دنباله ی حاصل از تصاویر روزهای گذشته باشد. درنهایت، او نمی خواهد که دو تصویر یک گرگ کنار هم قرار بگیرند. حداکثر چند روز او می تواند به این کار خود ادامه بدهد؟

مسئله یازدهم. یک ریسمان با شروع از بخش زیرین یک استوانه و پایان در نقطه ای که دقیقاً بالای نقطه شروع قرار گرفته، سه بار حول یک استوانه به ارتفاع 18 cm و محیط قاعده ی 8 cm پیچیده شده است. طول این ریسمان چند سانتی متر می باشد؟



مسئله دوازدهم. یک ماشین حساب که به درستی کار می کند! رقم ها را به صورت زیر نمایش می دهد:



بخشی از صفح نمایش ماشین حساب آدام¹ به مشکلی برخورد و تنها پاره خط های افقی را نمایش می دهد. برای این که آدام مطمئن بشود که ماشین حسابش هنوز درست کار می کند؛ چنین محاسبه ای را انجام می دهد:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

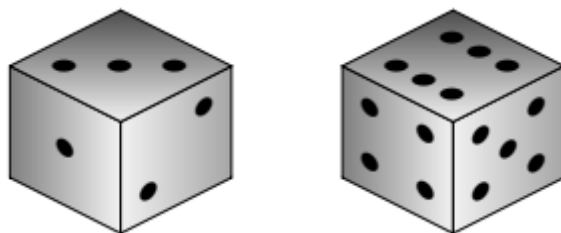
درین محاسبه، مجموع رقم ها چند است؟

¹ Adam

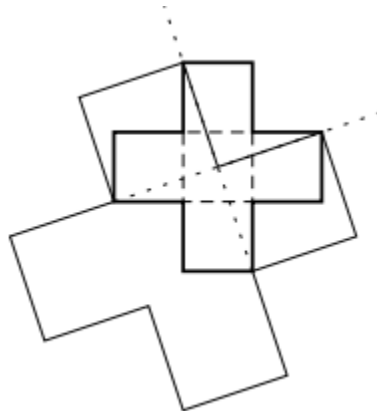
مسئله سیزدهم. اد² مجبور بود دو عدد را باهم جمع کند، اما ناگهان رقم اضافی ای را در انتهای یکی از آن دو عدد می نویسد. در نتیجه او به جای حاصل جمع 12345 به حاصل جمع 44444 می رسد. از میان دو عددی که وی در ابتدا می خواست با هم جمع کند، کوچک ترین عدد کدام است؟

مسئله چهاردهم. پیتر ³27 تاس سالم دارد و می خواهد آن ها را طوری روی هم بچسباند تا یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ بسازد، به طوری که وجه های مجاور (یعنی؛ وجه هایی که به هم می چسبند) تعداد نقطه های یکسانی رویشان باشد. حداکثر چند نقطه روی مکعب مرئی خواهد بود؟

توجه. دو تصویر از یک تاس سالم را مشاهده می کنید. این ها طوری قرار گرفته اند که مجموع عددهای روی دو وجه روبه رو برابر 7 باشند.



مسئله پانزدهم. آنتونیا⁴ یک ایکس-پنتامینو⁵ را که از پنج مربع هم نهشت ساخته شده رسم می کند. او پس از آن دو قطر عمود بر هم این پنتامینو را با خط چین رسم می کند. درنهایت، یک ایکس-پنتامینو ی بزرگ تر را که برخی از اضلاعش روی قطرهای پنتامینو ی کوچک روی شکل هستند رسم می کند. نسبت مساحت پنتامینو ی بزرگ آنتونیا به پنیامینو ی کوچک او چند است؟



⁴ Antonia

⁵ X-pentomino

مسئله شانزدهم. چند عدد آئینه ای⁶ بین 10^3 و 10^7 وجود دارد که تعداد رقم هایش زوج باشد؟

تذکر. یک عدد را آئینه ای می نامیم اگر وقتی ترتیب رقم هایش را معکوس کنیم تغییری نکند. به طور مثال 12321 آئینه ای است.

⁶ palindrom

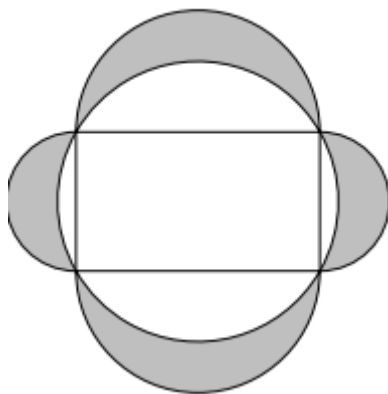
مسئله هفدهم. یک گروه موسیقی بانوان شامل شصت خواننده است: بیست خواننده با صدای سوپرانو⁷، بیست خواننده با صدای سوپرانو ریز⁸، و بیست خواننده با صدای آلتو⁹. هم چنین شش خواننده در هر سه صدا متبحر هستند، در نتیجه می توانند هر یک از بخش های ارکستر را در صورت لزوم بخوانند؛ باقی خواننده ها تنها قادرند که بخش مربوط به خود را اجرا کنند. حداکثر مقدار S را طوری پیدا کنید که اگر S عدد از خواننده ها بیمار شوند و نتوانند بخوانند، باقی خواننده ها بتوانند طوری کار را تنظیم کنند که در هر بخش دست کم ده خواننده بخواند؟

⁷ soprano

⁸ mezzo-sopranos

⁹ alto

مسئله هجدهم. یک مستطیل به طول اضلاع 3 و 4 در یک دایره محاط شده است. هم چنین، چهار نیم دایره به اضلاع آن طوری چسبیده اند تا شکلی به صورت زیر را بسازند. مساحت قسمت هاشور خورده را که از نقطه هایی ساخته شده که در نیم دایره ها هستند ولی داخل دایره بزرگ نیستند، چند است؟



مسئله نوزدهم. بزرگ ترین عدد اول سه رقمی p_1 را طوری پیدا کنید که جمع ارقام آن یک عدد اول دورقمی p_2 بوده و جمع ارقام p_2 یک عدد دورقمی مثل p_3 باشد.

مسئله بیستم. در مثلث ABC می دانیم $AB = AC$. عمود منصف یکی از اضلاع، یکی از ارتفاع ها را در تنها یک نقطه روی محیط مثلث ABC قطع می کند. همه ی مقادیر ممکن را برای اندازه ی زاویه ی $\angle ACB$ پیدا کنید.

مسئله بیست و یکم. مجموع همه ی مقسوم علیه های مثبت 3599 را پیدا کنید.

توجه: عددهای 1 و 3599 رانیز به حساب بیاورید.

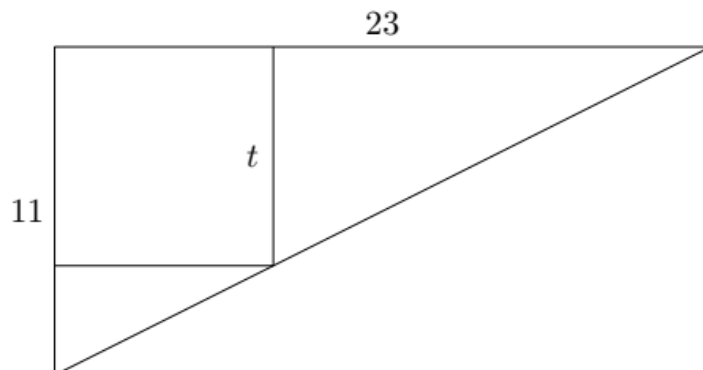
مسئله بیست و دوم. سه خواهر به نام های دالی¹⁰، هالی¹¹، و مالی¹² در یک سفر چادر می زنند و سوسیس های سرخ شده را آماده می کنند. دالی 17 عدد سوسیس خریده است، هالی 11 عدد، و مالی سوسیس نخریده است. پس از آن که همه ی سوسیس ها را خوردند، تصمیم می گیرند که هزینه ها را به صورت برابر تقسیم کنند. اگر مالی 28 دلار به خواهرانش داده باشد تا قرض خود را بپردازد، دالی چند دلار به دست آورده است؟

¹⁰ Dolly

¹¹ Holly

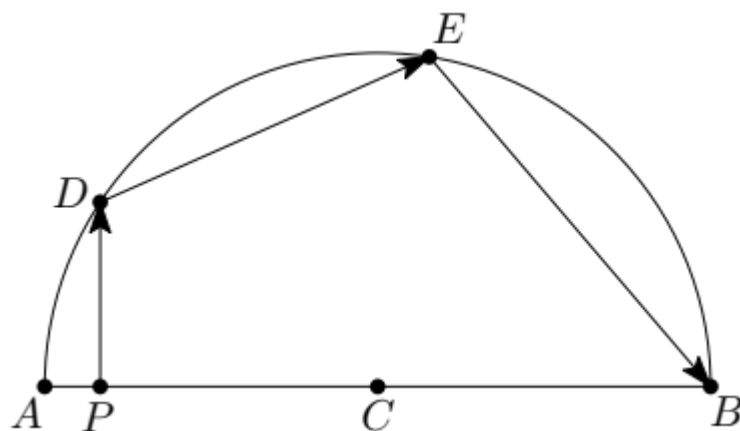
¹² Molly

مسئله بیست و سوم. قاعده و ارتفاع یک مثلث قائم الزاویه به ترتیب برابر با 11 و 23 می باشند. دو ضلع از اضلاع مربعی به طول ضلع t مطابق شکل روی اضلاع مثلث قائم الزاویه قرار گرفته و یک رأس آن روی وتر مثلث قرار دارد. مقدار t را حساب کنید.



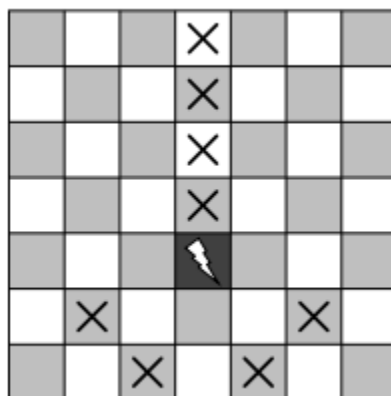
مسئله بیست و چهارم. کوچک ترین مقدار ممکن را برای عدد طبیعی n طوری پیدا کنید که عدد $11 \cdot 19 \cdot n$ برابر با حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی باشد.

مسئله بیست و پنجم. یک نیم دایره به مرکز C و قطر AB را در نظر بگیرید. نقطه P روی پاره خط AB دارای ویژگی زیر است: یک اشعه P از نقطه P و در راستای عمود بر AB حرکت کرده و بر اساس قوانین بازتاب نور به نیم دایره در نقاط D و E برخورد می کند، به این معنا که $\angle DEC = \angle BEC$ ، $\angle PDC = \angle EDC$. در نهایت اشعه P ما به نقطه B برخورد خواهد کرد. زاویه $\angle DCP$ چند درجه است؟



مسئله بیست و ششم. در یک کشور 2020 شهر وجود دارند که با شماره های $1, 2, \dots, 2020$ نمایش داده می شوند. رئیس جمهور این کشور تصمیم دارد که شبکه ی حمل و نقل جاده ای را بسازد. برای صرفه جویی در هزینه ها، او تنها مسیر جاده را بین دو شهر a, b خواهد ساخت اگر $a < b$ و نیز عدد b مضربی از عدد a بوده و عددی مانند c که $a < c < b$ وجود نداشته باشد که c مضرب a باشد و b مضرب c باشد. شهر شماره ی 42 با چند شهر دیگر متصل خواهد بود؟

مسئله بیست و هفتم. مارک¹³ یک مهره ی شطرنج را با عنوان *بلیتزر*¹⁴ اختراع کرده است. همان طور که در شکل نمایش یافته است، بلیتزر می تواند مانند رخ به جلو رفته و مانند اسب به عقب برود. مارک این مهره را در خانه ی وسط صفحه ی شطرنجی 3×3 قرار داده است و این مهره را 2020 مرتبه مطابق الگوی از پیش گفته حرکت می دهد. حداکثر چند مرتبه این مهره از روی یک خانه گذر خواهد کرد؟ محل ابتدایی بلیتزر را به عنوان محل گذر حساب نکنید.



¹³ Marek

¹⁴ *blitzer*

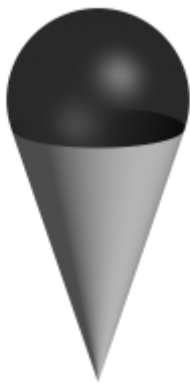
مسئله بیست و هشتم. دیوید¹⁵ می خواهد با یک حلزون در یک حلقه که نقطه ی آغاز و پایان آن یکی است مسابقه دهد. آن ها در یک زمان شروع به حرکت کردند، در یک جهت دویدند و در پایان همدیگر را ملاقت کردند. از آن جایی که حلزون سریع تر بود، تعداد دور های بیش تری را نسبت به دیوید- که تنها سه دور زده بود- زده بود. این دو با احتساب ملاقات در نقاط آغاز و پایان، 2020 مرتبه همدیگر را ملاقات کرده بودند. در روز بعدی، آن ها در همان مسیر مسابقه داند اما دیوید جهت حرکت خود را تغییر داد ولی سرعت آن ها دقیقاً مانند دفعه ی قبلی بود. آن ها این بار چند مرتبه ملاقات کرده اند؟

¹⁵ David

مسئله بیست و نهم. نوح¹⁶ یک بازی ای را انجام می دهد، به طوری که سه گونه شیء را جمع آوری می کند: پشתיبانی، حمله، و دفاع. هر یک از این ها را می تواند از 1 تا 10 شماره گذاری کند. هم چنین می تواند دو شیء متمایز را از یک سطح (شماره) با هم ترکیب کند تا بتواند شیء ای از نوع سوم و با سطح بالاتر بدست آورد. به طور مثال، یک شیء دفاعی از سطح 3 را با یک شیء پشתיبانی از سطح 3 ترکیب کند تا یک شیء حمله ای را از سطح 4 بدست آورد. فرض کنیم نوح یک منبع لایزال از اشیاء دفاعی و پشתיبانی داشته باشد؛ وی چه تعداد شیء حمله ای از سطح 1 را بایستی جمع آوری کند تا بتواند یک شیء حمله ای را از سطح 10 بدست آورد؟

¹⁶ Noah

مسئله سی ام. جوزپه¹⁷ یک بستنی قیفی خریده است. این بستنی به شکل یک کره با شعاع 4 cm می باشد. جوزپه متوجه می شود که کره بستنی شکل در یک مخروط به این شکل قرار گرفته است: مرکز کره دقیقاً 2 cm بالای قاعده ی مخروط قرار گرفته و سطح جانبی مخروط دقیقاً درجایی که بر کره مماس می شود به پایان می رسد. حجم مخروط چند سانتی مترمکعب است؟

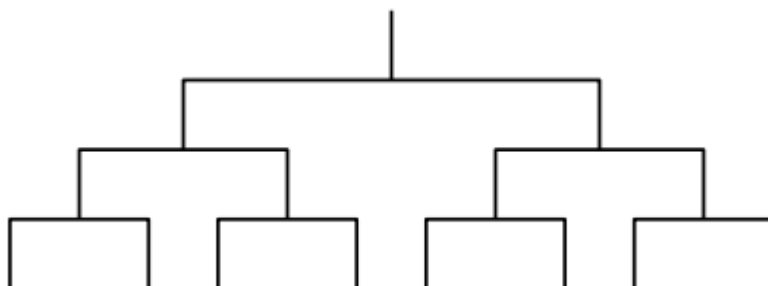


¹⁷ Giuseppe

مسئله سی و یکم. با استفاده از هریک از ارقام $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ و استفاده ی دقیقاً یک بار از آن ها، باب¹⁸ دو عدد چهار رقمی را می سازد. وی این دو عدد را باهم جمع می کند. حداکثر مقدار ممکن را برای مجموع ارقام این حاصل جمع پیدا کنید.

¹⁸ Bob

مسئله سی و دوم. در یک تورنمنت تنیس یک حذفی¹⁹ هشت بازیکن به طور تصادفی در هشت جای گاه پایین شکل زیر قرار گرفته اند. طبق نمودار زیر سه دور مسابقه برگزار می شود و هم واره برنده ی مسابقه به دور بالاتر خواهد رفت. درتورنمت ما دو بازیکن حرفه ای و شش بازیکن آماتور حضور دارند که یکی از آن ها بونو²⁰ نام دارد. هر بازیکن حرفه ای هم واره یک بازیکن آماتور را شکست خواهد داد و هریک از دو بازیکن حرفه ای و یا هر دو بازیکن آماتور از توانایی های یکسانی برخوردار هستند. احتمال این که بونو در فینال بازی کند چند است؟



¹⁹ single-elimination tennis tournament

²⁰ Bono

مسئله سی و سوم. عددهای

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$$

روی تخته سیاه نوشته شده اند. در هر گام، دو تا از آن ها را مثل a, b انتخاب کرده، آن ها را پاک می کنیم و عدد

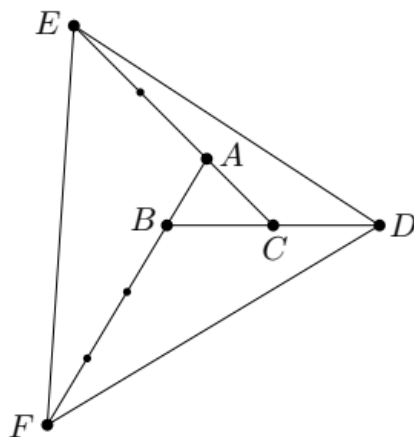
$$\frac{ab}{a + 2ab + b}$$

را به جای آن روی تخته می نویسیم. این فرایند را ادامه می دهیم تا زمانی که دقیقاً یک عدد روی تخته سیاه باقی بماند. همه ی مقادیر ممکن را برای این عدد نهایی پیدا کنید.

مسئله سی و چهارم. در مثلث ABC به مساحت 1، مطابق شکل، نقطه های D, E, F را در امتداد BC, AC, AB طوری انتخاب می کنیم که:

$$BD = 2BC, CE = 3CA, AF = 4AB,$$

مساحت مثلث DEF را پیدا کنید.



مسئله سی و پنجم. جمع آوری کنندگان مالیات سلطنتی سه پاکت که هریک شامل 100 سکه ی طلا می باشند را جمع آوری کرده اند. هر سکه در پاکت های اول، دوم، و سوم به ترتیب 11، 12، 13 گرم وزن دارد. متأسفانه، برچسب های روی پاکت ها گم شده اند. پادشاه مقیاسی دارد که وزن را حداکثر تا N گرم که N عددی طبیعی است نشان می دهد. اگر وزن پاکت بیش تر از N گرم باشد، همان N گرم را نمایش خواهد داد. پادشاه می خواهد بداند هر پاکت حاوی چه نوع سکه هایی هست و این کار را از طریق گرفتن تعدادی از سکه ها و وزن کردن تکی آن ها انجام خواهد داد. حداقل مقدار N چه باشد تا چنین کاری هم واره ممکن باشد؟

مسئله سی و ششم. اما²¹ تصمیم گرفته است که رژیم آناناس بگیرد. هر روز و در ساعت 1 بعداز ظهر وی بررسی می کند که چه تعداد آناناس برایش باقی مانده است. اگر دست کم یک عدد آناناس داشته باشد، وی آن را میل خواهد کرد. درغیراین صورت، به جای آن او یک عدد آناناس بیش از آنچه هر روز قبل داشته است خواهد خرید. وی اولین آناناس خود را در ساعت 1 بعد از ظهر روز نخست خریداری کرده است. وی در ساعت 2 بعداز ظهر روز 2020 چه تعداد آناناس خواهد داشت؟

²¹ Emma

مسئله سی و هفتم. جو یک مزرعه دار است و در مزرعه اش خوک پرورش می دهد. وی یک مزرعه به مساحت 252 m^2 را برای حیوانات جوان خود خریده است. مزرعه ی وی دارای مرزهای قابل انعطاف و جابجایی می باشد و تشکیل 16 خانه ی مستطیل شکل می دهند. این مرزها تنها می توانند موازی مرزهای بیرونی یعنی در عرض و طول مزرعه حرکت کنند. جو، مرزهای تقسیمی را به گونه ای جابجا کرده است که مساحت برخی از خانه ها در شکل آمده اند. جو، به عنوان یک ریاضی دان مبتدی، هم واره در تلاش است که طول ضلع خانه ها عددی طبیعی باشد. همه ی مقادیر ممکن را برای مساحت خانه ی موجود در گوشه بالا سمت راست پیدا کنید.

24			?
18		12	
			12
30	10		

مسئله ی سی و هشتم. دانیل و فیلیپ روی یک تکه کاغذ شطرنجی با خانه های 1×1 هردو دایره ای را رسم می کنند. هر دایره دقیقاً از سه نقطه از راس های خانه ها گذر می کند. شعاع دایره ی دانیل برابر با $\frac{5}{4}$ و شعاع دایره ی فیلیپ کوچک تر از آن است. شعاع دایره ی فیلیپ چند است؟

مسئله ی سی و نهم. هفت شیطونک، هفت عدد کلاه به رنگ های متمایز را بر سردارند. یک رمز شیرانه ی رنگی می خواهد طلسمی را طراحی کند تا رنگ کلاه ها تغییر کنند به طوری که:

یکم. رنگ جدید هر کلاه تنها به رنگ پیشین آن وابسته باشد، به فردی که آن را بر سر دارد یا به این که سایر کلاه ها چطوری هستند وابسته نباشد،

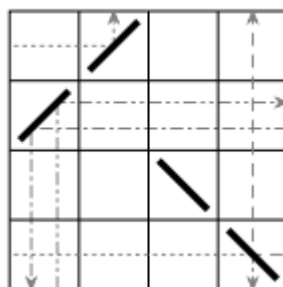
دوم. پس از آن که طلسم اثر کرد، رنگ هفت کلاه اصلی هنوز وجود داشته باشند، و

سوم. هنگامی که یک طلسم تغییر رنگ دو یا سه مرتبه روی شیطانک ها اجرا شد، هیچ یک از شیطانک ها کلاهی به رنگ اصلی خود را بر سر نداشته باشند.

چند نوع طلسم مختلف می توانیم داشته باشیم؟

مسئله چهارم. مری یک قفل ترکیبی دارد که یک قفل معمولی نیست، زیرا روی هر یک از حلقه هایش تعداد متمایزی از عددها نوشته شده اند. روی حلقه ی اول عددهای 0 تا 4 نوشته شده اند، روی حلقه ی دوم عددهای 0 تا 6 نوشته شده اند، روی حلقه ی سوم عددهای 0 تا 10 نوشته شده اند، و روی حلقه ی چهارم عددهای 0 تا 9 نوشته شده اند. مری می داند که عدد رمز 0,0,0,0 را بگذارد و شروع به دوران هم زمان هر یک از حلقه ها نماید (به طوری که رمز بعدی 1,1,1,1 خواهد شد)، ناگهان به ترکیبی از عددها خواهد رسید که با 5,1 به اتمام می رسند. وی هم چنین می داند که هنگامی که این اتفاق برای بار دوم بیفتد، رمز قفل پیدا خواهد شد. این رمز چه خواهد بود؟

مسئله چهل و یکم. در برخی از خانه های یک جدول 4×4 چهار آئینه ی دو طرفه به طور قطری قرار گرفته اند. از هریک از شانزده پاره خطی که در مرز جدول قرار دارند، یک پرتو نور عمود بر آن پاره خط ساطع می شود. این پرتو مستقیم حرکت می کند و پس از برخورد به آینه به صورت 90° منحرف می شود. می دانیم انتها و ابتدای دقیقاً چهار عدد از این پرتو ها در پایین و سمت راست جدول قرار دارند، ابتدا و انتهای چهار پرتو دیگر در بالا و سمت راست جدول، انتها و ابتدای دقیقاً چهار پرتو دیگر در بالا و چپ، و در نهایت انتها و ابتدای دقیقاً چهار پرتو در پایین و چپ قرار دارند. برای چند آرایش از آئینه ها چنین چیزی امکان خواهد داشت؟ (تصویر زیرین یکی از این آرایش ها را نشان می دهد.)



مسئله چهل و دوم. اگر $x_1 = 2020$ و x_n برابر با حاصل ضرب x_{n-1} و عدد اولی مثل p باشد که کوچک ترین عدد اولی است که شمارنده ی x_{n-1} نبوده و در نتیجه x_n بر همه ی عددهای اول کوچک تر از p بخش پذیر باشد. تعداد شمارنده های اول متمایز x_{2020} را پیدا کنید.

مسئله چهل و سوم. میانه های مثلث ABC آن را به شش زیر-مثلث تقسیم می کنند. مراکز ثقل این مثلث ها راس های شش ضلعی $DEFGHI$ می باشد. نسبت مساحت شش ضلعی $DEFGHI$ به مثلث ABC را پیدا کنید.

مسئله چهل و چهارم. اگر $a_1, a_2, \dots$ دنباله ای از عددهای حقیقی باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی m داشته باشیم:

$$a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$$

حاصل عبارت $a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}$ را حساب کنید.

مسئله چهل و پنجم. ساندرا²² چهار ریسمان یکسان را در دست خود دارد به نحوی که دو سر هر ریسمان بر دو طرف دست وی قرار دارند. او از ویل می خواهد تا این دوانتها را به طور تصادفی ببندد تا زمانی که تنها یک سر در هر سمت از دست ساندرا باقی مانده باشد. می توانیم حداکثر دو انتهای ریسمان ها را ببندیم. به چه احتمالی به یک رشته به هم پیوسته از ریسمان ها می رسیم که شبیه یک طناب طولانی است؟

²² Sandra

مسئله چهل و ششم. یک عدد را 2-اول می نامیم اگر هر زوج مرتب از رقم های متوالی اش یک عدد اول دو رقمی متمایز را بسازند. به طور مثال 237 عددی 2-اول است ولی 136 و 1313 چنین نیستند. بزرگ ترین عدد 2-اول را پیدا کنید.

مسئله چهل و هفتم. نقطه ی O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می باشد. نقطه های D, E را به ترتیب روی پاره خط های AB, AC طوری انتخاب می کنیم که O وسط DE باشد. اگر $AD = 8, BD = 3, AO = 7$. طول پاره خط CE را پیدا کنید.

مسئله چهل و هشتم. یک مستطیل 7×24 به مستطیل های 1×1 تقسیم شده است. یکی از قطرهای آن مثلث هایی را ایجاد کرده است. مجموع محیط این مثلث ها را پیدا کنید.

مسئله چهل و نهم. عدد طبیعی n را بالا رونده می نامیم اگر بتوانیم از هریک از طبقات یک ساختمان فروشگاهی 8787 طبقه به دیگری رسید درحالی که تنها می توانیم 2020 طبقه بالا برویم یا n طبقه پایین بیاییم. بزرگ ترین عدد طبیعی بالارونده را پیدا کنید.

تذکر: منظور از یک ساختمان فروش گاهی k طبقه، ساختمانی با k طبقه روی زمین و یک طبقه ی همکف می باشد.

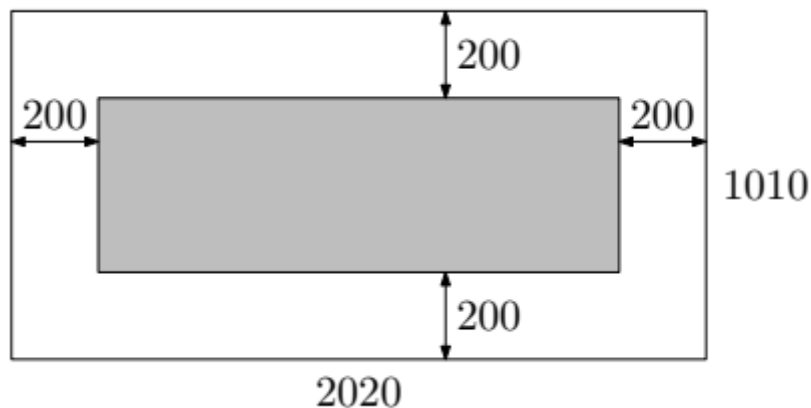
مسئله پنجاهم. در محاسبه ی

$$\begin{array}{rcccccc} & & & R & E & D \\ + & & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

حروف متمایز نمایش گر رقم های متمایز هستند. هیچ یک از چهار عدد بالا با صفر شروع نمی شوند. هم چنین، می دانیم *BLUE* مربع کامل است. عددپنج رقمی *BROWN* را بیابید.

مسئله پنجاه و یکم. کوچک ترین عدد طبیعی $k > 1$ را طوری پیدا کنید که هیچ عدد طبیعی k رقمی مثل n وجود نداشته باشد که هر رقم آن فرد بوده و $S(S(n)) = 2$ ، می دانیم $S(x)$ جمع ارقام عدد طبیعی x می باشد.

مسئله پنجاه و دوم. مارتین²³ یک صفحه شطرنجی را خریده که داخل مستطیلی که شامل 2020×1010 مربع است قرار دارد. مطابق شکل، یک مستطیل از صفحه جدا شده است. او روی هر خانه ی صفحه ی شطرنجی یک حشره را قرار داده است. اما برخی از حشرات تب دارند. برای این که وضعیت وخیم تر شود، این تب بسیار بسیار مسری است: هر حشره ای که در یک خانه قرار دارد که همسایه ی دست کم دو خانه است که حشره های تب دار در آن قرار دارند، تب خواهد کرد. (گوییم دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترک داشته باشند.) حداقل مقدار حشره های لازم برای این که همه ی حشره ها را مبتلا کنند، چند است؟ حشره ها حرکت نخواهند کرد.



مسئله ی پنجاه و سوم. یک عدد طبیعی $25!$ شمارنده ی مثبت دارد. حداکثر چندتا از آن ها می توانند توان پنجم عددی اول باشند؟

توجه: $n!$ برابر با حاصل ضرب عددهای طبیعی کم تر یا مساوی n می باشد.

مسئله پنجاه و چهارم. عددهای حقیقی و مثبت x, y, z در معادله های زیر صدق می کنند:

$$x^2 + xy + y^2 = 1,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 2,$$

$$z^2 + zx + x^2 = 3.$$

مقدار عددی $xy + yz + zx$ را پیدا کنید.

مسئله پنجاه و پنجم. اگر I, O به ترتیب مراکز دایره های محیطی و محاطی مثلث ABC باشند به طوری که

$$AB = 495, AC = 977$$

و نیز بدانیم $\angle AIO = 90^\circ$. طول BC را پیدا کنید.

مسئله پنجاه و ششم. همه ی سه تایی های (a, b, c) را از عددهای طبیعی طوری پیدا کنید که:

$$3abc = 2a + 5b + 7c.$$

مسئله پنجاه و هفتم. در یک میهمانی، هر میهمان دقیقاً دوست چهارده میهمان دیگر (به جز خودش) می باشد. هر دو دوست دقیقاً شش دوست مشترک دیگر دارند که در میهمانی حاضر شده اند، هم چنین هر زوج مرتب از کسانی که دوست نیستند دقیقاً دارای دو دوست مشترک هستند. تعداد افراد شرک کننده در این میهمانی چند تاست؟

مسئله پنجاه و هشتم. نقطه ی P داخل مثلث ABC قرار گرفته است. اگر

$$AB = \sqrt{3}, BP = 5, CP = 2, AB:AC = 2:1, \angle BAC = 60^\circ,$$

مساحت مثلث ABC چند است؟

مسئله پنجاه و نهم. اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ یک چند جمله ای باضریب های صحیح نامنفی باشد به طوری که

$$P\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right) = 2020,$$

حداقل مقدار عبارت $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ را پیدا کنید.