1. Feladat Ha négy különböző pozitív egész szám átlaga 10, akkor mekkora ezen számok bármelyikének lehető legnagyobb értéke?

Eredmény. 34

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyik szám a lehető legnagyobb legyen, a többi számnak a lehető legkisebbnek kell lennie. Mivel a számok különbözőek, ezért a három legkisebb lehetséges érték az 1, a 2 és a 3. Ahhoz, hogy a számok átlaga 10-zel legyen egyenlő, vagyis az összegük $4 \cdot 10 = 40$-nel legyen egyenlő, a negyedik szám $40 - (1 + 2 + 3) = 34$ kell, hogy legyen.

2. Feladat Ha az $x^2 + mx + 2020 = 0$ másodfokú egyenlet egyik megoldása 4, és m egy egész szám, akkor mi az egyenlet másik megoldása?

Eredmény. 505

Megoldás. Mivel 4 gyöke az egyenletnek, így $4^2 + 4m + 2020 = 0$ és $m = -509$, tehát $x^2 - 509x + 2020 = 0$ az egyenletünk, amelynek megoldásai 4 és 505.

Másképpen, ha s-sel jelöljük az egyenlet másik megoldását, akkor

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s$$

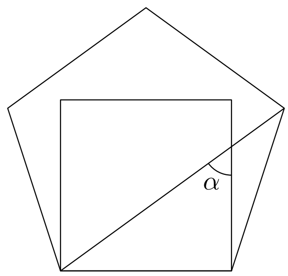
és összehasonlítva az együtthatókat láthatjuk, hogy $4s = 2020$, vagyis $s = 505$.

3. Feladat A 95-ös szám 4-et ad maradékul, miután elosztjuk egy pozitív egész N-nel. Mekkora N legkisebb lehetséges értéke?

Eredmény. 7

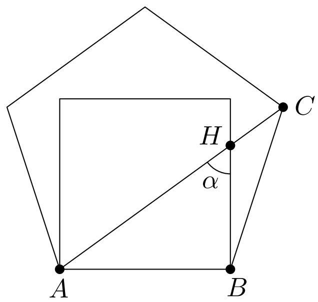
Megoldás. Tudjuk, hogy N nagyobb, mint 1, és $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$ osztója, tehát a legkisebb lehetséges értéke 7.

4. Feladat Egy négyzet és egy szabályos ötszög a képen látható módon helyezkednek el. Mekkora az α szög nagysága fokban kifejezve?



Eredmény. 54°

Megoldás. Nevezzük el a pontokat az ábrán!



Egy szabályos ötszög belső szöge 108°. Az ABC háromszög egyenlő szárú, és $ABC\sphericalangle = 108°$, tehát

$$BAH\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Mivel ABH egy derékszögű háromszög, amelynek a derékszöge a B csúcsnál van,

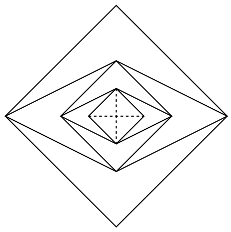
$$\alpha = AHB\sphericalangle = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

5. Feladat Egy buszmegállóban három vonal, A, B és C buszai járnak, amelyek rendre 12, 10, illetve 8 perces időközönként hagyják el a megállót. Amikor Brendon elsétált a megálló mellett, azt vette észre, hogy a három vonal három busza egyszerre hagyta el a megállót. Ettől a pillanattól számolva legközelebb hány perc múlva fog ez megint bekövetkezni?

Eredmény. 120

Megoldás. A percek száma mindhárom időköznek többszöröse kell legyen, így mivel a legkisebb ilyen számot keressük, a válasz a 8, 10, 12 számok legkisebb közös többszöröse, azaz 120.

6. Feladat A rombuszvirág a következő módon növekszik: a közepén van egy négyzet alakú virágzat, amelynek az átlói 1 egység hosszúak. Az első lépésben megkétszereződik a vízszintes átló hossza és létrejön egy új négyszög. A következő lépésben a függőleges átló hossza kétszereződik, és megint keletkezik egy új négyszög alakú virágzat. Ez a folyamat hasonló módon egészen addig folytatódik, amíg a virágnak öt négyszög alakú virágzata nem lesz. Mekkora a legkülső (ötödik) virágzat kerülete?



Eredmény. $8\sqrt{2}$

Megoldás. Az ötödik virágzat egy négyzet, amelynek az átlói 4 egység hosszúak, tehát az oldalak hossza $2\sqrt{2}$, azaz a kerülete $8\sqrt{2}$.

7. Feladat Egy botanikus ültetett két, azonos fajból származó növényt: P_1-et P_2-t, és megmérte a magasságukat. Egy hét után, ami alatt a két növény ugyanakkora százalékkal nőtt, a botanikus megmérte őket megint, és azt látta, hogy P_1 most akkora, mint P_2 volt egy héttel korábban, továbbá P_2 most 44%-kal nagyobb, mint P_1 volt egy héttel korábban. Hány százalékkal növekedtek a növények ezen a héten?

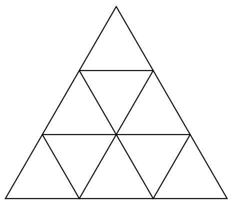
Eredmény. 20%

Megoldás. Jelölje P_1 és P_2 a növények kezdeti magasságát. Mivel egy hét alatt azonos százalékkal nőtt a magasságuk, így most a magasságaik rendre kP_1 és kP_2, alkalmas $k > 1$ számra, ahol $(k-1)\cdot 100\%$ a keresett százalék. Ekkor

$$kP_1 = P_2,$$
$$\frac{kP_2}{P_1} = 1{,}44.$$

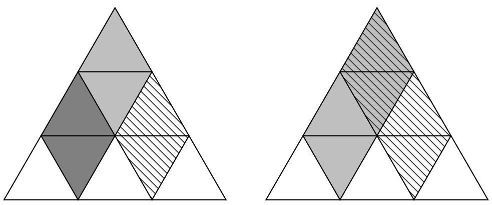
A második egyenletbe P_2-t helyettesítve kapjuk, hogy $k^2 = 1{,}44$, vagyis $k = 1{,}2$, ami azt jelenti, hogy a növények 20%-kal nőttek.

8. Feladat Hány paralelogramma található az alábbi ábrán?



Eredmény. 15

Megoldás. A nagy háromszög mindhárom csúcsának esetében létezik három rombusz, amely a csúccsal „egy irányba mutat”, és két 1×2 egység oldalú paralelogramma, amelyeknek része az adott csúcs. Az alábbi ábrán láthatóak ezek a paralelogrammák a felső csúcs esetén.



Más paralelogrammák nem találhatók az ábrán, így összesen $3 \cdot (2+3) = 15$ paralelogramma van.

9. Feladat Egy buszos cégtől 27, illetve 36 fős buszokat lehet bérelni. Egy 505 fős turistacsoport a cég buszaival szeretne utazni. A cég úgy választja ki a buszokat, hogy az üresen maradó ülések száma a lehető legkevesebb legyen. Ekkor hány ülés marad szabadon?

Eredmény. 8

Megoldás. A legkisebb olyan $s \geq 505$ számot keressük, ami előáll $s = 27x + 36y$ alakban, ahol x és y rendre a 27 üléses, illetve a 36 üléses buszok számát jelöli. Mivel 27 és 36 legnagyobb közös osztója a 9, így s 9 többszöröse kell legyen. 9 legkisebb olyan többszöröse, amely nagyobb vagy egyenlő 505-tel, az 513. 513 felírható úgy, mint $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$, ebből pedig következik, hogy az üres ülések minimális száma $513 - 505 = 8$.

10. Feladat Egy állatbarát vett két teljesen azonos, farkast ábrázoló képet és négy teljesen azonos, rókát ábrázoló képet. A képeket szeretné kiakasztani egymás mellé egy sorba a nappaliban, és minden nap meg akarja változtatni a sorrendjüket oly módon, hogy az különbözzön a korábbi napok sorrendjeitől. Ezen felül nem szeretné, ha a két kép a farkasról egymás mellé lenne kiakasztva. Legfeljebb hány napon keresztül teheti ezt meg?

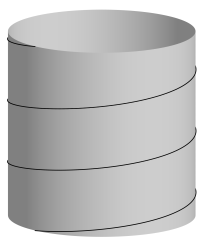
Eredmény. 10

Megoldás. Más szavakkal, azt keressük, hogy hányféleképpen lehet a képeket sorba rendezni úgy, hogy a két farkas ne kerüljön egymás mellé. A bal oldali farkas a 6 lehetséges pozícióból az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es pozíciókba kerülhet, és az egyes esetekben a jobb oldali farkas a következő helyzetekben lehet:

$$\begin{aligned} &1 : 3, 4, 5, 6 \\ &2 : 4, 5, 6 \\ &3 : 5, 6 \\ &4 : 6, \end{aligned}$$

így összesen 10 ilyen sorrend létezik.

11. Feladat Adott egy henger, melynek magassága 18 cm és alapjának kerülete 8 cm. A hengert háromszor szorosan körbetekerték egy zsinórral az ábrán látható módon, mégpedig úgy, hogy a zsinór felső végpontja pontosan az alsó végpont felett van. Mekkora a zsinór hossza centiméterben?



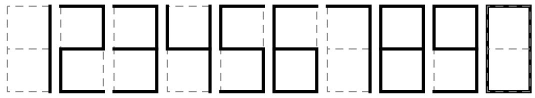
Eredmény. 30

Megoldás. A hengerpalástot kiterítve láthatjuk, hogy minden egyes körbetekeredés alatt a zsinór 6 cm-rel emelkedik, míg a vízszintes irányú haladása megegyezik az alap kerületével, azaz 8 cm-rel. Így a Pitagorasz-tétel alapján az egy körbetekeredéshez tartozó zsinórszakasz hossza

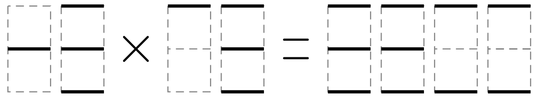
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\mathrm{cm}.$$

Mivel a zsinór háromszor tekeredik körbe a hengeren, az összhossza 30 cm.

12. Feladat Egy jól működő számológép a számjegyeket a következő módon írja ki:



Ádám számológépe kiesett az ablakon, és most már csak a vízszintes vonalakat mutatja. Ki akarta próbálni, hogy a számológép még mindig helyesen számol-e, ezért a következő számítást végezte el vele:



Mi a számításban szereplő számjegyeknek az összege?

Eredmény. 33

Megoldás. Az utolsó két jegynek nullának kell lennie. Továbbá az első tényező első jegye mindenképp 4-es, a második tényező első jegye pedig mindenképp 7-es. Mivel a szorzat 100-zal, és így 25-tel is osztható, ezért valamelyik tényezőnek 25-tel, vagy mindkettőnek 5-tel oszthatónak kell lennie. Az első tényezőben a 4-es nem egészíthető ki 25-tel osztható kétjegyű számmá, így a második tényező osztható 5-tel, azaz értéke 75. Illetve mivel a szorzat 4-gyel osztható, az első tényezőnek is 4-gyel oszthatónak kell lennie, vagyis csak 48 lehet. Így Ádám a $48 \cdot 75 = 3600$ szorzást végezte el, melyben a jegyek összege 33.

13. Feladat Ödönnek össze kellett adnia két számot, de véletlenül egy plusz számjegyet írt az egyik szám végére. Így 44444-et kapott eredményül 12345 helyett. Mekkora volt a kisebbik a két szám közül, amelyeket Ödönnek eredetileg össze kellett volna adnia?

Eredmény. 3566

Megoldás. Legyen az eredeti két szám x és y, melyek közül Ödön mondjuk az x-hez hozzáírta a c számjegyet. Ekkor

$$x + y = 12345 \quad \text{és} \quad (10x + c) + y = 44444,$$

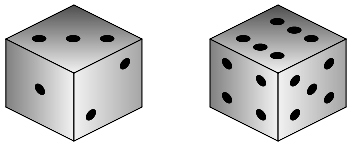
ezeket kivonva egymásból

$$9x + c = 32099.$$

Mivel $32099 - c$ osztható kell, hogy legyen 9-cel, c-nek 5-nek kell lennie. Innen $x = 3566$ és $y = 8779$.

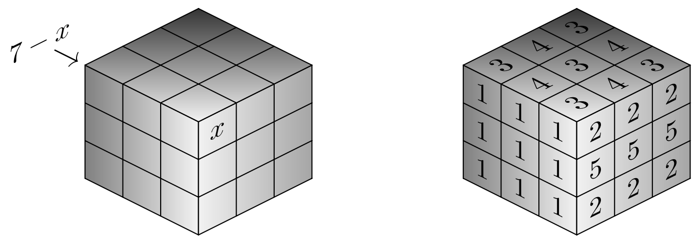
14. Feladat Peti kapott 27 szabályos dobókockát és azt kérték tőle, ragasszon össze belőlük egy nagyobb, $3 \times 3 \times 3$ kockát úgy, hogy a szomszédos (egymással összeragasztott) lapokon ugyanannyi pont legyen. Legfeljebb hány pont maradhat látható a $3 \times 3 \times 3$ kocka külsején?

Megjegyzés: Az alábbi ábrán egy szabályos dobókockát láthatunk kétféle nézetből. Egy szabályos dobókockán az átellenes lapokon lévő pontok összege minden esetben 7.

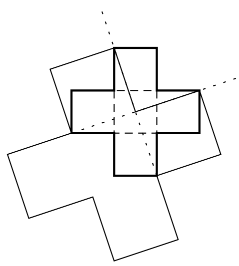


Eredmény. 189

Megoldás. Vegyük észre, hogy a nagy kocka átellenes lapjain az egymással szemben lévő dobókockalapok összege mindig 7 (lásd bal oldali ábra). Az egész kocka felszínén 27 ilyen párba állíthatók a dobókockalapok, így teljesen mindegy, hogy Peti hogyan ragasztja össze a kockákat, a látható pontok összege mindig $27 \cdot 7 = 189$ lesz. Egy lehetséges konstrukció a jobb oldali ábrán látható.

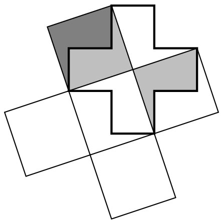


15. Feladat Antónia rajzolt egy kis kereszt alakú pentominót, mely 5 egybevágó négyzetből áll. Majd pontozott vonallal berajzolta ennek a pentominónak két egymásra merőleges átlóját (lásd ábra). Végül az ábrán látható módon rajzolt egy nagyobb kereszt alakú pentominót, melynek két szomszédos oldala a pontozott átlókra illeszkedik. Hogyan aránylik a nagy pentominó területe a kicsiéhez?



Eredmény. 5 : 2.

Megoldás. Az átlók négy egybevágó részre osztják a kis kereszt alakú pentominót. Továbbá két ilyen rész összeragasztásával megkapjuk a nagyobb pentominó egyik négyzetét, az ábrán látható módon. Így a nagyobbik pentominót feloszthatjuk tíz egybevágó részre, a pentominók területének aránya pedig $10 : 4 = 5 : 2$.



16. Feladat Hány olyan palindrom szám van 10^3 és 10^7 között, melyben a számjegyek összege páros?

Megjegyzés: Egy pozitív egész számot *palindromnak* nevezünk, ha odafelé és visszafelé olvasva ugyanaz, tehát például a 12321 palindrom.

Eredmény. 5940

Megoldás. 10^3 és 10^4 között minden számnak páros számú számjegye van, így az ebben a tartományban lévő összes palindrom számjegyeinek összege páros. Továbbá az ebben a tartományban található palindromok mind $\overline{abba}$ alakúak, ahol a és b bármilyen számjegy lehet azzal a kikötéssel, hogy a nem nulla, ami alapján megállapítható, hogy ebben a tartományban pontosan 90 palindrom található. Hasonló módon következtethetünk arra is, hogy 10^5 és 10^6 között pontosan 900 palindrom szám van, és közülük mindegyik számjegyeinek összege páros.

A 10^4 és 10^5 közötti palindromok alakja rendre $\overline{abcba}$, ahol a, b és c bármilyen számjegy lehet azzal a kikötéssel, hogy a nem nulla, és számjegyeik összege akkor és csak akkor páros, ha c páros. Így az a helyére 9-féle szám kerülhet, a b helyére 10, a c helyére pedig 5, ami azt jelenti, hogy $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ keresett palindromot találunk ebben a tartományban. Hasonló módon kiszámolhatjuk, hogy a 10^6 és 10^7 közötti tartományban 4500 olyan palindrom található, melyben a számjegyek összege páros.

Következtetésképp a 10^3 és 10^7 közötti palindromok közül $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$-ről mondható el, hogy számjegyeinek összege páros.

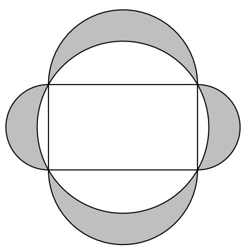
17. Feladat Egy kórus 60 énekesnőből áll: közülük 20-an szoprán, 20-an mezzoszoprán és 20-an alt hangfekvésűek. Minden hangfekvésben van 6 rendkívül tehetséges énekesnő, akik bármelyik szólamot képesek énekelni (ha a helyzet úgy kívánja). A többiek csak a saját hangjuknak megfelelő szólamot tudják énekelni. Mekkora az a lehető legnagyobb S szám, melyre igaz az, hogy ha bármely S énekes megbetegszik, a maradék énekesek mindenképp át tudnak rendeződni úgy, hogy mindhárom szólamot legalább 10-en alkossák?

Eredmény. 22

Megoldás. Ha például az összes alt és további három „tehetséges” énekesnő megbetegszik, akkor csak kilenc tehetséges énekes marad, vagyis nem lehetne tízfős az alt szólam. Tehát $S < 23$.

Másrészről ha az énekesek egy része megbetegszik, a legrosszabb helyzet akkor áll fenn, hogyha a megbetegedők a lehető legnagyobb számban a „tehetséges” énekesek közül kerülnek ki „átlagos” képességű társaik helyett. Ezáltal, ha 22 énekes megbetegszik, feltételezhetjük, hogy közülük 18-an rendkívül tehetségesek (mindhárom szólamból az összes) és mindössze 4 „átlagos” képességű énekes betegszik meg, ebből következik, hogy legalább tíz énekes marad minden szólamban, hiszen $20 - 6 - 4 = 10$. Így $S \geq 22$, tehát $S = 22$.

18. Feladat Egy körbe beírtunk egy téglalapot, amelynek oldalhosszai 3 és 4. Továbbá a téglalap oldalaira kifelé emeltünk egy-egy félkört (lásd ábra). A szürke rész a félkörök azon pontjaiból áll, melyek a körön kívülre esnek. Mekkora a szürkére színezett rész területe?



Eredmény. 12

Megoldás. A Pitagorasz-tétel megadja egy derékszögű háromszög oldalai fölé írt négyzetek területének arányát. Ugyanez az arányosság érvényes félkörökre is, melyet jelen esetben a beírt téglalap oldalaira és egyik átlójára alkalmazunk. Vagyis a fehér kör területének fele megegyezik a téglalap oldalaira írt félkörök területének összegével. Ebből következik, hogy bármely két szomszédos szürke terület összege megegyezik a téglalap területének felével, hiszen a két félkörből ugyanannyit vesz el az eredeti körív, mint amennyi ugyanezen kör téglalapátlóval lemetszett feléből a téglalapon kívülre esik. Ezáltal a teljes szürkére színezett rész területe egyenlő a téglalap területével, ami $3 \cdot 4 = 12$.

19. Feladat Melyik a legnagyobb olyan háromjegyű p_1 prím, melyben a számjegyek összege egy kétjegyű p_2 prím, és p_2 számjegyeinek összege egy egyjegyű p_3 prím?

Eredmény. 977

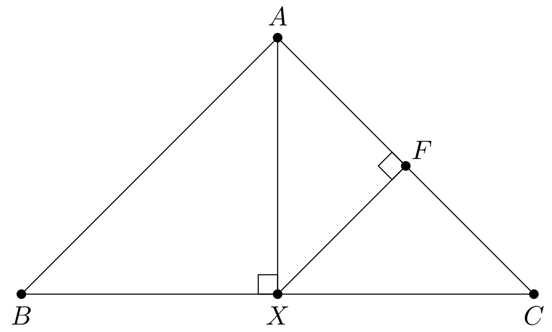
Megoldás. Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege legfeljebb $9 + 9 + 9 = 27$. Öt darab 27-nél nem nagyobb kétjegyű prímszám létezik, ezek 11, 13, 17, 19 és 23. Ezen prímek számjegyeinek összege rendre 2, 4, 8, 10 és 5. Így a két lehetőség $p_2 = 11$ vagy $p_2 = 23$. A legnagyobb háromjegyű prímszám, melyben a számjegyek összege 23, a 977; a legnagyobb háromjegyű prímszám, melyben a számjegyek összege 11, a 911. Mivel $977 > 911$, a keresett szám a 977.

20. Feladat Az ABC háromszögben $AB = AC$. Tudjuk, hogy a háromszögben ki tudunk választani egy oldalfelező merőlegest és egy magasságvonalat úgy, hogy a két egyenes egyetlen pontban messe egymást, és ez a pont a kerületre essen. Mekkorák az $ACB\sphericalangle$ lehetséges értékei?

Eredmény. $45°$, $67.5°$

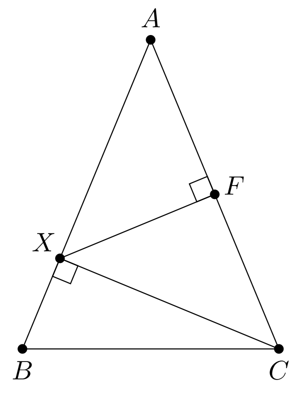
Megoldás. Jelöljük az egyenesek metszéspontját X-szel, az AC szakasz felezőpontját pedig F-fel. Figyeljük meg, hogy az X-en keresztülhaladó magasságvonalnak ahhoz az oldalhoz kell tartoznia, amelyen X található. Vizsgáljuk meg X minden lehetséges elhelyezkedését!

Ha X a BC oldalra esik, akkor nevezett X az A ponthoz tartozó magasságvonal és az egyik szár oldalfelező merőlegesének metszéspontja. Az ABC háromszög szimmetriájából arra következtetünk, hogy ez a magasságvonal megegyezik a BC oldalfelező merőlegesével, tehát az metszéspontot a másik két oldalfelező merőleges egyike határozza meg. A szimmetriából az is következik, hogy a magasságvonal az AB és AC oldalak felező merőlegeseit is egy ugyanazon pontban metszi.



Mivel FX az AC oldal felező merőlegese, az AXC háromszög egyenlő szárú. Továbbá tudjuk, hogy $AXC\sphericalangle = 90°$, így $ACB\sphericalangle = ACX\sphericalangle = 45°$.

Ha X az AB oldalra esik, akkor a C ponthoz tartozó magasságvonalnak és az AC oldal felező merőlegesének metszéspontja kell, hogy legyen.



Mint az előző esetben, az AXC háromszög itt is egyenlő szárú és derékszögű, az X-nél lévő derékszöggel, ami azt jelenti, hogy $BAC\sphericalangle = XAC\sphericalangle = 45°$. Így ebben az esetben

$$ACB\sphericalangle = \frac{1}{2}(180° - BAC\sphericalangle) = 67.5°.$$

Ha X az AC oldalra esik, ugyanez a helyzet áll fenn.

21. Feladat Mennyi a 3599-es szám pozitív osztóinak összege?

Megjegyzés: Az osztók közé beszámítjuk az 1-et és a 3599-et is.

Eredmény. 3720

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60+1)(60-1) = 59 \cdot 61.$$

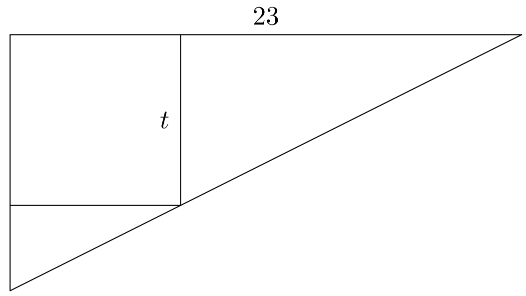
Belátható, hogy 59 és 61 prímszámok, így az eredmény $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

22. Feladat Három nővér, Betti, Kitti és Lotti a tábortűznél kolbászt sütöttek. Betti 17 sütnivaló kolbászt hozott, Kitti 11-et, Lotti viszont egyet sem. Miután mindent megettek, megegyeztek abban, hogy a költségeken egyenlően osztozkodnak. Így Lotti a két testvérének összesen 28 dollárt fizetett. Hány dollárt kapott ebből Betti?

Eredmény. 23

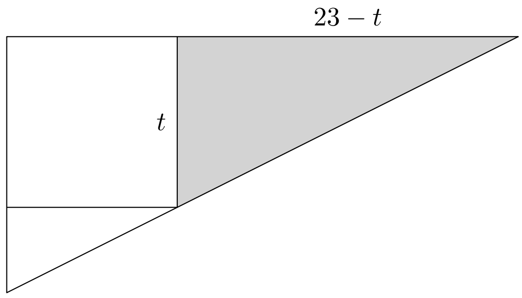
Megoldás. Lotti pontosan a költségek egyharmadát fizette ki, tehát a kolbászok összesen $28 \cdot 3 = 84$ dollárba kerültek. Betti a 28 kolbászból 17-et hozott, amiért $84 \cdot 17/28 = 51$ dollárt fizetett. Mivel a három nővér a költségek egyenlő elosztása mellett döntött, Bettinek csak 28 dollárt kellett volna fizetnie. Így testvérétől visszakapott $51 - 28 = 23$ dollárt.

23. Feladat Egy derékszögű háromszög befogói 11, illetve 23 egység hosszúak. Egy t oldalhosszú négyzetet írtunk a háromszögbe úgy, hogy annak két oldala a befogókra, egy csúcsa pedig az átfogóra illeszkedik (lásd ábra). Határozzuk meg t értékét!



Eredmény. $\frac{253}{34}$

Megoldás. Az ábrán látható szürke háromszög derékszögű és egyik szöge közös a nagy háromszöggel, így ez a két háromszög hasonló.



A két háromszög befogóinak hosszaránya megegyezik, ebből következik az alábbi egyenlet:

$$\frac{23-t}{t} = \frac{23}{11},$$

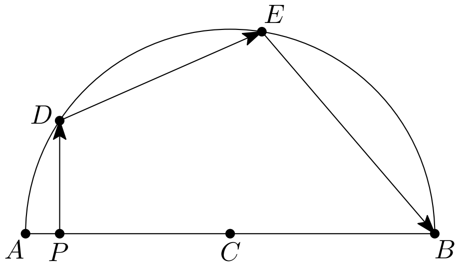
melynek megoldása $t = 253/34$.

24. Feladat Határozzuk meg azt a lehető legkisebb n pozitív egész számot, melyre a $11 \cdot 19 \cdot n$ szám három szomszédos egész szám szorzatával egyenlő.

Eredmény. 840

Megoldás. Mivel 11 és 19 prímszámok, a három szomszédos szám egyikének oszthatónak kell lennie 11-gyel, valamint egyiküknek, ami nem feltétlenül különbözik ettől, oszthatónak kell lennie 19-cel. Mivel a szorzatuk pozitív, mindhárom számnak pozitívnak kell lennie. Így a 11 és a 19 azon legkisebb pozitív többszöröseit keressük, melyek közt legfeljebb 2 a különbség. Ezek $3 \cdot 19 = 57$ és $5 \cdot 11 = 55$, így csak egy 56-os faktorral kell kiegészítenünk a szorzatot, hogy megkapjuk az $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$ egyenlőséget. Tehát a keresett szám 840.

25. Feladat Adott egy C középpontú, AB átmérőre emelt félkör. Az AB szakaszra eső P pontra teljesül, hogy ha onnan kiindítunk AB-re merőlegesen egy lézersugarat, az a félkör D és E pontjaiban visszaverődik (ahol a fizika törvényei alapján $PDC\sphericalangle = EDC\sphericalangle$ és $DEC\sphericalangle = BEC\sphericalangle$), majd éppen a B pontba érkezik. Határozzuk meg fokokban mérve a $DCP\sphericalangle$ nagyságát!



Eredmény. 36°

Megoldás. Nevezzük a $DCP\sphericalangle$-et x-nek. Mivel D és E is a C középpontú félkör ívére esnek, a $DCE\triangle$ egyenlő szárú, melynek alapja DE. A megadott $PDC\sphericalangle = EDC\sphericalangle$ egyenlőség alapján a $CDP\triangle$ egybevágó a $CDE\triangle$ felével (pontosabban $CDM\triangle$-gel, ahol M a DE szakasz felezőpontja). A második megadott egyenlőség nyomán következik, hogy $BCE\sphericalangle = ECD\sphericalangle = 2 \cdot DCP\sphericalangle (= 2x)$ és mivel ennek a három szögnek az összege egyenesszög, $x + 2x + 2x = 180° \Rightarrow x = DCP\sphericalangle = 36°$.

26. Feladat Egy országban 2020 város van, melyeket az $1, 2, 3, \ldots, 2020$ számokkal jelölnek. A miniszter úgy dönt, hogy vasúthálózatot épít, de a költséghatékonyság kedvéért csak az olyan a és b (ahol $a < b$) várospárok közé épül közvetlen összeköttetés, melyekre teljesül az alábbi feltétel: b többszöröse a-nak, és nincs olyan $a < c < b$ város, melyre c többszöröse a-nak és b többszöröse c-nek. Hány másik várossal áll a 42-es város közvetlen összeköttetésben?

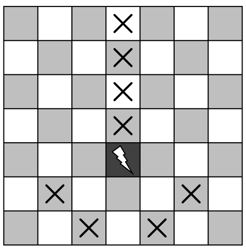
Eredmény. 18

Megoldás. Vegyünk két összeköttetésben lévő várost. Egyikük prímtényezős felbontásában eggyel több prímtényezőnek kell szerepelnie. Nem lehet pontosan ugyanaz a prímtényezős felbontásuk, hiszen akkor ugyanaz lenne a két város száma. Ugyanakkor nem lehet egynél több különbség sem a prímtényezőik között. Ennek bizonyítására vegyük a p, q prímszámokat (melyek nem feltétlenül különböznek) és két összeköttetésben álló várost, a-t és $b = a \cdot p \cdot q$-t. Ebben az esetben b többszöröse $a \cdot p$-nek, ami megszegi a második kikötést.

A 42-es város prímtényezőkre bontva $2 \cdot 3 \cdot 7$. Ez azt jelenti, hogy három kisebb sorszámú város áll közvetlen összeköttetésben a 42-essel, ezek prímtényezőkre bontva $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ és $3 \cdot 7$.

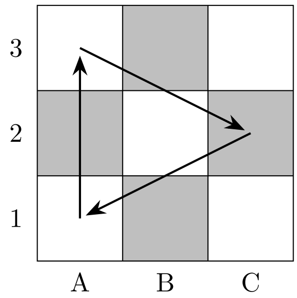
A 42-essel összeköttetésben álló nagyobb sorszámú városok száma felírható $42 \cdot p$ alakban, ahol p valamilyen prímszámot jelöl. A legnagyobb prímszám, melyre igaz a $42 \cdot p < 2020$ egyenlőtlenség, a 47, tehát
$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Ez azt jelenti, hogy további tizenöt város áll közvetlen összeköttetésben a 42-es sorszámú várossal, vagyis összesen tizennyolc.

27. Feladat Márk kitalált egy új sakkfigurát: a *villámlót*. A villámló előrefelé bástyaként, hátrafelé huszárként mozoghat (lásd ábra). Márk 2020 lépést tett vele a szabályoknak megfelelően egy 3×3-as sakktáblán. Legfeljebb hányszor léphetett ugyanarra a mezőre a villámló, ha tudjuk, hogy a középső mezőről indult? (A villámló kezdeti helyzetét nem tekintjük rálépésnek.)



Eredmény. 673

Megoldás. A szabályokból adódóan, ha a villámló tesz egy lépést egyik mezőről a másikra, a következő lépésben nem térhet vissza a kiinduló pozíciójába. Viszont két lépéssel később visszatérhet az első mezőre, ahogy az ábra is mutatja:



Így, ha a villámló eljut az A1, A3, C2 mezők egyikére, elkezdhet „körözni” és meglátogathatja ezen három mező mindegyikét minden harmadik lépésében.

Ha a villámló a B2-es mezőről indul, akkor az első lépését csak bástyaként teheti meg a B3-ra és a következő lépésben az A1 vagy a C1 mezőre érkezhet huszárként. Így a villámló két lépésben elérhet az A1 mezőre, viszont B2-re sem A1-ről, sem C1-ről nem tud közvetlenül visszalépni a három mezős kör megtételéhez, vagyis legalább két lépést fel kell használnunk az elején ahhoz, hogy a villámló bekerüljön egy körforgásba. Ezzel a villámlónak 2018 lépése marad a körözésre, és mivel $2018 = 672 \cdot 3 + 2$, a villámló 672 kört tud megtenni. Tehát 673 alkalommal látogatja meg az A1 mezőt.

28. Feladat Dávid és egy csiga versenyt futottak egy kör alakú pályán. Egyszerre indultak el, ugyanabban az irányban futottak, és a célban találkoztak. Azonban a csiga gyorsabb volt, több kört tett meg, mint Dávid. Dávid 3 kört teljesített, és 2020-szor találkoztak, beleszámolva az indulást és a célbaérést is. A következő nap Dávid az ellentétes irányban futott. A sebességük ugyanaz volt, mint az előző napon. Hányszor találkoztak a második verseny alatt?

Eredmény. 2026

Megoldás. Az alapján, hogy a versenyzők a verseny végén a célban találkoztak, feltehetjük, hogy a csiga pontosan n számú egész kört tett meg a verseny alatt. Ez alapján kör/versenyben mérve Dávid sebessége 3 volt, míg a csigáé n. Így a Dávidtól a csigáig mért távolság változásának mértéke $n - 3$ volt. Mivel annyiszor találkoztak, ahányszor a távolságuk természetes szám volt, az indulást leszámítva $n - 3$ alkalommal találkoztak, vagyis $n = 2022$. Amikor ellenkező irányban futottak, távolságuk változásának mértéke $n + 3 = 2025$ volt, vagyis az indulást leszámítva 2025 alkalommal találkoztak, tehát összesen 2026-szor.

29. Feladat Noé egy olyan játékkal játszik, melyben a karaktere háromféle típusú eszközt tud gyűjtögetni: segítő, támadó és védő eszközöket. Mindhárom fajta eszköz rendelkezik egy *szinttel*, ami egy 1 és 10 közötti egész szám. Két azonos szintű, különböző típusú eszköz összeépítésével mindig egy eggyel nagyobb szintű eszköz kapható a harmadik típusból. Például ha összeépítünk egy 3-as szintű védő és 3-as szintű segítő eszközt, akkor egy 4-es szintű támadót kapunk. Hány 1-es szintű támadó eszközt kell Noénak összegyűjtenie ahhoz, hogy összeépíthessen magának egy 10-es szintű támadó eszközt feltéve, hogy korlátlan számú 1-es szintű védő és segítő eszköz a rendelkezésére áll?

Eredmény. 170

Megoldás. Nevezzük az egy darab 10-es szintű támadó eszköz előállításához szükséges i szintű segítő, védő és támadó eszközök számát rendre s_i-nek, v_i-nek és t_i-nek. A legmagasabb szinten $s_{10} = v_{10} = 0$, $t_{10} = 1$, és a szabályok szerint

$$\begin{aligned} s_{i-1} &= v_i + t_i, \\ v_{i-1} &= t_i + s_i, \\ t_{i-1} &= s_i + v_i \end{aligned}$$

minden $i \in \{2, \ldots, 10\}$ szinten. Ezeket a szabályokat alkalmazva kitölthetünk egy 10×3-as táblázatot úgy, hogy a legfölső sort $(0, 0, 1)$ kivéve minden cella értéke egyenlő a fölötte lévő sor másik két oszlopában álló szám összegével:

0	0	1
1	1	0
1	1	2
3	3	2
5	5	6
11	11	10
21	21	22
43	43	42
85	85	86
171	171	170

Tehát a válasz 170.

Alternatív megoldásként megfigyelhetjük, hogy mivel a segítő és védő eszközök szerepe felcserélhető, $s_i = v_i$. Ugyancsak kikövetkeztethető, hogy $|t_i - s_i| = 1$; ez igaz $i = 10$-re és általánosságban

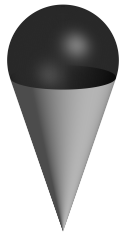
$$|t_{i-1} - s_{i-1}| = |(s_i + v_i) - (t_i + v_i)| = |s_i - t_i| = 1.$$

Végül pedig megállspítható a következő:

$$s_{i-1} + v_{i-1} + t_{i-1} = (v_i + t_i) + (t_i + s_i) + (s_i + v_i) = 2(s_i + v_i + t_i),$$

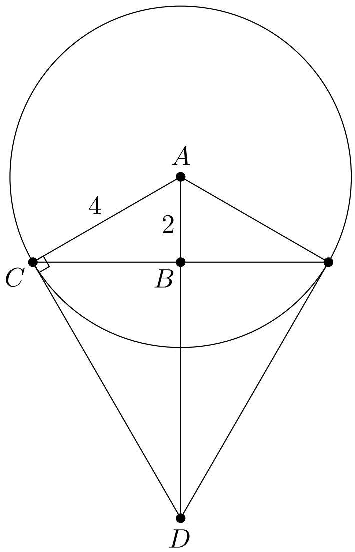
tehát $s_1 + v_1 + t_1 = 2^9 = 512$. Ezek a megfigyelések arra mutatnak, hogy $s_1 = v_1 = 171$ és $t_1 = 170$.

30. Feladat Gizi vett egy fagyit. A gombóc egy 4 cm sugarú gömb volt egy tölcsérben. Gizi azt vette észre, hogy a gömb középpontja 2 cm-rel volt a tölcsér alapja fölött, és a tölcsér pont ott ért véget, ahol érintőként érintette a gömböt. Mekkora volt a tölcsér térfogata?



Eredmény. 24π

Megoldás. Legyen $|AC| = 4$ a gömb sugara, $|BC|$ a tölcsér alapjának sugara és $|BD|$ a tölcsér magassága az alábbi ábra szerint. A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ABC háromszögre megkapjuk, hogy $|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 16 - 4 = 12$. Az ABC és CBD háromszögek hasonlóságából adódóan $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Tehát a tölcsér térfogata $V = \frac{1}{3}\pi|BC|^2|BD| = \frac{1}{3}\pi|BC|^2\frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{\pi \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi$.



31. Feladat Az 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 és 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer használva Béla felírt két négyjegyű számot, majd összeadta azokat. Legfeljebb mennyi lehet az összeg számjegyeinek összege?

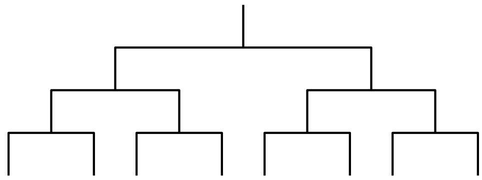
Eredmény. 31

Megoldás. Először is idézzük fel az írásbeli összeadás szabályait: helyiértékenként adjuk össze a számokat, a beváltható értéket pedig továbbvisszük a következő helyiértékre. Vagyis összeadjuk a négy pár számjegyet és a továbbvitt értékeket. Mivel csak két-két számjegyet adunk össze, a továbbvitt érték helyiértékenként legfeljebb 1.

Nevezzük a két négyjegyű számot a-nak és b-nek, bármely n szám számjegyeinek összegét pedig $S(n)$-nek. Így felírható, hogy $S(a+b) = S(a) + S(b) - 9 \cdot c$, ahol c a nullától különböző továbbvitt értékek száma. Az $S(a) + S(b) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$ számítás alapján $S(a+b)$ lehetséges értékei 40, 31, 22, 13 és 4.

Azonban a végeredmény nem lehet 40, hiszen 9 összeadva bármely nullától különböző számjeggyel nagyobb vagy egyenlő 10-zel, míg 31-et kapunk például a következő esetben: $9678 + 4321 = 13999$; $1 + 3 + 9 + 9 + 9 = 31$. A megoldás tehát 31.

32. Feladat Egy egyenes kieséses teniszbajnokságban a nyolc játékost véletlenszerű sorrendben helyezik az ábrán szereplő ágrajz legalsó szintjén található nyolc szabad végre. Majd három fordulót játszanak az ágrajz alapján - mindig a mérkőzés győztese jut tovább a következő fordulóba. A bajnokságunkban két profi és hat amatőr játékos játszik. A profi játékosok mindig legyőzik az amatőröket, míg két profi vagy két amatőr minden esetben egyenrangú ellenfélnek számít. Benő az egyik amatőr játékos. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Benő a döntőbe jut?



Eredmény. $\frac{1}{14}$

Megoldás. Vizsgáljuk csak a játékosok azon felét, amelyik ágon Benő is helyet foglal! Benő akkor és csak akkor jut a döntőbe, ha mindkét profi játékost az ágrajz másik felére osztották be, és ő legyőzi a három másik amatőr játékost a saját ágán.

Ha úgy vizsgáljuk a két profi játékos helyzetét az ágrajzon, hogy csak Benő elhelyezkedése biztos, annak a valószínűsége, hogy mindkét profit az ágrajz másik felére osztják be, $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. (Mivel Benő helyzete fix, a maradék hét helyből négyre kerülhet az első profi, hogy ne legyen vele egy ágon – így már lefoglaltunk két helyet; és az ekkorra maradó hat helyből háromra kerülhet a második profi.) Tekintve, hogy mindegyik amatőr játékos egyenrangú ellenfele egymásnak, annak a valószínűsége, hogy Benő két mérkőzést megnyerjen amatőrök ellen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Benő döntőbe jutásának valószínűsége tehát $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

33. Feladat Egy táblára az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$$

számokat írtuk. Minden lépésben kiválasztunk a táblán két számot, a-t és b-t, azokat letöröljük és helyettük az

$$\frac{ab}{a + 2ab + b}$$

számot írjuk fel. Mindaddig végzünk ilyen típusú lépéseket, mígnem a táblán csak egyetlen szám marad. Határozzátok meg ennek a számnak az összes lehetséges értékét!

Eredmény. $\frac{1}{5248}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha a és b helyére n kerül, a következő egyenlet írható fel:

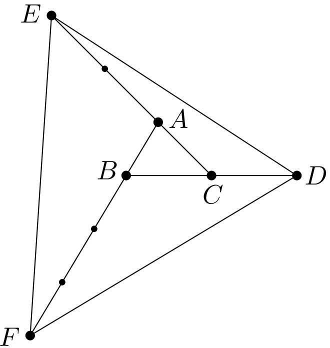
$$\frac{1}{n} = \frac{a + 2ab + b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$

Ebből következik, hogy minden lépésben kettővel növekszik a táblán lévő számok reciprokának összege. Mivel összesen 99 lépés történik, az utolsó számra (ami legyen u) teljesül a következő egyenlet:

$$\frac{1}{u} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \cdots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$

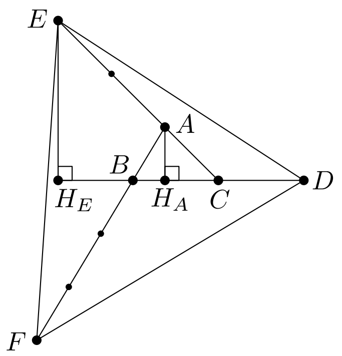
Tehát az utolsó táblán maradó szám $\frac{1}{5248}$.

34. Feladat Adott egy 1 területű ABC háromszög. A BC, CA és AB félegyeneseken vegyük fel rendre a D, E és F pontokat úgy, hogy $BD = 2BC$, $CE = 3CA$ és $AF = 4AB$ teljesüljön (lásd ábra)! Határozzátok meg a DEF háromszög területét!



Eredmény. 18

Megoldás. Vetítsük az A és E pontokat a BC egyenesre, és legyenek ezek a pontok rendre H_A és H_E!



Mivel a CAH_A és CEH_E derékszögű háromszögek hasonlók, $CE = 3 \cdot CA$-ból következik, hogy $EH_E = 3 \cdot AH_A$. Az alapján, hogy $CD = BD - BC = BC$, felírhatjuk a CDE háromszög területét, ami

$$\tfrac{1}{2} \cdot CD \cdot EH_E = \tfrac{3}{2} \cdot BC \cdot AH_A = 3.$$

Hasonlóképp megkapjuk az AEF és BFD háromszögek területét, ami rendre $2 \cdot 4 = 8$ és $3 \cdot 2 = 6$, így a területek összege (és egyben a DEF hátomszög területe) $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

35. Feladat A királyi adószedők három zsáknyi aranyérmét halmoztak fel, mindegyik zsákban többszáz érmével. Az első, a második, illetve a harmadik zsákban található minden egyes érme tömege rendre 10, 11 és 12 gramm. Viszont sajnos a zsákokról elvesztek a címkék. Ám a királynak van egy egykarú mérlege, amely a rátett tárgyak tömegét gramm pontossággal mutatja egészen $N \in \mathbb{N}$ grammig. N grammnál nagyobb tömeg esetén a mérleg N-et mutat. A király meg szeretné határozni, hogy mely zsákban milyen tömegű érmék találhatók. Ezt egyetlen méréssel szeretné megtenni (a zsákokból néhány érmét felhasználva). Határozzátok meg N-nek azt a lehető legkisebb értékét, amire ezt biztosan meg tudja tenni!

Eredmény. 47

Megoldás. Jelölje a király által az egyes zsákokból kivett és megmért érmék számát a, b és c. Fontos, hogy a három szám különbözzön egymástól, hiszen ha kettő megegyezne, akkor a két érmetípushoz tartozó zsák nem lenne megkülönböztethető. Az egymástól különböző számokból álló számhármasokat nevezzük elfogadhatónak! A lehető legkisebb értékeket keressük a, b és c helyére úgy, hogy az $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ művelet eredménye páronként különbözzön a 10, 11 és 12 számok összes $(k,\ l,\ m)$ permutációja esetében.

A legkisebb elfogadható számhármas $a = 0$, $b = 1$ és $c = 2$. Ezek az értékek viszont megszegik a második feltételt, mivel $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$. A második legkisebb elfogadható számhármas $a = 0$, $b = 1$ és $c = 3$, ami viszont már megfelel a második kitételnek is, hiszen

$$3 \cdot 10 + 11 = 41, 3 \cdot 10 + 12 = 42, 3 \cdot 11 + 10 = 43, 3 \cdot 11 + 12 = 45, 3 \cdot 12 + 10 = 46, 3 \cdot 12 + 11 = 47.$$

A mérlegnek tehát 47 grammig kell tudnia pontosan mérni.

36. Feladat Emma ananászdiétán van. Minden nap 13 órakor megnézi, hány darab ananásza maradt. Ha van legalább egy ananásza, akkor egyet megeszik, ha nem, akkor vásárol eggyel többet annál, mint amennyit azelőtt bármikor vásárolt. Az első ananászát a diétája 1. napján 13 órakor vásárolta. Hány darab ananásza van Emmának a 2020. napon 14 órakor?

Eredmény. 59

Megoldás. Jelöljük $s(i)$-vel Emma ananászainak számát az i. napon 14 órakor. Az első két alkalom, amikor $s(i) = 0$, a második és az ötödik napon áll elő, és mivel Emma minden alkalommal eggyel több ananaszt vesz, a sorozatban ket egymast kovető 0 közötti távolság $3, 4, 5, \ldots$. A nullák tehát az alábbi napokon fordulnak elő (és az n-edik ananászmentes nap után mindig $n + 1$ ananászt vásárol):

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Mivel azt keressük, hol jelenik meg az utolsó nulla a 2020. nap előtt, oldjuk meg a $\frac{1}{2}x(x + 1) - 1 = 2020$ másodfokú egyenletet! Van egy negatív gyöke (ami most irreleváns) és egy pozitív gyöke, $\frac{\sqrt{16169}}{2} - \frac{1}{2}$ ami 63 és 64 között van. Tehát a keresett nulla a sorozatban a 62. (a nullák száma a fenti képlet alapján a kettőtől $x = 63$-ig levő természetes számok száma), és ez a $\frac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 2015$. napon jön elő. A sorozat ezután így folytatódik: $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$, tehát a megoldás $s(2020) = 59$.

37. Feladat Józsi épített egy új disznóólat süldő malacainak, amelynek területe $252\,\mathrm{m}^2$. Az ólon belül mozgatható falak vannak, amelyek az ólat 16 téglalap alakú részre osztják föl. Ezeket a falakat az egyenesük mentén, a külső falakkal párhuzamosan lehet csak mozgatni az ól teljes hosszában, illetve széltében. Józsi úgy állította be a falakat, hogy egyes részek területei az ábrán látható értékekkel egyeznek meg m^2-ben. Józsi szereti a matematikát, ezért ügyel arra, hogy az egyes részek oldalainak hossza mindig pozitív egész legyen méterben. Adjátok meg a jobb felső sarokban lévő, az ábrán kérdőjellel jelölt elkerített rész területének összes lehetséges értékét m^2-ben.

24			?
18		12	
			12
30	10		

Eredmény. 8, 24

Megoldás. Ismerjük az első és a második oszlop (30 : 10), valamint az első és a harmadik oszlop (18 : 12) szélességének arányát. Tudjuk továbbá az első, második és negyedik sor magasaágának arányát (24 : 18 : 30). Következésképp az első, második és harmadik oszlopok aránya egyszerűsítve 3 : 1 : 2, míg az első, második és negyedik soroké 4 : 3 : 5. Ezek ismeretében kitölthetjük az üres mezőket a hozzájuk tartozó területértékekkel (lásd az ábrán), a harmadik sorban és a negyedik oszlopban pedig csak részlegesen, az x és y egész számokat jelölő változók segítségével jelöltük a mezők területét.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

A második és harmadik sor magasságának arányát a harmadik oszlopban található $12 : 2x$, illetve a negyedik oszlopban található $3y : 12$ fejezi ki, az ábrán szürkével jelölt mezők alapján. Ez a két arány természetesen megegyezik, így felírható a következő egyenlet: $12 : 2x = 3y : 12$, vagyis $y = 24/x$.

Végül hasonítsuk össze a disznóól teljes területét az összes mező területének összegével, hogy megkapjuk a

$$96 = 6x + 12y = 6x + 12\frac{24}{x},$$

egyenletet, amit átírhatunk a kövezkező alakban:

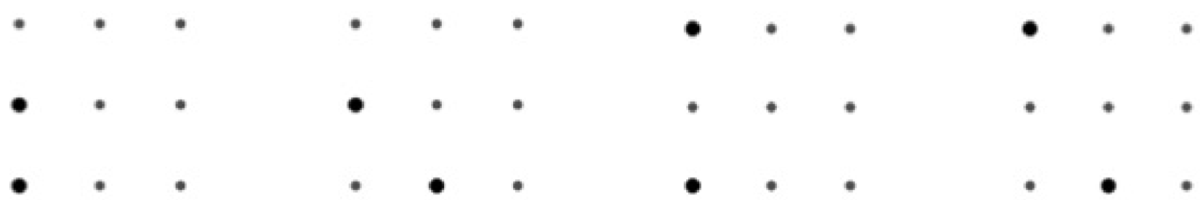
$$0 = x^2 - 16x + 48 = (x-4)(x-12).$$

Az eredmény tehát $x = 4$ vagy $x = 12$, amiből rendre következik, hogy $y = 6$, ekkor $? = 24$, és $y = 2$, ekkor $? = 8$.

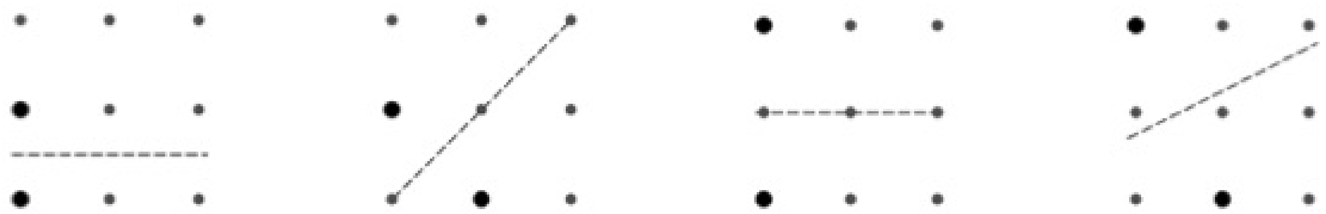
38. Feladat Dani és Fülöp rajzoltak egy-egy kört egy darab papírra, amelyen egy 1×1-es négyzetes rácsponthálózat található. Mindkét kör pontosan három rácsponton halad át. Dani körének sugara $\frac{5}{4}$, Fülöp köre kisebb. Mekkora Fülöp körének sugara?

Eredmény. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

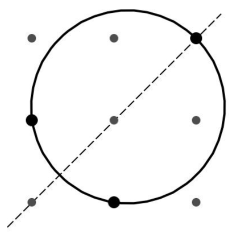
Megoldás. Nevezzük a Fülöp körén lévő három rácspontot A-nak, B-nek és C-nek! Tudjuk, hogy a kör sugara kisebb $\frac{5}{4}$-nél, tehát az A és B pont közötti távolság legfeljebb $\frac{5}{2}$, és az elforgatott helyzetektől eltekintve A és B egymáshoz képesti pozíciója egy a következő négy elrendezés közül:



Mind a négy esetben behúzható a kör két pont közötti tükörtengelye, és a harmadik C rácspont vagy ezen a vonalon helyezkedik el, vagy úgy, hogy a tükörképe nem egy negyedik rácspont. Emiatt az első elrendezés nem lehetséges.



A második elrendezés csak akkor lehetséges, ha a C rácspont a tükörtengelyen helyezkedik el. Hovatovább, a harmadik rácspontra is teljesülnie kell a fenti feltételnek, így a már elhelyezett A és B pontokhoz képest szintén csak az ábrán látható helyzetekben fordulhat elő, természetesen forgatás erejéig – és a lehetséges helyzetek közül már kizártuk a legelsőt. Innen egyértelműen adódik Fülöp köre:



A kör sugarát algebrai módszerekkel kapjuk meg. Hozzunk létre egy koordinátarendszert, melyben az A, B, C rácspontok koordinátái $(1,0)$, $(0,1)$ és $(2,2)$. Ha ezeket az (x,y)-értékeket behelyettesítjük a $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ általános köregyenletbe, majd kiszámoljuk h-t, k-t és r-t, a következő egyenletet kapjuk: $(x-\frac{7}{6})^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{25}{18}$, ahonnan a kör sugara leolvasható: $r=\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

39. Feladat Hét kisördög hét különböző színű sapkát visel. Colorius, a gonosz varázsló ki akar dolgozni egy varázsigét, ami olyan módon változtatja meg a sapkák színét, hogy

- minden egyes sapka új színe csak és kizárólag a sapka korábbi színén múlik, nem pedig azon, hogy ki viseli, és hogy milyen a többi sapka,
- miután a varázsige kifejtette hatását, mind a hét eredeti szín legyen jelen továbbra is, és
- ha Colorius kétszer vagy háromszor mondja el ugyanazt a varázsigét egymás után, soha egyik kisördög se viseljen ugyanolyan színű sapkát, mint eredetileg.

Hány különböző varázsigét tud Colorius kidolgozni, ami megfelel a feltételeknek?

Eredmény. 720

Megoldás. Mivel mind a hét szín jelen lesz a varázsige hatása után is, arra következtethetünk, hogy maga a varázsige csak az eredeti hét szín permutációja. Minden ilyen permutáció elrendezhető a színek különálló irányított körforgásaként, ahol a permutáció csak eggyel tovább viszi a színek körforgását. A varázsige harmadik kitételéből következik, hogy egy ilyen körforgás nem állhat 2 vagy 3 színből, de az 1 színt tartalmazó körforgás sem lehetséges. Viszont a hét színt nem tudjuk úgy egynél több körforgásba rendezni, hogy mindegyik körforgásban legalább négy szín legyen, így a permutációnak egyetlen körforgásból kell állnia. Összesen $6! = 720$ ilyen permutáció létezik: ha egy szín helyzetét tudjuk, hatféle lehetőség van arra, hogy a varázsige milyen színné változtassa azt; a kiválasztott színre öt lehetőség marad és így tovább, amíg az utolsó szín át nem változik az elsővé.

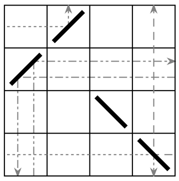
40. Feladat Marcsinak van egy számzáras lakatja, de ez nem egy átlagos lakat, mivel mindegyik gyűrűjén különböző mennyiségű szám van. Az első gyűrűn 0-tól 4-ig szerepelnek a számok, a másodikon 0-tól 6-ig, a harmadikon 0-tól 10-ig, a negyediken pedig 0-tól 9-ig. Marcsi tudja, ha a gyűrűket úgy állítja be, hogy $0,0,0,0$-t mutassanak, és elkezdi az összes gyűrűt egyszerre forgatni (tehát a következő kombináció az $1,1,1,1$ lesz), végül eljut egy olyan kombinációhoz, ami $5,1$-re végződik. Azt is tudja, hogy amikor ez másodjára megtörténik, a gyűrűk azt a kombinációt fogják mutatni, ami kinyitja a lakatot. Segítsetek Marcsinak, és keressétek meg a helyes kombinációt!

Eredmény. $1,6,5,1$

Megoldás. Egy olyan x egész számot keresünk, amelynek 11-es és 10-es maradékai rendre 5 és 1. Mivel a 11 és 10 relatív prímek, a kínai maradéktétel alapján pontosan egy szám létezik $0,1,\ldots,109$ között ami ezt teljesiti (nevezzük ezt a számot x_0-nak) és a többi megoldás előáll úgy, hogy x_0-hoz hozzáadjuk $10\cdot 11=110$ valamilyen többszörösét. Egy lehetséges módszer x_0 megtalálására: soroljuk fel a $11k+5$ alakú számokat, és válasszuk ki azt, amelyik 1-re végződik:

ez a 71 lesz. Tehát Marcsinak 71-et kell forgatnia, mire eléri az első $5,1$-re végződő kombinációt. A korábbiak alapján egy ilyen kombináció 110 forgatás utan áll elő legközelebb, tehát a kezdéstől számolva $110 + 71 = 181$ forgatás után. A 181 5-ös maradéka 1 és 7-es maradéka 6, ezért a lakat ekkor $1, 6, 5, 1$-et fog mutatni.

41. Feladat Egy 4×4-es tábla négyzeteire négy darab kétoldalú tükröt helyeztünk el átlósan. A tábla szélén lévő tizenhat szakasz mindegyikéből egy fénysugarat bocsátottunk ki a szakaszra merőleges irányban. A fénysugár alapvetően egyenesen halad, de $90°$-kal megváltozik az iránya, ahányszor eltalál egy tükröt. Azt figyeltük meg, hogy pontosan négy sugár volt, melynek végpontjai a tábla alsó szélén és jobb oldali szélén helyezkedtek el, másik négy sugárnak a tábla jobb oldali szélén és felső szélén, másik négy sugárnak a tábla felső szélén és bal oldali szélén, a maradék négy sugárnak pedig a tábla alsó szélén és bal oldali szélén voltak a végpontjai. A tükrök hány különböző elrendezésére következhetett ez be? (Az alábbi ábra a tükrök egy elrendezését és néhány sugarat ábrázol.)



Eredmény. 144

Megoldás. Mivel csak négy tükrünk van és mindegyik sugárnak irányt kell váltania valahol, az összes sorban és oszlopban pontosan egy tükörnek kell lennie. A tükröket $4! = 24$ módon tudjuk így elrendezni – az első sorban 4 hely közül választhatunk a tükör elhelyezésekor, ezután a másodikhoz már csak 3 oszlop egyikére tudjuk letenni és így tovább. Mivel megszabtuk, pontosan hány sugárnak kell egy-egy irányba haladnia (és ez minden irány esetében megegyezik), tudjuk, hogy a tükrök közül kettő-kettő ugyanolyan szögben helyezkedik el. Így, miután kiválasztottuk, hova tesszük le a tükröket, $\binom{4}{2} = 6$ módon tudjuk kiválasztani az irányukat. Ezek alapján látható, hogy az összes ilyen elrendezés megfelel a feltételeknek, tehát $24 \cdot 6 = 144$ különböző módon tudjuk elrendezni a tükröket, hogy előálljon a kívánt helyzet.

42. Feladat Legyen $x_1 = 2020$ és x_n álljon elő a következő módon: x_{n-1}-et megszorozzuk a legkisebb olyan p prímmel, amely nem osztója x_{n-1}-nek, majd leosztjuk az összes p-nél kisebb prímmel. Hány különböző prím osztója van x_{2020}-nak?

Eredmény. 9

Megoldás. Az első két tag prímtényezős felbontása $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ és $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. Megfigyelhető, hogy ha a sorozat egyik tagja nem osztható egy prímszám négyzetével, akkor ugyanez igaz az utána következő összes tagra is. Ezáltal x_2-től kezdődően minden x_n tag felírható egy kettes számrendszerben lévő b_n számként, melynek jobbról a k-adik helyiértékén akkor és csak akkor áll 1, ha x_n osztható a k-adik prímszámmal. Vegyük észre, hogy a sorozat meghatározása alapján $b_{n+1} = b_n + 1$ igaz lesz minden $n \geq 2$ számra. Tehát

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2$$

és

$$b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 10000000000000011111101001_2.$$

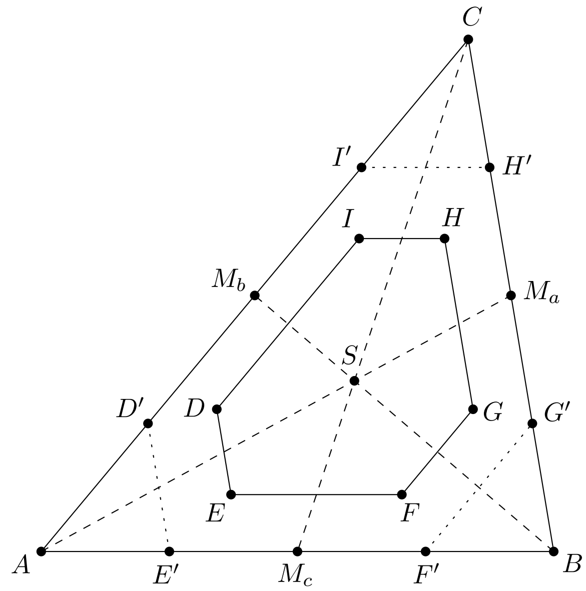
b_n definíciójából következik, hogy x_{2020}-nak ugyanannyi prím osztója lesz, mint ahány egyes számjegy b_{2020}-ban található, ami 9.

43. Feladat Az ABC háromszöget a súlyvonalai hat darab kicsi háromszögre tagolják. Legyenek ezeknek a kicsi háromszögeknek a súlypontjai a $DEFGHI$ hatszög csúcsai. Határozzátok meg a $DEFGHI$ hatszög és az ABC háromszög területének arányát!

Eredmény. $\frac{13}{36}$

Megoldás. Az alábbi ábrán szerepel minden szükséges pont a feladat megoldásához: az $ABC\triangle$ súlypontja (S), az $ABC\triangle$ oldalfelező pontjai (M_a, M_b, M_c), a hat kicsi háromszög súlypontja (D, E, F, G, H, I), valamint az

$M_bA, AM_c, \ldots, CM_b$ szakaszok felezőpontja (rendre $D', E', \ldots, I'$).



Mivel $AE' = \frac{1}{4} \cdot AB$ és $AD' = \frac{1}{4} \cdot AC$, az $ABC\triangle$-et A pontból $\frac{1}{4}$-es arányban középpontosan kicsinyítve megkapjuk az $AE'D'\triangle$-et. Következésképp az $[AE'D']$ háromszög területe $\frac{1}{16} \cdot [ABC]$. Hasonlóképp megkapjuk, hogy $[BG'F'] = [CI'H'] = \frac{1}{16} \cdot [ABC]$. Így a $D'E'F'G'H'I'$ hatszög területe $\frac{13}{16} \cdot [ABC]$. Ezután a $D'E'F'G'H'I'$ hatszöget S pontból $\frac{2}{3}$-os arányban középpontosan kicsinyítve megkapjuk a $DEFGHI$ hatszög területét:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16} \cdot [ABC] = \frac{13}{36} \cdot [ABC].$$

Tehát a két sokszög területének aránya $\frac{13}{36}$

44. Feladat Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ valós számok egy olyan sorozata, hogy $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ teljesül minden m pozitív egészre, és $a_1 = a_{2020}$. Mennyi az $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$ kifejezés értéke?

Eredmény. $\frac{1010}{3}$

Megoldás. A sorozat tagjait összeadva $m = 1, \ldots, 2019$ esetén megkapjuk, hogy

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020}) = (1 - 2 + 3 - \cdots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}).$$

Mivel tudjuk, hogy $a_1 = a_{2020}$, az egyenletet átrendezhetjük a következőképp:

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_{2019}) = 1-2+3-\cdots+2019 = (1-2)+(3-4)+\cdots+(2017-2018)+2019 = (-1)\cdot 1009+2019 = 1010.$$

Tehát

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = 1010/3.$$

Megj.: Megfigyelhetjük, hogy létezik ilyen sorozat a valós számok halmazán – ha a_1 ismert, akkor a sorozat többi tagját megkapjuk a szabály egyenletéből. Vagyis a_{2020} kifejezhető csupán a_1 segítségével, és az $a_1 = a_{2020}$ kikötés alapján lineáris egyenletet kapunk a_1-ből, amely egyenletnek létezik megoldása.

45. Feladat Szandra öt teljesen azonos zsinórt tart a kezében úgy, hogy a keze mindkét oldalán mindegyik zsinórnak pontosan egy vége helyezkedik el. Arra kéri Vilit, hogy véletlenszerűen kösse össze bármely két zsinórvéget a keze valamelyik oldalán egészen addig, amíg a keze mindkét oldalán csak egy-egy szabad zsinórvég marad. Legfeljebb két zsinórvéget lehet egy csomóba kötni. Mennyi a valószínűsége, hogy a végén egyetlen hosszú zsinórt kapunk?

Eredmény. 8/15

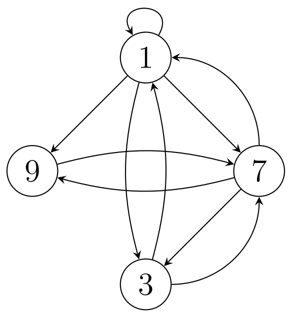
Megoldás. Tegyük fel, hogy a zsinórok, melyeket nevezzünk el A-nak, B-nek, C-nek, D-nek és E-nek, Szandra kezének egyik oldalán úgy vannak összekötve, hogy A vége szabad, B össze van kötve C-vel, D pedig E-vel. Megfigyelhetjük, hogy ebben az esetben akkor és csak akkor kapunk egyetlen hosszú zsinórt, ha a másik oldalon A-t összekötjük a B, C, D és E végek egyikével (4 lehetőség), majd az így kialakult hosszabb zsinór másik szabad végét összekötjük a fennmaradó zsinórpár egyik végével (2 lehetőség) – például ha A-t összekötjük B-vel, akkor C-t kell összekötnünk D-vel vagy E-vel. Így $4 \cdot 2 = 8$ lehetőségünk van egy hosszú zsinórt kapni.

Az összes esetet (az előző konvencióval élve) szintén a második oldalon levő csomózás határozza meg, így összesen 15-féleképp tudjuk összekötni a zsinórvégeket: először kiválasztjuk a szabad véget (5 lehetőség), majd a fennmaradó négy zsinórvég egyikét összekötjük valamelyikkel a másik három közül (3 lehetőség), az utolsó kettőt pedig egymással. Következésképp annak a valószínűsége, hogy a végén egy hosszú zsinórt kapunk, 8/15.

46. Feladat Egy számot *2-prímnek* nevezünk, ha bármely két szomszédos számjegyéből álló kétjegyű szám egy, a többitől különböző prímszámot alkot. Például 237 2-prím, míg 136 vagy 1313 nem az. Keressétek meg a legnagyobb 2-prím számot!

Eredmény. 619737131179

Megoldás. Vegyünk egy 4 csúcsú irányított gráfot, melynek csúcsai legyenek 1, 3, 7 és 9! A gráf csúcsai közé akkor és csak akkor teszünk nyilat, ha az így képzett kétjegyű szám prím. Megjegyzendő, hogy az 1 csúcsból önmaga felé is mutat nyíl.



Tegyük fel, hogy végig tudunk haladni a gráfon a nyilak mentén úgy, hogy mindegyik nyilat pontosan egyszer használjuk fel! Ekkor a legnagyobb 2-prím felírható, ha az egyik ilyen útvonal során meglátogatott számjegyek elé 6-ot vagy 8-at teszünk. A 2-prímek definíciójából következik, hogy az elsőt leszámítva minden számjegyük az $\{1, 3, 7, 9\}$ halmazból kerül ki, és a gráfon egy nyilat sem használhatunk egynél többször. Ezért a legnagyobb 2-prím nem állhat több számjegyből, mint a gráfon látható nyilak száma plusz kettő (egy a 2-prím első számjegyére, egy pedig azért, mert számjegyeket számolunk és nem nyilakat), ami összesen 12. Az első számjegy nem lehet 9 vagy 7 (mert akkor lényegében megismételnénk az egyik nyilat), és mivel a 61, 83, 87 és 89 prímszámok, nincs szükségünk kisebb számjegyekre.

Most keressük meg azt az útvonalat a gráfon, amivel a lehető legnagyobb számot tudjuk előállítani! Érdemes megfigyelni, hogy egyrészt eggyel több nyíl mutat a 9-es csúcs felé, mint amennyi kiindul belőle, másrészt eggyel több nyíl indul ki az 1-es csúcsból, mint amennyi felé mutat. A másik két gráfcsúcs „egyensúlyban” van ilyen szempontból. Következésképp az útvonal csak 1-nél kezdődhet és 9-nél végződhet. Az 1-es csúcsból továbbhaladunk a 9-es felé, mivel ez a lehető legnagyobb csúcs, majd innen ugyanebből az okból a 7-es felé. Innen nem tudunk visszamenni a 9-es csúcshoz (mivel ez véget vetne az útvonalnak), így a 3-as felé haladunk, ahonnan vissza a 7-eshez és így tovább. Ezzel a mohó algorimussal haladva az útvonal végén kapott szám 19737131179, és mivel a 81 nem prímszám, következik, hogy a lehető legnagyobb 2-prím 619737131179.

47. Feladat Legyen O az ABC háromszög köré írt körének középpontja. Legyenek továbbá a D és E pontok rendre az AB és AC szakaszokon úgy, hogy O a DE szakasz felezőpontja. Ha $AD = 8$, $BD = 3$ és $AO = 7$, akkor mekkora a CE szakasz hossza?

Eredmény. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Megoldás. Legyen $A'B'$ és $A'C'$ rendre az AB és AC szakaszok O-ra középpontosan tükrözött képe. Megemlítendő, hogy az A', B' és C' pontok az ABC háromszög köréírt körén találhatók. Mivel O a DE szakasz felezőpontja, a D (E) pont az AB és $A'C'$ (AC és $A'B'$) szakaszok metszéspontja. A Pitagorasz-tételt alkalmazva az $AA'B'$ derékszögű háromszögre kiszámolhatjuk, hogy

$$AB' = \sqrt{AA'^2 - A'B'^2} = \sqrt{14^2 - 11^2} = 5\sqrt{3}.$$

Az $AB'E$ derékszögű háromszögből ugyancsak megkapjuk, hogy

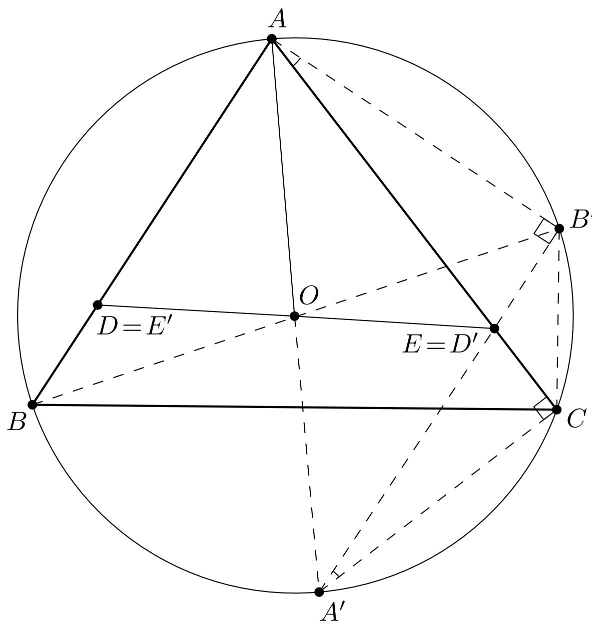
$$AE = \sqrt{75 + 9} = 2\sqrt{21}.$$

Az $AB'E$ és $A'CE$ derékszögű háromszögek hasonlók, így

$$\frac{CE}{A'E} = \frac{B'E}{AE},$$

ez alapján pedig megkapjuk a kívánt eredményt, ami

$$CE = A'E \cdot \frac{B'E}{AE} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$



Alternatív megoldás: A D pont $ABC\triangle$ köré írt köréhez (melynek sugara $r = AO$) tartozó körhatványa

$$-3 \cdot 8 = -DB \cdot DA = OD^2 - r^2 \Rightarrow OE = OD = \sqrt{49 - 24} = 5$$

(azért negatív, mert a pont a körön belül helyezkedik el). A koszinusztételt alkalmazva az $ADO\triangle$-re megkapjuk, hogy

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos(AOD\sphericalangle).$$

Mivel $\cos(AOE\sphericalangle) = \cos(180° - AOD\sphericalangle) = -\cos(AOD\sphericalangle) = -\frac{1}{7}$, ugyanezt a tételt az $AOE\triangle$-re alkalmazva megkapjuk, hogy

$$AE^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos(AOE\sphericalangle) = 84 \Rightarrow AE = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

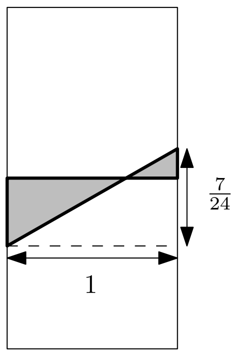
Hasonlóképp az E pont $ABC\triangle$ köré írt köréhez tartozó körhatványából következik, hogy

$$-2\sqrt{21} \cdot EC = 5^2 - 7^2 \Rightarrow EC = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

48. Feladat Egy 7×24-es téglalapot 1×1-es négyzetekre osztottunk. A téglalap egyik átlója háromszögeket vág le egyes négyzetekből. Mennyi ezen háromszögek kerületének összege?

Eredmény. $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Megoldás. Legyen a téglalap szélessége 24, magassága pedig 7! A bal alsótól a jobb fölső sarokig tartó átló meredeksége $\frac{7}{24}$. Amikor az átló áthalad egy négyzeten, akkor és csak akkor vág le belőle egy háromszöget, ha áthalad annak egy vízszintes élén. Mivel az átló meredeksége állandó, a két szomszédos négyzetből levágott háromszögek vonalszakaszait együttesen tekinthetjük egy 1 egység szélességű derékszögű háromszög átfogójának. Mivel a befogók hossza 1 és $\frac{7}{24}$, az átfogó $\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$ egység hosszú.



A két levágott háromszög kerületének összege tehát $\frac{56}{24}$. A téglalap átlója pontosan hatszor metszi a vízszintes osztóvonalakat, továbbá két, a fentihez hasonló, derékszögű háromszöget vág le az első és az utolsó négyzetből, amelyen áthalad. Így a kerületek összege $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

49. Feladat Egy n pozitív egészt *liftezőnek* nevezünk, ha egy 8787 emeletes épületben minden egyes emeletről eljuthatunk bármelyik másik emeletre úgy, hogy csak arra van lehetőségünk, hogy 2020 emeletet menjünk lefelé, vagy n emeletet felfelé. Keressétek meg a legnagyobb liftező számot!

Megjegyzés: Egy k emeletes épületnek egy földszintje van, és k emelete a földszint felett.

Eredmény. 6763

Megoldás. Először is ahhoz, hogy a 2019. emeletről bármerre mozogni tudjon a szám, teljesülnie kell annak, hogy $2019 + n \leq 8787 \Rightarrow n \leq 6768$. Másodszor szükségeltetik a $d = \text{lnko}(2020, n) := 1$ kikötés, mivel csak akkor tudunk az a és b szintek közt mozogni, ha $d \mid a - b$. Figyelembe véve, hogy $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, több lehetőséget is kizárhatunk a legnagyobb n-re: a 6768 osztható 2-vel, a 6767 osztható 101-gyel, a 6766 osztható 2-vel, a 6765 osztható 5-tel, a 6764 osztható 2-vel és végül $\text{lnko}(6763, 2020) = 1$.

Még be kell bizonyítanunk, hogy a 6763 liftező. Az euklideszi algoritmust (vagy a Bézout-lemmát) használva találhatunk olyan x, y egész számokat, melyekre teljesül, hogy $6763x - 2020y = 1$ és feltételezhetjük, hogy x, y párosak és nemnegatívak, mivel x-hez 2020-at és y-hoz 6763-at hozzáadva ugyancsak fennál az egyenlőség. Azt állítjuk, hogy a $0 \leq e \leq 8786$ emeletről indulva lehetséges olyan sorozatot létrehozni, melyben x emeletet megyünk felfelé és y emeletet lefelé úgy, hogy az épületben maradunk és az $e + 1$-edik emeleten érünk célba. Mivel $2020 + 6763 \leq 8787$, mindig legalább egy irányba tudunk menni. Továbbá ha felhasználjuk az összes lefelé (avagy fölfelé) haladó lépést, mindenképp az $e + 1$-edik emelet alatt (fölött) leszünk és a fennmaradó fölfelé (lefelé) haladó lépéseket felhasználva az $e + 1$-edik emeletre érkezünk. Hasonlóképp megállapítható, hogy bármelyik $1 \leq e \leq 8787$ emeletről tudunk egy emeletet lefelé menni. Következésképp a legnagyobb liftező szám 6763.

50. Feladat Az alábbi összeadásban

$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, és a négy szám közül egyik sem kezdődhet nullával. Továbbá tudjuk, hogy $BLUE$ teljes négyzet. Mennyi az ötjegyű $BROWN$ értéke?

Eredmény. 85230

Megoldás. Jelöljük számokkal a betűk oszlopait balról jobbra 1-től 5-ig! Az ötödik oszlopban megkapjuk, hogy $D + E = 10$ és továbbvisszük az 1-et a negyedik oszlopba, amit $t_5 = 1$-gyel jelölünk. Továbbá az első két oszlopból láthatjuk, hogy $G + 1 = B$, mivel t_2-nek 1-nek kell lennie, hiszen $B + R + t_3 = R$ és $1 \leq t_3 \leq 2$. Ebből megállapítható az is, hogy $B = 9$ vagy $B = 8$. Következésképp $BLUE$ négy különböző számjegyből álló négyzete az n számnak, melyre teljesül, hogy $90 \leq n \leq 99$. Ha kizárjuk az azonos számjegyeket tartalmazó négyzeteket, a $BLUE$ fennmaradó lehetséges értékei 8649, 9025, 9216, 9604 és 9801. Az alapján, hogy $D + E = 10$, kizárhatjuk a 9025-öt, mivel ebből az következne, hogy $D = E = 5$. Továbbá nem lehetséges a 9801, mivel akkor igaz lenne, hogy $B = D = 9$, 9604 pedig azért, mert akkor $L = D = 6$ teljesülne. A negyedik oszlop segítségével kizárhatjuk a 9216-ot, mivel ez alapján következne, hogy $D = 4$ és $E + U + E + 1 = 6 + 1 + 6 + 1 = 14$, vagyis $W = 4$, ami ellentmondásban van azzal, hogy $D = 4$. Tehát a $BLUE$ egyetlen lehetséges értéke 8649.

Az alapján, hogy $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$ és $E = 9$, könnyedén megkapjuk, hogy $D = 1$, $W = 3$ és $G = 7$, a továbbvitt értékek pedig $t_3 = t_4 = 2$. A harmadik oszlopban ($R + L + E + t_4 = t_3 \cdot 10 + O$, amit egyszerűsíthetünk $R + 17 = 20 + O$-ra) csak akkor teljesül az egyenlőség, ha $R = 5$ és $O = 2$. Következésképp megkapjuk a hiányzó $N = 0$ értéket, és az összeadás a következőképp néz ki a számjegyeket behelyettesítve:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 9 & 1 \\ + & & 8 & 6 & 4 & 9 \\ + & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline = & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

51. Feladat Keressétek meg a legkisebb olyan $k > 1$ pozitív egész számot, amire nem létezik olyan k-jegyű pozitív egész n, hogy n minden számjegye páratlan és $S(S(n)) = 2$, ahol $S(x)$ jelöli x számjegyeinek összegét!

Eredmény. 103

Megoldás. Elsőként vegyük észre, hogy akkor és csak akkor teljesül az $S(m) = 2$ egy páratlan m egész számra, ha $m = 10^l + 1$, ahol l pozitív egész szám. Ha $k = 103$, akkor az $S(n)$ szükségszerűen páratlan bármely olyan k-jegyű n számra, melynek minden számjegye páratlan, így ahhoz, hogy teljesüljön az $S(S(n)) = 2$, $S(n)$-nek is meg kell felelnie a fenti m-re vonatkozó kikötésnek. Viszont

$$101 < 103 \cdot 1 \leq S(n) \leq 103 \cdot 9 = 927 < 1001$$

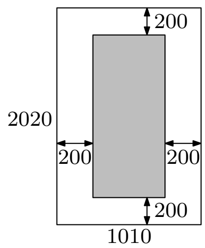
bármely 103 jegyű n számra, így $k = 103$ megfelel a feladatban előírtaknak.

Most bizonyítsuk, hogy a páratlan $k < 103$ értékre létezik a feladatban megadott n szám. Észrevehetjük, hogy $S(n)$ felvehet bármely k-nál nagyobb vagy azzal egyenlő és $9k$-nál kisebb vagy azzal egyenlő páratlan értéket. Ha $1 < k \leq 11$, akkor $9k \geq 18 > 11$, így $S(n)$ értéke lehet 11, és következésképp létezik olyan n szám, amelyre teljesül, hogy $S(S(n)) = 2$. Ha $101 \geq k > 11$, akkor $9k \geq 9 \cdot 13 = 117 > 101$, így $S(n)$ értéke lehet 101 és ismételten teljesül az $S(S(n)) = 2$. Tehát $k > 101$.

Ha $k < 103$ értéke páros, ugyanezt az érvelést alkalmazzuk azzal a különbséggel, hogy $S(n)$ páros. A $k = 2$ értékhez tartozik az $n = 11$. Ha $2 < k \leq 20$, akkor $9k > 20$, így találhatunk olyan n számot, melyre az $S(n)$ értéke 20. Ha $103 > k > 20$, akkor $9k > 180 > 110$, így $S(n)$ értéke lehet 110.

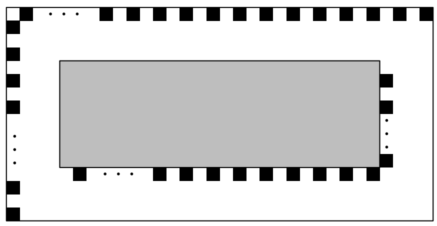
Ezek alapján kiderül, hogy 103 a keresett legkisebb szám, melyre teljesülnek a feladat feltételei.

52. Feladat Marci vett egy téglalap alakú sakktáblát, ami 1010×2020 négyzetből áll, és amelyből kivágtak egy kisebb téglalapot az alábbi ábrán látható módon. Marci a sakktábla minden négyzetére helyezett egy bogarat. Azonban néhány bogár köhögős volt, és ez a köhögés rendkívül fertőző: minden bogár, akinek legalább két szomszédja köhögős volt, szintén elkapta a köhögést. (Akkor szomszédja egy bogár a másiknak, ha olyan négyzeten ül, amellyel a másik négyzetének van közös oldala.) Határozzátok meg, hogy legkevesebb hány köhögős bogarat kell felrakni a táblára, hogy megfertőzzék az összes többit. A bogarak nem mozogtak.



Eredmény. 2630

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha egy bogár megfertőződik a fent említett módon, a fertőzött régió teljes kerülete nem növekszik. Ezáltal kezdetben legalább $P/4$ fertőzött bogárnak kell lennie, hogy megfertőzhessék az összes többit, ahol P az "O" alak kerülete. Könnyedén kiszámolható, hogy $P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$, és $P/4 = 2630$ köhögős bogár az ábrán látható módon elrendezve meg tudja fertőzni az összes többit.



53. Feladat Egy pozitív egész számnak 25! különböző pozitív osztója van. Az osztók közül legfeljebb hány lehet egy prímszám ötödik hatványa?

Megjegyzés: Az $n!$ az összes n-nél kisebb vagy egyenlő pozitív egész szám szorzatát jelöli.

Eredmény. 27

Megoldás. Egy $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ számnak, ahol a p_i-k különböző prímek, $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ pozitív osztója van. Tehát az ötödik prímhatvány alakú osztók maximális száma egyenlő a 6-nál nagyobb vagy egyenlő tényezők maximális számával 25! lehetséges faktorizációiban. Ennek a maximalizálásához vegyük 25! prímfelbontását:

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23.$$

Az 5-nél nagyobb prímeken nem változtatunk, az 5-ösöket és a 3-asokat egyenként szorozzuk fel egy-egy 2-essel, a megmaradó 2^6-t pedig írjuk át 8^2 alakba, ezzel a felbontással pedig meg is kaptuk a keresett maximumot, ami a 27.

54. Feladat Az x, y, z pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 1, \\ y^2 + yz + z^2 &= 2, \\ z^2 + zx + x^2 &= 3. \end{aligned}$$

Mennyi az $xy + yz + zx$ kifejezés értéke?

Eredmény. $2\sqrt{2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Megoldás. Összeadva az első és harmadik egyenletet, majd kivonva a második kétszeresét, azt kapjuk, hogy

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0.$$

Mivel x, y, z pozitívak, $2x = y + z$. Legyen $y = x - \delta$ és $z = x + \delta$, ezeket helyettesítsük be az eredeti egyenletekbe, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x\delta + \delta^2 &= 1, \\ 3x^2 + \delta^2 &= 2, \\ 3x^2 + 3x\delta + \delta^2 &= 3. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $x\delta = 1/3$, ezt a második új egyenletbe behelyettesítve egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásai

$$\delta^2 = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

A feladat a $3x^2 - \delta^2 = 2 - 2\delta^2$ értékére kérdez rá, és mivel pozitívnak kell lennie, az egyetlen lehetőség $2\sqrt{2/3}$.

Alternatív megoldás: Vegyünk fel a síkban egy P pontot és húzzuk meg a PA, PB és PC szakaszokat rendre x, y és z hosszúságban úgy, hogy $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle = 120°$. Mivel $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, a feladatban megadott egyenletekből és a koszinusztételből következik, hogy $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$ és $AC = \sqrt{3}$, így az ABC egy derékszögű háromszög, melynek területe $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ugyanezt a területet kiszámolhatjuk a P csúcson osztozó három háromszög területéből is, az alábbi módon: $S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$. Mivel $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, arra következtethetünk, hogy $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

55. Feladat Legyenek I és O azon ABC háromszög beírt körének, illetve köré írt körének középpontjai, amelyre teljesül, hogy $AB = 495$, $AC = 977$ és $AIO\sphericalangle = 90°$. Határozzátok meg a BC oldal hosszát!

Eredmény. 736

Megoldás. Végezzünk egy középpontos nagyítást az A pontból kiindulva kétszeres szorzóval, és jelöljük az egyes pontok így kapott képét vessző hozzáadásával! Így az AO' szakasz az $ABC\triangle$ köré írt körének átmérője, és mivel $AIO\sphericalangle = 90°$, az I' pont szintén a köré írt kör ívén helyezkedik el. Következésképp I' annak a BC ívnek a felezőpontja, amely nem tartalmazza az A pontot. Ismeretes, hogy erre a pontra (amit nevezzünk ezentúl $\check{S}$-nek) teljesül, hogy $\check{S}I = \check{S}C$ és a szögek kiszámítása révén kiderül, hogy $BC\check{S}\sphericalangle = BA\check{S}\sphericalangle = CA\check{S}\sphericalangle$. Az $A\check{S}$ és BC szakaszok metszéspontja legyen D! Ekkor igaz, hogy $D\check{S}C\triangle \sim C\check{S}A\triangle$ és így

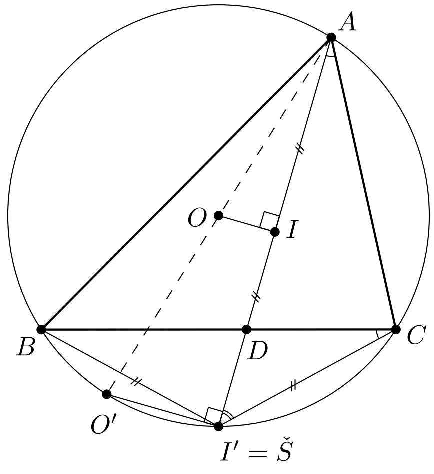
$$\frac{\check{S}D}{\check{S}I} = \frac{D\check{S}}{\check{S}C} = \frac{C\check{S}}{\check{S}A} = \frac{\check{S}I}{\check{S}A} = \frac{1}{2}$$

a középpontos hasonlóság arányának reciproka. Ebből következik, hogy $[BCI] = \frac{1}{3} \cdot [ABC]$, ahol $[XYZ]$ az XYZ háromszög területét jelöli. Ezt az egyenlőséget átalakíthatjuk az $ABC\triangle$ beírt körének r sugarával:

$$\frac{1}{2}r \cdot BC = \frac{1}{6}r(AB + BC + CA),$$

amiből kiszámolhatjuk, hogy

$$BC = \frac{AB + AC}{2} = \frac{495 + 977}{2} = 736.$$



56. Feladat Keressétek meg az összes (a, b, c) pozitív egészekből álló számhármast, amelyek kielégítik a $3abc = 2a + 5b + 7c$ egyenletet.

Eredmény. $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$

Megoldás. A (pozitív) abc számmal leosztva az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Ha mindhárom ismeretlen nagyobb egynél, és legalább az egyik nagyobb kettőnél, akkor a jobb oldal legfeljebb

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3,$$

azaz nincs megoldás ezek mellett a feltételek mellett. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy $a = b = c = 2$ sem megoldás. Tehát a, b és c közül legalább az egyik egyenlő 1-gyel.

Ha $a = 1$, akkor az eredeti egyenlet

$$3bc = 2 + 5b + 7c$$

lesz, amelyet ha felszorzunk hárommal, és átrendezzük, előáll szorzat alakban:

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41.$$

Mivel mindkét tényező a 41 pozitív osztója, és 41 prímszám, így ebben az esetben csak egyetlen megoldás van, mégpedig $b = 16$ és $c = 2$.

Ha $b = 1$, azt kapjuk, hogy

$$3ac = 2a + 5 + 7c$$

és az előzőhöz hasonló lépésekkel és érveléssel ebből adódik, hogy

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

ahonnan egy megoldást kapunk: $a = 12$ és $c = 1$.

Végül, ha $c = 1$-et helyettesítünk be, és elvégezzük a szükséges átrendezést, akkor

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31,$$

amelyből az $a = 12$, $b = 1$, illetve az $a = 2$, $b = 11$ megoldásokat kapjuk, amelyek közül az elsőt már korábban megtaláltuk.

Összesen tehát pontosan három megoldás van: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ és $(12, 1, 1)$.

57. Feladat Egy buliban minden vendég pontosan tizennégy másik vendégnek a barátja (saját magát nem beleértve). Bármely két barátnak pontosan hat további közös barátja van jelen, míg bármely két vendégnek, akik nem barátok, pontosan két közös barátja van jelen. Hány vendég van a buliban?

Eredmény. 64

Megoldás. Válasszuk ki x vendéget a barátaival együtt és jelöljük ezt a 15 emberből álló csoportot H-val! Legyen y H-nak egy x-től különböző eleme, ekkor y-nak pontosan 7 barátja van a H-n kívül: y 14 barátjából az egyik x, illetve van hat közös barátjuk x-szel, és ezek mind elemei H-nak. Tehát összesen $c = 14 \cdot 7 = 98$ (y, z) pár van, ahol y H-nak egy x-től különböző eleme, és z egy H-n kívüli barátja y-nak. Azonban a c számot másféle számolással is megkaphatjuk: minden H-n kívüli z vendégnek pontosan két barátja van benne H-ban, mivel a H definíciójából kifolyólag x és z nem lehetnek barátok, x és z két közös barátja pedig benne van a H-ban. Azaz c a H-n kívüli vendégek számának kétszeresével egyezik meg, vagyis $98/2 = 49$ vendég nincs benne H-ban. Mivel H-nak 15 eleme van, így összesen $15 + 49 = 64$ vendég van a buliban.

Gondoljuk meg, hogy a 64 vendég között a baráti kapcsolatok ilyen hálózata lehetséges: helyezzük a vendégeket egy 8×8 tábla négyzeteibe és két vendég pontosan akkor álljon baráti kapcsolatban, ha ugyanabban a sorban, vagy ugyanabban az oszlopban vannak. Könnyen látható, hogy ekkor a feladat feltételei teljesülnek.

58. Feladat Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. Ha

$$AP = \sqrt{3}, \quad BP = 5, \quad CP = 2, \quad AB : AC = 2 : 1, \quad \text{és} \quad BAC\sphericalangle = 60^\circ,$$

akkor mekkora az ABC háromszög területe?

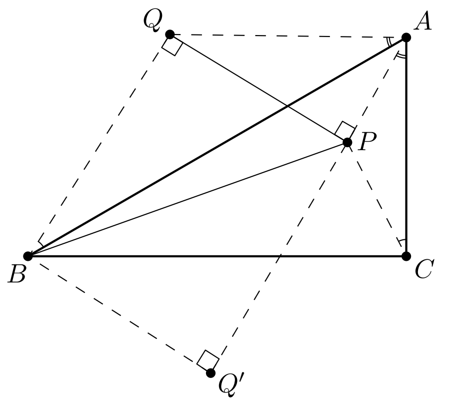
Eredmény. $\dfrac{6 + 7\sqrt{3}}{2}$

Megoldás. Vegyünk fel a C pontból az AB oldalra húzott merőlegesen egy külső Q pontot úgy, hogy $ABQ\triangle \sim ACP\triangle$! A hasonlóság aránya $\frac{AB}{AC} = 2$ és ebből következik, hogy $AQ = 2 \cdot AP = 2\sqrt{3}$ és $BQ = 2 \cdot CP = 4$. Ezekből az egyenlőségekből, valamint abból, hogy $QAB\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, következik, hogy $APQ\triangle \sim ACB\triangle$, így $APQ\sphericalangle = 90°$ és a Pitagorasz-tétel miatt

$$PQ = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3.$$

Ugyanezen tétel miatt, mivel $BP^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = BQ^2 + PQ^2$, megkapjuk, hogy $BQP\sphericalangle = 90°$. Ha a Q pontot középpontosan tükrözzük a BP szakasz felezőpontjára (legyen ez a Q'), ismét alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt az $AQ'B$ derékszögű háromszögre, hogy kiszámoljuk az AB oldalt: $AB^2 = PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$. Ebből következik, hogy az $ABC\triangle$ területe

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8} AB^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



59. Feladat Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ egy olyan nemnegatív egész együtthatós polinom, amelyre teljesül, hogy

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Határozzátok meg $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ legkisebb lehetséges értékét!

Eredmény. 22

Megoldás. Legyen $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ és vegyük észre, hogy amit minimalizálni akarunk, az $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1)$. A megoldást több lépésre bontjuk.

1. lépés: Ellenőrizhető, hogy u gyöke a $G(x) = x^2 + x - 5$ egyenletnek. Osszuk le $P(x)$-et $G(x)$-szel, azaz írjuk fel

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

alakban, ahol A és B egészek, és Q egész együtthatós polinom (a polinomosztás algoritmusával könnyen meghatározható).

2. lépés: Mivel $P(u) - 2020 = 0$, A és B egészek, illetve u irracionális, ebből következik, hogy $A = 0$ és $B - 2020 = 0$, azaz

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \qquad (\star)$$

3. lépés: Ha $P(x)$ bármelyik együtthatójára, mondjuk a_k-ra igaz, hogy $a_k \geq 5$, akkor a $\tilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k$ polinom szintén megfelel a feltételeknek, és $\tilde{P}(1) = P(1) - 3$. Ezt az eljárást addig ismételve, amíg lehetséges, egy olyan $P(x)$ polinomot kapunk, amelynek minden együtthatójára teljesül, hogy $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $P(u) = 2020$.

4. lépés: Lássuk be, hogy az ilyen módon konstruált P polinom egyértelmű. Ahhoz, hogy bármely, a $(\star)$ egyenletet egy megfelelő $Q(x)$-szel kielégítő polinomra teljesüljön, hogy $0 \leq a_0 \leq 4$, ahol a_0 $P(x)$ konstans tagja, a $Q(x)$ konstansára igaz kell legyen, hogy $q_0 = 404$. Mivel $G(x)$ minden együtthatóját ismerjük, és a konstans tag abszolútértéke 5, így a $(\star)$ alapján meg tudjuk határozni a q_1 együtthatót, és így tovább. A $Q(x)$ egyértelműségéből pedig nyilvánvalóan következik a $P(x)$ egyértelműsége.

5.lépés: Végül a 3. lépésben leírt eljárást ismételve elvégezzük a szükséges számításokat. A $P_0(x) = 2020$ konstans polinomból indulva a következő módon számolunk:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x \\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x \\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}
$$

A keresett minimum tehát $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22.$